Rahoitust€oria

eli optioiden hinnoittelun ja toistamisen taito
tai oppi optioiden oikeasta hinnasta

Tommi Sottinen

tommi.sottinen@helsinki.fi
mathstat.helsinki.fi/∼tsottine

18. huhtikuuta 2006

Sisältö

Lukijalle

Nämä luentomuistiinpanot ovat keväällä 2005 luennoimani kurssin *Rahoitusteoria (5 ov)* muistiinpanojen tiivistetty, laajennettu, kuvitettu ja virhekorjattu versio. Joitakin virheitä, epätäsmällisyyksiä ja outouksia on varmaankin vielä jäänyt. Näistä voi lähettää sähköpostia kirjoittajalle osoitteeseen tommi.sottinen@helsinki.fi.

Tekstin seassa on paljon, usein todistamattomia, väitteitä huomautuksina. Osa huomautuksista on erikseen numeroitu ja korostettu sanalla "huomautus". Numeroidut huomautukset ovat tietysti keskeisempiä kuin numeroimattomat. Muistiinpanojen tulokset ovat nimetty apulauseiksi, väitteiksi ja lauseiksi seuraavan logiikan mukaan. Apulauseet ovat teknisiä aputuloksia. Esimerkiksi Itôn kaava, joka on stokastisen analyysin merkittävin tulos, on esitetty apulauseena, koska se ei välittömästi puhu rahoitusteoriasta. Väitteet liittyvät välittömästi rahoitusteoriaan. Lauseita on varsin vähän. Niinpä kysymykseen "mikä on keskeisintä kurssissa" on helppo vastata: lauseet. Lisäksi jokaisen osan loppussa on "pähkinänkuori", joka tulee *vähintäänkin* osata, mikäli mielii saada kurssista hyväksytyn arvosanan.

Olen pyrkinyt todistamaan kaiken. Tässä olen luonnollisesti epäonnistunut. Mittateorian ja todennäköisyysteorian tulokset olen pääosin jättänyt todistamatta. Samoin funktionaalianalyysin tuloksia, erottavan hypertason lausetta ja Hahn–Banach-lausetta, ei todisteta. Stokastisen analyysin tulokset olen sen sijaan pyrkinyt todistamaan.

Keskeisinä lähteinä olen käyttänyt Valkeilan luentoja [8][1] sekä, erityisesti osassa I, Föllmerin ja Schiedin kirjaa [2]. Osaan II suosittelen oheislukemistoksi Shreven kirjaa [5] ja osaan III Shreven kirjaa [6], muistiinpanoja [7][2] sekä Lambertonin ja Lapeyren kirjaa [3]. Näitä luentoja laajempi, mutta matemaattisempi vähemmän perusteellinen, johdanto rahoitusteoriaan löytyy Alvarezin ja Koskisen monisteesta [1]. Jatkolukemiseksi suosittelen Shiryaevin kirjaa [4]. Se on todellinen matemaattisen rahoitusteorian aarrearkku.

Lopuksi vielä varoituksen sana. Nämä muistiinpanot alkavat kevyesti. Vaikeustaso kuitenkin kasvaa luku luvulta eksponentiaalisesti.

Helsingissä 18. huhtikuuta 2006 T. S.

[1] math.tkk.fi/opetus/rahoitus

[2] www-2.cs.cmu.edu/∼chal/Shreve/shreve.html

Osa I

Yksi askel

Luku 1

Johdattelua

> It has been my experience that competency in mathematics — both in numerical manipulations and in understanding its conceptual foundations — enhances a person's ability to handle the more ambiguous and qualitative relationships that dominate our day-to-day financial decision-making. — Alan Greenspan

Mitä ja miksi optiot ovat

Kurssin tarkoitus on etsiä "oikea hinta" optioille eli johdannaisille. Aloitamme esittelemällä lyhyesti, mitä osakkeet ja johdannaiset ovat.

Kun yritys haluaa kerätä pääomaa, se voi järjestää osakeannin. Osakkeista saatua rahaa vastaan yritys voi sitten jakaa osakkeenomistajille osinkoja (*dividends*) ja antaa päätösvaltaa yrityksessä. Kerran markkinoille laskettuja osakkeita voidaan ostaa ja myydä kohtalaisen vapaasti. Perinteisesti kauppaa on käyty joko pörsseissä tai OTC-markkinoilla (*Over-The-Counter*), joka on eräänlainen välittäjien yhteenliittymä. Markkinoilla osakkeiden hinnat määräytyvät osto- ja myyntitarjousten mukaan toinen toistaan "hienostuneempien" systeemien perusteella. Itse asiassa osakkeella ei ole kiinteällä hetkellä tarkkaa hintaa, vaan koko ajan on käynnissä huutokauppa. Lähinnä totuutta on sanoa, että osakkeella on osto- ja myyntihinta. Lisäksi osakkeiden välittäjät ottavat vaivoistaan palkkion. Tyypillisesti ostaja tai myyjä maksaa välittäjälle prosenttiosuudeen kauppahinnasta. Tällä kurssilla oletamme kuitenkin yksinkertaisuuden vuoksi, että osakkeilla on joka ajanhetkellä jokin kiinteä hinta ja että välittäjät eivät vedä välistä.

Osakkeiden lisäksi markkinoilla myydään johdannaisia (*derivative*). Nämä ovat arvopapereita, joiden arvo määräytyy, eli on johdettu, osakkeiden, indeksien, osakekorien tmv. hinnoista.

Eurooppalaiset johdannaiset voidaan käyttää jonakin ennalta johdannaissopimuksessa määrättynä eräpäivänä T. Esimerkkejä:

Osto-optio (*call-option*) antaa oikeuden ostaa osakkeen S ennalta määrätyllä *lunastushinnalla* (*strike price*) K eräpäivänä T. Matemaattisesti tämän johdannaisen arvo on $(S_T - K)^+ := \max(S_T - K, 0)$.

Myyntioptio (*put-option*) antaa oikeuden myydä osakkeen S ennalta määrätyllä lunastushinnalla K eräpäivänä T. Matemaattisesti tämän johdannaisen arvo on siis $(K - S_T)$.

Termiini velvoittaa ostamaan osakkeen S ennalta määrätyllä hinnalla K eräpäivänä T. Matemaattisesti tämän johdannaisen arvo on $S_T - K$. Termiinejä kutsutaan myös *futuureiksi*.

Amerikkalaiset johannaiset voidaan käyttää minä hetkenä hyvänsä ennen johdannaissopimuksessa määrättyä eräpäivää T.

Mihin optiota käytetään? Yksi käyttötarkoitus on johdon palkitseminen. Johtajille annetaan osto-optioita yhtiön osakkeisiin. Koska osto-optiot ovat arvottomia, jos kurssi laskee, niin ajatellaan että näin johtajat työskentelevät paremmin. Lisäksi ajatellaan, että optiot eivät ole kuluja yhtiölle. Argumentti on jotakuinkin sellainen, että yhtiö ei häviä mitään, koska option langetessa myös kurssi on noussut (tällainen argumentti ei voi toimia). Toinen käyttötarkoitus on suojautuminen riskiä vastaan. Olettakaamme, että herra K:lla on osake S ja hän haluaa suojautua osakkeen kurssin laskua vastaan hetkellä T. Esimerkiksi hän haluaa muuttaa varallisuutensa S_T varallisuudeksi $\max(S_T, K)$, missä K on jokin rahasumma, jonka Herra K. tarvitsee hetkellä T. Jos markkinoilla myydään myyntioptioita $(K - S_T)^+$, niin herra K. voi ostaa sellaisen. Tällöin hänen varallisuutensa hetkellä T on

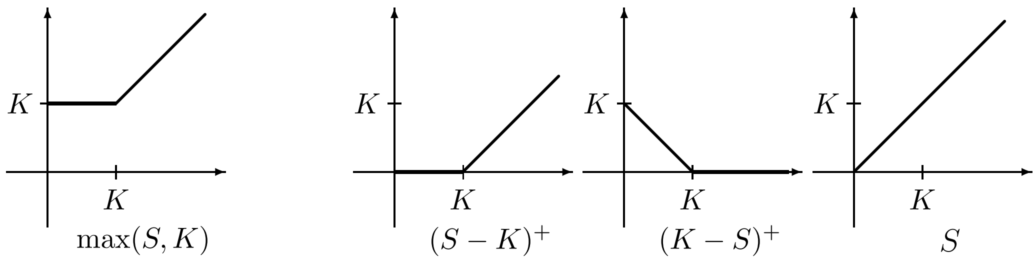
$$S_T + (K - S_T)^+ \quad = \quad \max(S_T, K).$$

Jos markkinoilla myydään vain osto-optioita, niin herra K. voi rakentaa osto-option myyntioptiosta ja osakkeestaan *osto–myynti-pariteetin*

$$S - K \quad = \quad (S - K)^+ - (K - S)^+ \tag{1.1}$$

avulla. Herra K. päätyy myymään osakkeensa, tallettamaan rahasumman K€ pankkiin ja ostamaan osto-option $(K - S_T)^+$. Tällöin

$$K + (S_T - K)^+ \quad = \quad \max(S_T, K).$$



"Stop-loss-funktio" $\max(S, K)$ ja sen rakennuspalikat: osto-optio, myyntioptio ja osake.

Lopuksi esitämme Matti Wuoren kriittisen näkemyksen finanssimarkkinoista (ote kolumnista "Globaalistumisen sietämätön keveys", Hbl 5.2.2001):

> Markkinat ovat ikivanha ilmiö, mutta kun talous oli aikaisemmin upotettuna ('embedded', förankrad ?) yhteiskuntaan ja sosiaalisiin suhteisiin, niin meidän aikanamme sosiaaliset suhteet — ja koko inhimillinen kulttuuri, laajimmassa mielessään — on upotettuna talouteen. Se syrjäyttää kaiken muun. Häntä heiluttaa koiraa.
>
> Villakoiran ydin on räjähdysmäisessä, vain omaa logiikkaansa noudattavassa kasvussa. Lentoliikenne satakertaistui vuosien1950 ja 1988 välillä, samoin finanssimarkkinat vuodesta 1977 vuoteen 1999 mennessä. Niiden päivittäinen volyymi ylittää jo 10.000 miljardia markkaa.
>
> Kysymys on enenevästi virtuaalitaloudesta. Pääomasiirtojen sähköinen värinä on irtaantunut ihmisten arjen todellisuudesta. Pelkästään keinotekoisten johdannaisten eli derivatiivien vuotuinen vaihto on jo 12 kertaa suurempi kuin maailman kaikkien kansantalouksien yhteenlaskettu bruttokansantuote.
>
> Uutta taloutta on kutsuttu myös painottomaksi taloudeksi. Pääomamarkkinat ovat kuin ilmaan rakennettu katedraali, joka noudattaa omia jumalallisia sääntöjään. Sen ja reaalitalouden välillä vallitsee samalla monista eri syistä pysyviä (permanenta) jännitteitä, jotka voivat olla vaarallisia. Lopultakin hyvin pienen eliitin lyhytnäköinen voitonhimo piiskaa perinteisiä rakenteita ja malleja äärirajoille.

Herra K. tarjoaa osto-option

Tarkastelemme yhtä osaketta S. Tänään, hetkellä $t = 0$, osakkeen hinta on $S_0 = 100$ €. Huomenna, hetkellä $t = 1$, kohtalon jumalatar Lady Fortuna arpoo satunnaisen alkion joukosta

$$\Omega \quad = \quad \{\text{“alas”}, \text{“ylös”}\} \quad = \quad \{0, 1\}$$

todennäköisyyksin 90% ja 10%. Hetkellä $t = 1$ osakkeen S hinta on satunnaismuuttuja $\omega \mapsto S_1(\omega)$. Jos $\omega = 1$, niin osakkeen hinta on 200€. Jos $\omega = 0$, niin sen hinta on 90€. Kuvallisesti tilanne on seuraava:

$$
\begin{array}{ccccll}
 & & & & S_1(1) = 200\text{€} & \text{tn:llä } 90\% \\
 & & & \nearrow & & \\
S_0 = 100\text{€} & \longrightarrow & S_1(\omega) & & & \\
 & & & \searrow & & \\
 & & & & S_1(0) = 90\text{€} & \text{tn:llä } 10\%
\end{array}
$$

Herra K. tarjoaa meille osto-optiota $(S_1 - 100\text{€})^+$. Emme häviä mitään ottamalla option vastaan. Herra K. sen sijaan voi vain hävitä. Siten hän ei tarjoa optiota ilmaiseksi. Kysymys onkin kuinka paljon herra K. voi vaatia sopimuksesta; tai kuinka paljon me olemme valmiita maksamaan. Uskottava vastaus saadaan *odotusarvoperiaatteen* nojalla: voitamme 100€ todennäköisyydellä 90% ja 0€ todennäköisyydellä 10%, joten oikea hinta on

$$c_{\text{op}} = 100\text{€} \cdot 90\% + 0\text{€} \cdot 10\% = 90\text{€}.$$

Tarkastelemme tilannetta herra K:n kannalta. Herra K. myi meille osto-option hinnalla $c_{\text{op}} = 90$€. Hän ottaa nyt pankista lainaa 10€ ja ostaa yhden osakkeen. Jos osakkeen hinta laskee, niin optiomme on arvoton ja herra K. voi myydä osakkeensa hintaan 90€. Maksettuaan 10€ velkansa herra K:lle jää voittoa 80€. Herra K. on iloinen. Jos taas osakkeen hinta nousee, niin lunastamme optiomme. Herra K. luopuu osakkeestaan hinnalla 100€. Maksettuaan velkansa herra K:lle jää voittoa 90€. Herra K. on iloinen. Tapahtui siis mitä tahansa herra K. on saanut voittoa. Tällaista "tyhjästä nyhjäisyä" kutsutaan *arbitraasiksi* (arbitrage).

Edellisen perusteella on selvää, että odotusarvoperiaatteen antama hinta c_{op} on liian korkea: se ei voi olla osto-option todellinen hinta markkinoilla (ainakaan kovin pitkään), sillä lopulta kaikki haluaisivat arbitraasin toivossa myydä osto-optioita eikä kukaan haluasi ostaa niitä. Niinpä kysynnän ja tarjonnan laki laskee osto-option hintaa lopulta. Odotusarvoperiaate ei siis sovi hinnoitteluun. Syy on se, että odotusarvot sopivat nollasummapeliehin, mutta option hinnoittelussa osakkeen hinnan nousu on sekä myyjän että ostajan etu.

Tarkastelemme tilannetta tasapainoiselta kannalta. Johdamme osto-option $(S_1 - 100\text{€})^+$ hinnan *suojausperiaatteen* nojalla. Osto-option hinta c on Herra K:n alkupääoma, jonka hän sijoittaa osakkeisiin ja pankkiin. Olkoon β pankkitalletuksen ja γ osakkeinen lukumäärä. Tällöin

$$c = \beta\text{€} + \gamma S_0$$

Hetkellä $t = 1$ herra K. haluaa *suojata* tai *toistaa* (*hedge*, *replicate*) osto-option. Toisin sanoen hän haluaa varallisuutensa hetkellä $t = 1$ olevan juuri saman arvoinen kuin osto-optio. Siis

$$\beta € + \gamma S_1(\omega) \quad = \quad (S_1(\omega) - 100 €)^+. \tag{1.2}$$

Koska mahdollisia maailmantiloja on kaksi, niin (1.2) tarkoittaa yhtälöparia

$$\begin{aligned} \beta € + \gamma \cdot 200 € &= 100 €, \\ \beta € + \gamma \cdot 90 € &= 0 €. \end{aligned}$$

Ratkaisemalla tämän yhtälöparin saamme

$$\beta \quad = \quad -\frac{900}{11} \qquad \text{ja} \qquad \gamma \quad = \quad \frac{10}{11}.$$

Herra K. pystyy siis suojaamaan osto-option jos ja vain jos hänen saamansa alkupääoma riittää ostamaan parin (β, γ) eli

$$c \quad \geq \quad c_{\mathrm{sp}} \quad := \quad -\frac{900}{11} € + \frac{10}{11} \cdot 100 € \quad = \quad 9{,}09 €.$$

Edellisen perusteella herra K. suostuu myymään osto-option millä tahansa hinnalla $c \geq c_{\mathrm{sp}}$. Toisaalta meidän ei kannata maksaa enempää kuin c_{sp}, koska tällä hinnalla voimme itse toistaa osto-option samalla tavalla kuin herra K. Olemme siis päätyneet siihen, että osto-option $(S_1 - 100 €)^+$ oikea tai *tasapuolinen hinta* (*fair price*) on $c_{\mathrm{sp}} = 9{,}09 €$.

Keskeinen lelumalli

Yleinen kahden tilan ja yhden osakkeen (koroton) malli on seuraava: $S_0 > 0$ on osakkeen hinta tänään, joka on deterministinen. Huominen hinta S_1 on satunnaismuuttuja todennäköisyysavaruudelta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, missä

$$\Omega \quad = \quad \{\text{“alas”}, \text{“ylös”}\} \quad = \quad \{0, 1\},$$

σ-algebra $\mathcal{F}$ sisältää kaikki Ω:n osajoukot ja todennäköisyysmitta $\mathbf{P}$ määräytyy luvusta $p \in (0, 1)$ siten, että

$$\mathbf{P}(\{1\}) \quad = \quad p \qquad \text{ja} \qquad \mathbf{P}(\{0\}) \quad = \quad 1 - p.$$

Kuvallisesti osakkeen S kehitys on seuraava

$$\begin{array}{lllll} & & & S_1(1) = S_0(1+u) & \text{tn:llä } p \\ & & \nearrow & & \\ S_0 \longrightarrow & S_1(\omega) & & & \\ & & \searrow & & \\ & & & S_1(0) = S_0(1+d) & \text{tn:llä } 1-p. \end{array}$$

Oletamme, että $d < 0 < u$, sillä muuten mallissa olisi arbitraasia. Osakkeen S suhteellinen muutos eli tuotto

$$R_1 \quad := \quad \frac{\Delta S_1}{S_0} \quad := \quad \frac{S_1 - S_0}{S_0}$$

saa arvot d ja u maailmantiloissa "alas" ja "ylös". Tässä mallissa on siis kolme estimoitavaa parametria: d, u ja p.

1.3 Väite. *Olkoon $F : \Omega \to \mathbb{R}$, jokin maksusopimus keskeisessä lelumallissa. Sen suojausperiaatteen mukainen hinta on*

$$c_{\mathrm{sp}}(F) \quad = \quad F(0) - \frac{-d}{u-d}\Big(F(1) - F(0)\Big). \tag{1.4}$$

Lisäksi sopimuksen F suojaus eli toisto saadaan painoista

$$\begin{aligned} \gamma \quad &= \quad \frac{F(1) - F(0)}{S_0(u-d)}, \\ \beta \quad &= \quad F(0) - \frac{1+d}{u-d}\Big(F(1) - F(0)\Big). \end{aligned}$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Harjoitustehtäviä lukuun 1

1.1. Todista osto-myyntipariteetti (1.1).

1.2. Millaisia kassavirtoja $f(S_1)$ voimme saavuttaa, jos osakkeiden ja pankkitilin lisäksi voimme sijoittaa osto-optioihin $(S - K)^+$ kaikilla lunastushinnoilla $K > 0$? Entä jos tämän lisäksi voimme vielä sijoittaa myyntioptioihin $(K - S)^+$, $K > 0$?

1.3. Laske Herra K. -esimerkissä osto-option $(S_1 - 100\,€)^+$ hinta, kun $\mathbf{P}(\text{"ylös"}) = 35\%$ ja $\mathbf{P}(\text{"alas"}) = 65\%$.

1.4. Laske Herra K. -esimerkissä myyntioption $(100\,€ - S_1)^+$ hinta.

1.5. Todista väite 1.4 ja tulkitse sen antama tasapuolinen hinta, kun ehto $d < 0$ ei päde.

1.6. Olkoot c^u ja c^d digitaalioptioiden $\mathbf{1}_{\{S_1 = u\}}$ ja $\mathbf{1}_{\{S_1 = d\}}$ tasapuoliset hinnat keskeisessä lelumallissa. Mitä voit päätellä mallin parametreista d, u ja p hintojen c^u ja c^d avulla?

1.7. Mitä voit päätellä keskeisen lelumallin parametreista d, u ja p, kun osto-option $(S_1 - K)^+$ tasapuolinen hinta c^{call} on annettu?

Luku 2

Arbitraasi

> Stock market bubbles don't grow out of thin air. They have a solid basis in reality, but reality as distorted by a misconception. — George Soros

Yhden askeleen hinnoittelumalli

Tarkastelemme yleistä yhden askeleen mallia, jossa on d erilaista osaketta $S = (S^1, \ldots, S^d)$. Hinnat tänään $S_0 = (S_0^1, \ldots, S_0^d)$ ovat tiedossa: ne eivät ole satunnaisia. Huomiset hinnat tiedämme vasta huomenna: $S_1 = (S_1^1, \ldots, S_1^d)$ on satunnaismuuttuja joltakin todennäköisyysavaruudelta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Osake tulee ymmärtää tässä laajassa mielessä. Se tarkoittaa mitä tahansa sijoitusta johon liittyy epävarmuutta eli satunnaisuutta eli *riskiä*.

Otamme käyttöön *koron* (*interest*) pankkitalletukseen B. Hetkellä $t = 0$ pankkitalletus on rahayksikkö: $B_0 = 1$ ja hetkellä $t = 1$ talletus B on kasvanut korkoa r:n verran:

$$B_1 \quad = \quad B_0(1 + r).$$

Siis pankkitalletuksen suhteellinen muutos eli *tuotto* (*return*) on

$$r \quad = \quad \frac{\Delta B_1}{B_0} \quad := \quad \frac{B_1 - B_0}{B_0}.$$

Jotta pankkitalletus ei menettäisi arvoaan kokonaan, tai muuttuisi jopa negatiiviseksi, oletamme että $r > -1$. Käytännössähän yleensä $r > 0$. Koron olemassaololle esitetään useita perusteluja: ihmiset preferoivat ennemmin rahaa tänään kuin lupausta saada rahaa huomenna, luottotappiot, inflaatio (pankit eivät pysty vastaamaan ottolainoistaan ja keskuspankit painavat lisää rahaa), jne. Perustelut eivät ole tarpeen. Rahalla on korko. Se on fakta.

Pankkitalletus B tulee ymmärtää, kuten osake, laajassa merkityksessä. Se on vain jokin *riskitön sijoitus* (*riskless asset*). Itse asiassa B:n rooli on vain toimia rahayksikkönä eli *numeräärinä*, jonka suhteen *diskonttaamme*.

2.1 Määritelmä. Edellä määritely kokoelma $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ on (yhden askeleen) *hinnoittelumalli*. Tässä siis

(i) $B = (B_0, B_1)$ on pankkitalletus tänään ja huomenna. Sekä B_0 että B_1 ovat deterministisiä.

(ii) $S = (S_0^i, S_1^i)_{i=1}^d$ on osakevektori tänään ja huomenna. Vektori S_0 on deterministinen ja S_1 on satunnaismuuttuja.

(iii) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ on todennäköisyysavaruus eli malli epävarmuudelle.

Investoijalla on $1 + d$ mahdollista sijoituskohdetta: pankkitalletus B ja d erilaista osaketta $S^1, \ldots, S^d$. Investoija valitsee *salkun* (*poftfolio*)

$$\pi \quad = \quad (\beta, \gamma^1, \ldots, \gamma^d) \in \mathbb{R}^{1+d},$$

missä

$$\begin{array}{ll} \beta & \text{on pankkitalletusten lukumäärä,} \\ \gamma^i & \text{on osakkeiden } S^i \text{ lukumäärä, } i = 1, \ldots, d. \end{array}$$

Negatiivinen β tarkoittaa pankkilainaa ja negatiivinen γ^i tarkoittaa osakkeen S^i *lyhyeksi myyntiä* (*short-selling*). Investoija siis myy osakkeen, jota hän ei omista. Tämä saattaa olla joskus laillista.

Salkun π *varallisuus* (*wealth*) hetkellä $t = 0$ on

$$V_0^\pi \quad := \quad \beta B_0 + \sum_{i=1}^d \gamma^i S_0^i. \tag{2.2}$$

Salkun π varallisuus hetkellä $t = 1$ on satunnaismuuttuja

$$\omega \quad \mapsto \quad V_1^\pi(\omega) \quad = \quad \beta B_1 + \sum_{i=1}^d \gamma^i S_1^i(\omega).$$

2.3 Väite. *Salkun $\pi = (\beta, \gamma)$ varallisuuden muutos eli* voitto *(gain)* $\Delta V_1^\pi := V_1^\pi - V_0^\pi$ *toteuttaa yhtälön*

$$\Delta V_1^\pi \quad = \quad \beta \Delta B_1 + \sum_{i=1} \gamma^i \Delta S_1^i. \tag{2.4}$$

Todistus. Yhtälö (2.4) saadaan suoralla laskulla:

$$\begin{aligned}\Delta V_1^\pi &= V_1^\pi - V_0^\pi \\ &= \beta B_1 + \sum_{i=1}^d \gamma^i S_1^i - \left(\beta B_0 + \sum_{i=1}^d \gamma^i S_0^i\right) \\ &= \beta(B_1 - B_0) + \sum_{i=1}^d \gamma^i (S_1^i - S_0^i) \\ &= \beta \Delta B_1 + \sum_{i=1} \gamma^i \Delta S_1^i.\end{aligned}$$

Väite on todistettu. □

Yhtälö (2.4) sanoo, että varallisuuden muutos tulee pankkitalletuksen ja osakkeiden hintojen muutoksista: rahaa ei tule ulkopuolelta, eikä sitä hävitetä tai kuluteta. Ehdon (2.4) voi myös ymmärtää budjettirajoituksena ja se on myöhemmin käsiteltävän *omavaraisuusehdon* ydin.

2.5 Määritelmä. Hinnoittelumalli $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mahdollistaa *arbitraasin* (*arbitrage*), jos on olemassa sellainen salkku $\pi \in \mathbb{R}^{1+d}$, että

(i) $V_0^\pi = 0$,

(ii) $\mathbf{P}(V_1^\pi \geq 0) = 1$,

(iii) $\mathbf{P}(V_1^\pi > 0) > 0$.

Salkkua π kutsutaan *arbitraasisalkuksi*. Mikäli hinnoittelumallissa ei ole arbitraasisalkkuja, niin se on *arbitraasivapaa*

Arbitraasimahdollisuus tarkoittaa siis sitä, että voimme sijoittaa eri kohteisiin niin että tarvittava alkupääoma on nolla, eikä tulevaisuudessa ole riskiä, että joutuisimme tappiolle, mutta on mahdollista että jäämme voitolle.

2.6 Huomautus. Arbitraasin määritelmä 2.5 riippuu todennäköisyysmitasta $\mathbf{P}$ ainoastaan sen nollajoukkojen kautta. Se ei siis riipu todennäköisyyksistä, vaan mahdollisuuksista. Erityisesti kysymys “kuinka todennäköistä arbitraasi on” on mieletön. ◇

2.7 Esimerkki. Tarkastelemme korollista yhden osakkeen ja kahden tilan mallia: $r > -1$, $S_0 > 0$ vakio ja S_1 on satunnaismuuttuja

$$\begin{array}{lll} & & S_1(1) = S_0(1+u) \quad \text{tn:llä } p \\ & \nearrow & \\ S_0 & & \\ & \searrow & \\ & & S_1(0) = S_0(1+d) \quad \text{tn:llä } 1-p, \end{array}$$

missä $p \in (0,1)$ ja $d < u$. Malli on arbitraasivapaa jos ja vain jos

$$d \quad < \quad r \quad < \quad u. \tag{2.8}$$

Jos nimittäin $\pi = (\beta, \gamma)$ on alkuvaraton salkku eli $\beta = -\gamma S_0$, niin

$$\begin{aligned} V_1^\pi &= \beta(1+r) + \gamma S_1 \\ &= -\gamma S_0(1+r) + \gamma S_1 \\ &= \gamma\Big(S_1 - S_0(1+r)\Big). \end{aligned}$$

Jos ehto (2.8) pätee, niin γ:n ollessa positiivinen

$$\mathbf{P}\Big(\gamma(S_1 - S_0(1+r)) < 0\Big) \quad = \quad \mathbf{P}\Big(S_1 = S_0(1+d)\Big) \quad > \quad 0.$$

Jos γ on negatiivinen, niin

$$\mathbf{P}\Big(\gamma(S_1 - S_0(1+r)) < 0\Big) \quad = \quad \mathbf{P}\Big(S_1 = S_0(1+u)\Big) \quad > \quad 0.$$

Siten π ei voi olla arbitraasisalkku. Toisaalta, jos $r \leq d$, niin $\pi = (0,1)$ on arbitraasisalkku. Jos taas $u \leq r$, niin $\pi = (0,-1)$ on arbitraasisalkku. $\diamond$

Yleistämme esimerkin 2.7 m:n tilan mallille. Olkoon $\Omega = \{1, \ldots, m\}$ ja $p^i := \mathbf{P}(\{i\}) > 0$, $i = 1, \ldots, m$. Olkoon S_0 vakio ja S_1 satunnaismuuttuja

$$\begin{array}{llll} & S_1(m) = S_0(1+s^m) & \text{tn:llä} & p^m \\ & \nearrow & & \\ S_0 & \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots & \\ & \searrow & & \\ & \searrow \; S_1(2) = S_0(1+s^2) & \text{tn:llä} & p^2 \\ & \; S_1(1) = S_0(1+s^1) & \text{tn:llä} & 1 - \sum_{i=2}^m p^i, \end{array}$$

missä $s^m > s^{m-1} > \cdots > s^1$.

2.9 Väite. *Yhden osakkeen ja m:n maailmantilan malli on arbitraasivapaa jos ja vain jos*

$$s^1 \quad < \quad r \quad < \quad s^m, \tag{2.10}$$

missä r on pankkitilin tuotto, s^1 on pienin osakkeen S mahdollinen hinta hetkellä $t = 1$ ja s^m on osakkeen S suurin mahdollinen hinta hetkellä $t = 1$.

Todistus. Kuten esimerkin 2.7 tapauksessa, on helppo nähdä että alkuvarattoman salkun $\pi = (-\gamma S_0, \gamma)$, varallisuus hetkellä $t = 1$ on

$$V_1^\pi \quad = \quad \gamma\Big(S_1 - S_0(1+r)\Big).$$

Siten, jos ehto (2.10) pätee ja $\gamma > 0$, niin

$$\mathbf{P}\Big(\gamma(S_1 - S_0(1+r)) < 0\Big) \quad \geq \quad \mathbf{P}\Big(S_1 = S_0(1+s^1)\Big) \quad > \quad 0.$$

Tilanteessa $\gamma < 0$ saamme

$$\mathbf{P}\Big(\gamma(S_1 - S_0(1+r)) < 0\Big) \quad \geq \quad \mathbf{P}\Big(S_1 = S_0(1+s^m)\Big) \quad > \quad 0.$$

Siten π ei ole arbitraasisalkku Lopuksi jos $r \leq s^1$, niin $\pi = (0,1)$ on arbitraasisalkku ja jos $s^m \leq r$, niin $\pi = (0,-1)$ on arbitraasisalkku. □

Seuraava esimerkki osoittaa, että väitettä 2.9 ei voi yleistää monen osakkeen tilanteeseen.

2.11 Esimerkki. Tarkastelemme kahden tilan ja kahden osakkeen mallia. Olkoon $\Omega = \{0,1\}$ ja $p \in (0,1)$. Olkoon osakkeen S^1 kehitys

$$\begin{array}{ccll} & & S_1^1(1) = S_0^1(1+u) & \text{tn:llä } p \\ & \nearrow & & \\ S_0^1 & & & \\ & \searrow & & \\ & & S_1^1(0) = S_0^1(1+d) & \text{tn:llä } 1-p. \end{array}$$

ja olkoon osakkeen S^2 kehitys

$$\begin{array}{ccll} & & S_1^2(0) = S_0^1(1+u) & \text{tn:llä } 1-p \\ & \nearrow & & \\ S_0^1 & & & \\ & \searrow & & \\ & & S_1^2(1) = S_0^1(1+d) & \text{tn:llä } p. \end{array}$$

Osakkeilla on siis sama alkuarvo: $S_0^2 = S_0^1$. Oletamme vielä, että

$$d \quad < \quad r \quad < \quad \frac{u+d}{2} \quad < \quad u.$$

Tällöin väitteen 2.9 ehto pätee molemmille osakkeille S^1 ja S^2. Valitsemme nyt alkuvarattoman salkun $\pi = (-2S_0^1, 1, 1)$. Nyt tilanteessa $\omega = 1$ käy

$$\begin{aligned} V_1^\pi(1) &= -2S_0^1(1+r) + S_0^1(1+u) + S_0^1(1+d) \\ &= -2S_0^1(1+r) + 2S_0^1\left(1 + \frac{u+d}{2}\right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

ja tilanteessa $\omega = 0$ käy täsmälleen samoin:

$$\begin{aligned} V_1^\pi(0) &= -2S_0^1(1+r) + S_0^1(1+d) + S_0^1(1+u) \\ &= -2S_0^1(1+r) + 2S_0^1\left(1 + \frac{u+d}{2}\right) \\ &= V_1^\pi(1) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Olemme löytäneet arbitraasimahdollisuuden. Syy arbitraasiin on siinä, että osake S^2 on *redundantti* eli pelkistyvä. Sen arvo tiedetään osakkeen S^1 arvon perusteella: kun S^1 menee ylös, niin S^2 menee alas ja päinvastoin. $\diamond$

Seuraavan tuloksen diskontattu negaatio sanoo, että arbitraasivapaus tarkoittaa että voiton mahdollisuutta vastaa aina tappion mahdollisuus.

2.12 Väite. *Hinnoittelumalli* $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *mahdollistaa arbitraasin jos ja vain jos on olemassa sellainen riskisijoitussalkku* $(0, \gamma) \in \{0\} \times \mathbb{R}^d$*, että*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(V_1^{(0,\gamma)} \geq B_1 V_0^{(0,\gamma)}\right) &= 1, \\ \mathbf{P}\left(V_1^{(0,\gamma)} > B_1 V_0^{(0,\gamma)}\right) &> 0. \end{aligned}$$

Todistus. Väite seuraa huomaamalla, että riskisijoitussalkku $(0, \gamma)$ vastaa arbitraasisalkkua (β, γ), missä $\beta = -V_0^{(0,\gamma)}$. $\square$

Odotusarvo ja riskineutraali mitta

Tarkoituksenamme on esittää arbitraasin karakterisointi niin sanotun riskineutraalin todennäköisyysmitan avulla. Tätä varten kertailemme hieman tietoja todennäköisyysteoriasta. Emme valitettavasti voi todistaa kaikkea. Todistukset esitettäneen esimerkiksi kurssilla *Todennäköisyysteoria*.

Olkoon X reaaliarvoinen satunnaismuuttuja mitalliselta avaruudelta $(\Omega, \mathcal{F})$ ja $\mathbf{E}[X] := \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[X]$ sen odotusarvo todennäköisyysmitan $\mathbf{P}$ suhteen. Jos siis F_X on satunnaismuuttujan X kertymäfunktio todennäköisyysmitan $\mathbf{P}$ suhteen, niin odotusarvo $\mathbf{E}[X]$ on *Riemann–Stieltjes-integraali*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \,\mathrm{d}F_X(x) \\ &=: \int_{-\infty}^{\infty} x \, F_X(\mathrm{d}x) \\ &=: \int_{-\infty}^{\infty} x \,\mathbf{P}(X \in \mathrm{d}x). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Riemann–Stieltjes-integraali (2.13) voidaan esittää myös *mittaintegraalina*

$$\mathbf{E}[X] \;=\; \int_\Omega X(\omega)\,\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega).$$

Yleisesti ottaen mikään ei takaa, että odotusarvo on olemassa. Mikäli (2.13) suppenee itseisesti eli $\mathbf{E}[|X|] < \infty$, niin sanomme, että satunnaismuuttuja X on *integroituva* tai $\mathbf{P}$*-integroituva*. Tällöin merkitsemme $X \in L^1(\mathbf{P})$.

Mittaintegraaleja käsitellään kursseilla *Todennäköisyysteoria* sekä *Mitta ja integraali*. Riemann–Stieltjes-integraaleja ei valitettavasti käsitellä millään peruskurssilla. Jos Riemann–Stieltjes- ja mittaintegraalit eivät ole tuttuja, niin ei kannata huolestua. Seuraavan huomautuksen jonkin asteinen ymmärtäminen riittää tämän kurssin tarpeisiin.

2.14 Huomautus. Jos satunnaismuuttujan X arvojoukko on numeroituva $\{x^1, x^2, \ldots\}$, eli X:n jakauma on diskreetti, niin

$$\mathbf{E}[X] \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} x^j p^j, \tag{2.15}$$

missä $p^j = \mathbf{P}(X = x^j)$. Jos taas X:n jakauma on jatkuva, niin

$$\mathbf{E}[X] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.16}$$

missä f_X on X:n tiheysfunktio mitan $\mathbf{P}$ suhteen. Heuristisesti summa (2.15) saadaan Riemann–Stieltjes-integraalista (2.13) tulkitsemalla

$$\mathbf{P}(X \in \mathrm{d}x) \;=\; \begin{cases} p^j, & \text{kun } \mathrm{d}x = x^j, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Kertymäfunktion F_X avulla summa (2.15) saadaan Riemann–Stieltjes-integraalista (2.13) huomaamalla, että

$$\begin{aligned} p^j &= \Delta F_X(x^j) \\ &:= F_X(x^j) - F_X(x^j-) \\ &:= F_X(x^j) - \lim_{x \to x^j-} (x). \end{aligned}$$

Jos X on jatkuvasti jakautunut, niin integraali (2.16) saadaan Riemann–Stieltjes integraalista (2.13) tulkitsemalla

$$\mathbf{P}(X \in \mathrm{d}x) \;=\; \mathrm{d}F_X(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

eli, kun $f_X = F_X'$, niin $f_X \mathrm{d}x = \mathrm{d}F_X$. $\diamond$

Kertaamme odotusarvon perusominaisuuksia apulauseina. Nämä apulauseet ovat kohtalaisen helppo todistaa, jos X ja Y ovat diskreettejä tai jatkuvia satunnaismuuttujia. Yleisen tapauksen todistaminen ei myöskään ole vaikeaa, mutta se vaatii mittateoriaa. Siksi emme todista niitä, vaan viittaamme esimerkiksi kurssiin *Mitta ja integraali*.

2.17 Apulause. *Olkoon* $X, Y \in L^1(\mathbf{P})$*. Tällöin*

(i) $\mathbf{E}[aX + bY] = a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y]$ *kaikilla* $a, b \in \mathbb{R}$*,*

(ii) $\mathbf{E}[c] = c$ *kaikilla* $c \in \mathbb{R}$*,*

(iii) *jos* $X \leq Y$*, niin* $\mathbf{E}[X] \leq \mathbf{E}[Y]$*,*

(iv) *jos* $\mathbf{P}(X \geq 0) = 1$ *ja* $\mathbf{E}[X] = 0$*, niin* $\mathbf{P}(X = 0) = 1$*.*

Seuraava tulos on eräänlainen muuttujanvaihtokaava.

2.18 Apulause. *Olkoon* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *mitallinen funktio ja olkoon* $X = (X^1, \ldots, X^d)$ *sellainen satunnaisvektori, että* $f(X) \in L^1(\mathbf{P})$*. Tällöin*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[f(X)] &:= \int_{\mathbb{R}} y\, \mathbf{P}(f(X) \in \mathrm{d}y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mathbf{P}(X \in \mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Odotusarvon ja raja-arvon tai derivoinnin järjestyksen vaihtaminen voidaan perustella seuraavan tuloksen avulla. Apulausetta 2.19 ehdon (i) vallitessa kutsutaan *monotonisen kovergenssin lauseeksi* ja ehdon (ii) vallitessa *dominoidun konvergenssin lauseeksi*. Ne ovat mittateorian suuria tuloksia. Luonnollisestikaan emme todista niitä. Viittaamme kurssiin *Mitta ja integraali*.

2.19 Apulause. *Olkoon* $X^1, X^2, \ldots$ *jono integroituvia satunnaismuuttujia. Oletamme, että* $X^n \to X^\infty$ *melkein varmasti eli*

$$\mathbf{P}(X^n \to X^\infty) = 1.$$

Tällöin

$$\mathbf{E}[X^n] \to \mathbf{E}[X^\infty],$$

jos jompi kumpi seuraavista ehdoista on täytetty.

(i) *Suppeneminen* $X^n \to X^\infty$ *on monotonista.*

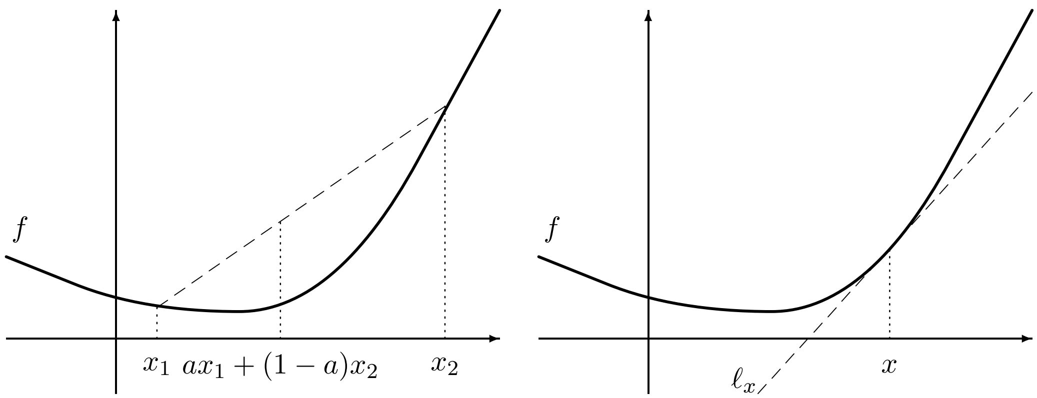
(ii) $|X^n| \leq Y$ *kaikilla* n*, missä* Y *on integroituva.*

Jensenin epäyhtälö on tärkein matematiikan epäyhtälöistä, epäyhtälöä $x^2 \geq 0$ lukuunottamatta. Siksi emme malta olla todistamatta sitä. Tarkastelemme aluksi konvekseja funktioita.

2.20 Määritelmä. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *konveksi*, tai *kovera*, jos

$$f\Big(ax_1 + (1-a)x_2\Big) \quad \leq \quad af(x_1) + (1-a)f(x_2)$$

kaikilla $a \in [0,1]$ ja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.



Konveksin funktion f ehto (vasemmalla) ja kantasuora ℓ_x (oikealla).

Jos funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaksi kertaa derivoituva, niin tällöin se on konveksi jos ja vain jos f'' on positiivinen. Yleisessä tapauksessa konveksin funktion ei tietenkään tarvitse olla kertaakaan derivoituva. Se on kuitenkin aina oikealta ja vasemmalta derivoituva, mikä on hyvin helppo uskoa, eikä edes kovin vaikea todistaa.

2.21 Apulause. *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksi. Tällöin se kaikkien niiden affiinien funktioiden maksimi, jotka ovat sen alapuolella:*

$$f(x) \quad = \quad \max\Big\{\ell(x) \,:\, \ell \textit{ on affiini ja } \ell(y) \leq f(y) \textit{ kaikilla } y \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Todistus. Selvästi

$$f(x) \quad \geq \quad \max\Big\{\ell(x) \,:\, \ell \text{ on affiini ja } \ell(y) \leq f(y) \text{ kaikilla } y \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Koska f on konveksi, niin jokaiselle $x \in \mathbb{R}$ löytyy kantasuora ℓ_x: $f(x) = \ell_x(x)$ ja $\ell_x(y) \leq f(y)$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$. Koska $\ell_x \leq f$, niin

$$\begin{aligned} f(x) &= \ell_x(x) \\ &\leq \max\Big\{\ell(x) \,:\, \ell \text{ on affiini ja } \ell(y) \leq f(y) \text{ kaikilla } y \in \mathbb{R}\Big\}. \end{aligned}$$

Väite on todistettu. $\square$

2.22 Apulause. *Olkoon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *konveksi ja* $X \in L^1(\mathbf{P})$. *Tällöin pätee* Jensenin epäyhtälö

$$\mathbf{E}\Big[f(X)\Big] \quad \geq \quad f\Big(\mathbf{E}[X]\Big)$$

mahdollisesti muodossa $\infty \geq f(\mathbf{E}[X])$.

Todistus. Jos $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on affiini, niin selvästi

$$\mathbf{E}\Big[\ell(X)\Big] \quad = \quad \ell\Big(\mathbf{E}[X]\Big).$$

Siten väite seuraa apulauseesta 2.21. Nimittäin

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big[f(X)\Big] &\geq \max\Big\{\mathbf{E}[\ell(X)] \,:\, \ell \text{ on lineaarinen ja } \ell(y) \leq f(y)\Big\} \\ &= \max\Big\{\ell(\mathbf{E}[X]) \,:\, \ell \text{ on lineaarinen ja } \ell(y) \leq f(y)\Big\} \\ &= f\Big(\mathbf{E}[X]\Big). \end{aligned}$$

Näin väite on todistettu. □

Palaamme takaisin hinnoittelumalleihin.

2.23 Määritelmä. Olkoon $(S, B, \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ hinnoittelumalli. Todennäköisyysmitta $\mathbf{Q}$ avaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$ on *riskineutraali mitta*, jos

$$S_0^i \quad = \quad \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{S_1^i}{B_1}\right], \qquad i = 1, \ldots, d. \tag{2.24}$$

Tässä $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$ tarkoittaa odotusarvoa mitan $\mathbf{Q}$ suhteen:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X] \quad = \quad \int_\Omega X(\omega)\,\mathbf{Q}(\mathrm{d}\omega) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathbf{Q}(X \in \mathrm{d}x).$$

Määritelmä 2.23 sanoo, että osakkeen S^i tämän päivän hinta S_0^i on sen diskontattu keskimääräinen huominen hinta S_1^i, kun sana "keskimääräinen" ymmärretään todennäköisyysmitan $\mathbf{Q}$ mielessä.

2.25 Väite. *Olkoon* $\bar{R}_1^i$ *on osakkeen* S^i diskontattu tuotto *(discounted return) hetkellä* $t = 1$ *eli*

$$\bar{R}_1^i \quad = \quad \frac{S_1^i/B_1 - S_0^i}{S_0^i}.$$

Tällöin määritelmän 2.23 ehto (2.24) on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\bar{R}_1^i\right] \quad = \quad 0.$$

Todistus. Tämä väite seuraa suoralla laskulla. Nimittäin

$$\begin{aligned} S_0^i = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{S_1^i}{B_1}\right] \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{S_1^i}{B_1} - S_0^i\right] \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{S_1^i/B_1 - S_0^i}{S_0^i}\right] \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 = \mathbf{E}_Q\left[\bar{R}_1^i\right]. \end{aligned}$$

Väite on todistettu. □

Huomautus 2.6 johtaa nyt meidät seuraavan käsitteen äärelle.

2.26 Määritelmä. Todennäköisyysmitat $\mathbf{P}$ ja $\mathbf{Q}$ avaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$ ovat *ekvivalentteja*, jos niillä on samat nollajoukot eli kaikille $A \in \mathcal{F}$ pätee

$$\mathbf{P}(A) = 0 \quad \text{jos ja vain jos} \quad \mathbf{Q}(A) = 0.$$

Tällöin merkitsemme $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$.

Seuraava aputulos on *Radon–Nikodym-lause.*

2.27 Apulause. $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$ *jos ja vain jos on olemassa sellainen satunnaismuuttuja* $Z = Z(\mathbf{Q}) > 0$*, että* $\mathbf{E}[F] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[FZ]$ *kaikille satunnaismuuttujille* $F > 0$*. Tällöin merkitsemme*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbf{Q}} \quad := \quad Z.$$

Tämä on mitan $\mathbf{P}$ Radon–Nikodym-derivaatta *mitan* $\mathbf{Q}$ *suhteen.*

Emme todista Radon–Nikodym-lausetta. Sen todistaminen veisi meidät liian syvälle mittateorian tummiin vesiin. Tyydymme vain motivoimaan merkinnän $\mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}\mathbf{Q}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[F] &= \int_\Omega F(\omega)\,\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) \\ &= \int_\Omega F(\omega)\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbf{Q}}(\omega)\mathbf{Q}(\mathrm{d}\omega) \\ &= \int_\Omega F(\omega)Z(\omega)\,\mathbf{Q}(\mathrm{d}\omega) \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[FZ]. \end{aligned}$$

2.28 Esimerkki. (i) Olkoon $\Omega = \{0,1\}$ ja $\mathbf{P}$ sellainen mitta, että

$$p \quad := \quad \mathbf{P}(\{1\}) \quad = \quad 1 - \mathbf{P}(\{0\}).$$

Olkoon vastaavasti $\mathbf{Q}$ sellainen mitta, että

$$q \quad := \quad \mathbf{Q}(\{1\}) \quad = \quad 1 - \mathbf{Q}(\{0\}).$$

Jos $p, q \in (0,1)$, niin mitat $\mathbf{P}$ ja $\mathbf{Q}$ ovat ekvivalentteja ja

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbf{Q}}(\omega) \quad = \quad \begin{cases} \frac{p}{q}, & \text{jos } \omega = 1, \\ \frac{1-p}{1-q}, & \text{jos } \omega = 0. \end{cases}$$

(ii) Jos $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$ ja $p^i := \mathbf{P}(\{i\})$, $q^i := \mathbf{Q}(\{i\})$, niin $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$ jos ja vain jos p^i ja q^i ovat samanaikaisesti nollia kaikilla $i = 1, 2 \ldots$. Tällöin

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbf{Q}}(\omega) \quad = \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p^i}{q^i} \mathbf{1}_{\{i\}}(\omega),$$

missä olemme käyttäneet *indikaattorimerkintää*

$$\mathbf{1}_A(\omega) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{jos } \omega \in A, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

(iii) Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, missä $\mathcal{B}$ on $\mathbb{R}$:n *Borelin σ-algebra*. Olkoon

$$\mathbf{P}(A) \quad = \quad \int_A p(\omega)\,\mathrm{d}\omega \quad \text{ja} \quad \mathbf{Q}(A) \quad = \quad \int_A q(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

eli formaalisti $\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) = p(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ ja $\mathbf{Q}(\mathrm{d}\omega) = q(\omega)\,\mathrm{d}\omega$. Tällöin $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$ jos ja vain jos $p(\omega)/q(\omega) > 0$ melkein kaikilla $\omega \in \mathbb{R}$ ja

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbf{Q}}(\omega) \quad = \quad \frac{p(\omega)\mathrm{d}\omega}{q(\omega)\mathrm{d}\omega} \quad = \quad \frac{p(\omega)}{q(\omega)}.$$

(iv) Olkoon X satunnaismuuttuja avaruudelta $(\Omega, \mathcal{F})$. Olkoon $\mathbf{P}^0$ sellainen todennäköisyysmitta avaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$, että X on $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$-jakautunut. Olkoon $\mathbf{P}^\mu$ vastaavasti sellainen mitta, että X on $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-jakautunut. Siis

$$P^0(\mathrm{d}x) \quad := \quad \mathbf{P}^0(X \in \mathrm{d}x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 \right\} \mathrm{d}x,$$

$$P^\mu(\mathrm{d}x) \quad := \quad \mathbf{P}^\mu(X \in \mathrm{d}x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right\} \mathrm{d}x.$$

Tällöin $\mathbf{P} \sim \mathbf{P}^{\mu}$ ja Radon–Nikodym-derivaatta on

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}^0}{\mathrm{d}\mathbf{P}^{\mu}}(\omega) &= \frac{\mathrm{d}P^0}{\mathrm{d}P^{\mu}}\Big(X(\omega)\Big) \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{X(\omega)}{\sigma}\right)^2\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{X(\omega)-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\Big(X(\omega)^2 - (X(\omega)-\mu)^2\Big)\right\}.
\end{aligned}
$$

$\diamond$

Staattinen I päälause

Seuraava tulos on yhden askeleen versio *rahoitusteorian I päälauseesta* (*fundamental theorem of asset pricing*).

2.29 Lause. *Yhden askeleen hinnoittelumalli* $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *on arbitraasivapaa jos ja vain jos sille on olemassa (*$\mathbf{P}$*:n kanssa) ekvivalentti riskineutraali mitta* $\mathbf{Q}$.

Osoitamme ensin, että ekvivalentin riskineutraalin mitan olemassaolosta seuraa arbitraasivapaus. Todistuksessa käytetty tekniikka on rahoitusteoriassa tyypillinen ja se esiintyy jatkossa eri muodoissa monta kertaa.

Lauseen 2.29 helpomman puolen todistus. Tarkastelemme voiko arbitraasisalkkuja olla olemassa. Olkoon π ehdokas arbitraasisalkuksi. Tällöin sen alkupääoman on oltava nolla eli $\beta = -\sum_{i=1}^{d}\gamma^i S_0^i$ Lisäksi on oltava $\mathbf{P}(V_1^{\pi} \geq 0) = 1$. Koska $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$, niin myös $\mathbf{Q}(V_1^{\pi} \geq 0) = 1$. Käyttämällä mitan $\mathbf{Q}$ riskineutraalia ominaisuutta (2.24) näemme, että

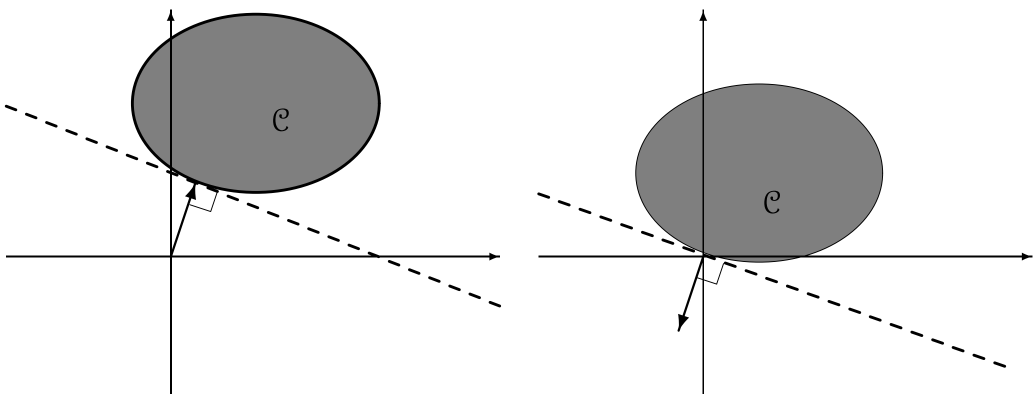
$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[V_1^{\pi}\right] &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\beta B_1 + \sum_{i=1}^{d}\gamma^i S_1^i\right] \\
&= -B_1\sum_{i=1}^{d}\gamma^i S_0^i + \sum_{i=1}^{d}\gamma^i \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[S_1^i\right] \\
&= -B_1\sum_{i=1}^{d}\gamma^i S_0^i + \sum_{i=1}^{d}\gamma^i \cdot B_1 S_0^i \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Koska $\mathbf{Q}(V_1^\pi \geq 0) = 1$ ja $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[V_1^\pi] = 0$, niin $\mathbf{Q}(V_1^\pi = 0) = 1$. Koska $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$, niin myös $\mathbf{P}(V_0^\pi = 0) = 1$. Siten π ei voi olla arbitraasisalkku. $\square$

Siirrymme nyt lauseen 2.29 vaikeamman puolen todistukseen, joka perustuu seuraavaan niin sanottuun *erottavan hypertason lauseeseen*. Todistus, jonka esitämme on kaikkea muuta, kuin konstruktiivinen. Kiinnostunut lukija voi kysyä luennoijalta rakentavamman todistuksen (graduksi).

Jos $x, y \in \mathbb{R}^d$, niin $x \cdot y := \sum_{i=1}^d x^i y^i$ ja $|x| := \sqrt{x \cdot x}$. Joukko $\mathcal{C}$ on *konveksi*, jos $x, y \in \mathcal{C}$ implikoi $ax + (1+a)y \in \mathcal{C}$ kaikilla $a \in [0,1]$.

2.30 Apulause. *Olkoon $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ sellainen epätyhjä ja konveksi joukko, että $0 \notin \mathcal{C}$. Tällöin on olemassa sellainen $y \in \mathbb{R}^d$, että $y \cdot x \geq 0$ kaikilla $x \in \mathcal{C}$ ja $y \cdot x^* > 0$ vähintään yhdellä $x^* \in \mathcal{C}$. Lisäksi, jos $\inf_{x \in \mathcal{C}} |x| > 0$, niin y voimme valita sellaisen y, että $\inf_{x \in \mathcal{C}} y \cdot x > 0$.*



Erottava hypertaso $\{x : y \cdot x = 0\}$ tapauksessa $\inf_{x \in \mathcal{C}} |x| > 0$ (vasemmalla) ja tapauksessa $\inf_{x \in \mathcal{C}} |x| = 0$ (oikealla).

Lauseen 2.29 vaikeamman puolen todistus. Teknisistä mukavuussyistä oletamme, että todennäköisyysmitta $\mathbf{P}$ on sellainen, että osakevektori S on rajoitettu sen suhteen. Tällöin kaikki jatkossa esiintyvät odotusarvot ovat olemassa. Jätämme "rajoittamattoman" tapauksen harjoitustehtäväksi.

Olkoon $\bar{G}^i := \bar{S}_1^i - S_0^i$ osakkeen S^i *diskontattu voitto*. Olkoon γ riskisijoitusstrategia. Nyt arbitraasivapaus voidaan esittää muodossa:

$$\forall \gamma \in \mathbb{R}^d : \mathbf{P}\left(\gamma \cdot \bar{G} \geq 0\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P}\left(\gamma \cdot \bar{G} = 0\right) = 1.$$

Olkoon $\mathcal{Q}$ niiden mitan $\mathbf{P}$ kanssa ekvivalenttien todennäköisyyksien $\mathbf{Q}$ joukko, joille $\mathrm{d}\mathbf{Q}/\mathrm{d}\mathbf{P}$ on rajoitettu. Tämä on konveksi joukko (harjoitustehtävä). Lisäksi nyt $\gamma \cdot \bar{G} \in L^1(\mathbf{Q})$ kaikilla $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$. Siten voimme määritellä

$$\mathcal{C} \quad := \quad \left\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\bar{G}\right] \,:\, \mathbf{Q} \in \mathcal{Q}\right\}.$$

Koska $\mathcal{Q}$ on konveksi, niin myös $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ on konveksi. Tarkoituksemme on nyt osoittaa, että $0 \in \mathcal{C}$, sillä tällöin ekvivalentti riskineutraali mitta $\mathbf{Q}^0$ on alkion $0 \in \mathcal{C}$ (jokin) vastinkappale joukossa $\mathcal{Q}$.

Teemme vastaoletuksen $0 \notin \mathcal{C}$. Tällöin erottavan hypertason lauseen nojalla on olemassa sellainen $\gamma \in \mathbb{R}^d$, että $\gamma \cdot x \geq 0$ kaikilla $x \in \mathcal{C}$ ja $\gamma \cdot x^* > 0$ jollakin $x^* \in \mathcal{C}$. Mutta tämä tarkoittaa, että $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\gamma \cdot \bar{G}] \geq 0$ kaikilla $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$ ja $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*}[\gamma \cdot \bar{G}] > 0$ jollakin $\mathbf{Q}^* \in \mathcal{Q}$. Tästä taas seuraa, että $\mathbf{Q}^*(\gamma \cdot \bar{G} > 0) > 0$ ja siten, koska $\mathbf{Q}^* \sim \mathbf{P}$, niin $\mathbf{P}(\gamma \cdot \bar{G} > 0) > 0$.

Seuraavaksi osoitamme, että $\mathbf{P}(\gamma \cdot \bar{G} \geq 0) = 1$, mikä rikkoo arbitraasivapautta ja siten $0 \in \mathcal{C}$. Olkoon $A := \left\{\gamma \cdot \bar{G} < 0\right\}$ ja

$$Z^n \quad := \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathbf{1}_A + \frac{1}{n}\mathbf{1}_{A^c}.$$

Määrittelemme todennäköisyysmitan $\mathbf{Q}^n$ kaavalla

$$\mathbf{Q}^n(\mathrm{d}\omega) \quad := \quad \frac{Z^n(\omega)}{\mathbf{E}[Z^n]}\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega).$$

Koska $0 < Z^n \leq 1$, niin $\mathbf{Q}^n \in \mathcal{Q}$. Näemme, että

$$0 \quad \leq \quad \gamma \cdot \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^n}[\bar{G}] \quad = \quad \frac{\mathbf{E}\left[(\gamma \cdot \bar{G})Z^n\right]}{\mathbf{E}[Z^n]}.$$

Antamalla n:n kasvaa rajatta ja käyttämällä Lebesguen dominoitua suppenemista näemme tästä, että

$$\mathbf{E}\left[(\gamma \cdot \bar{G})\mathbf{1}_{\left\{\gamma \cdot \bar{G} < 0\right\}}\right] \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \mathbf{E}\left[(\gamma \cdot \bar{G})Z^n\right] \quad \geq \quad 0,$$

mutta tämä on mahdollista vain, jos $\mathbf{P}(\gamma \cdot \bar{G} \geq 0) = 1$. □

Päätämme tämän luvun antamalla geometrisen karakterisoinnin arbitraasivapaudelle. Emme todista sitä, vaan jätämme sen esimerkiksi graduksi.

Olkoon μ todennäköisyysmitta $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$:llä. Tässä siis $\mathcal{B}_d$ on $\mathbb{R}^d$:n avoimien joukkojen ganeroima σ-algebra. Todennäköisyysmitan μ *kantaja* (*support*) supp μ on pienin suljettu $A \subset \mathbb{R}^d$, jolle $\mu(A^c) = 0$ eli

$$\mathrm{supp}\ \mu \quad := \bigcap_{\substack{A \text{ suljettu} \\ \mu(A^c)=0}} A.$$

Konveksin joukon C *suhteellinen sisus* (*relative interior*) ri C on niiden $x \in C$ joukko, joille kaikille $y \in C$ löytyy sellainen $\varepsilon > 0$, että $x - \varepsilon(y-x) \in C$. Joukon A *konveksi verho* (*convex hull*) on

$$\mathrm{conv}\ A \quad := \quad \left\{\sum_{i=1}^n a_i x_i \,:\, x_i \in A, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i = 1, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

2.31 Väite. *Olkoon μ diskontatun osakkeen $\bar{S}$ huomisten hintojen $\bar{S}_1 = (S_1^1/B_1, \ldots, S_1^d/B_1)$ jakauma. Yhden askeleen hinnoittelumalli on arbitraasivapaa jos ja vain jos $S_0 \in \operatorname{ri}\operatorname{conv}\operatorname{supp}\mu$.*

Harjoitustehtäviä lukuun 2

2.1. Osoita, että määritelmä 2.5 on riippumaton numeräärin B valinnasta.

2.2. Olkoon X satunnaismuuttuja avaruudelta $(\Omega, \mathcal{F})$. Olkoon $n, m \in \mathbb{N}$ ja $p, q \in (0,1)$. Olkoon $\mathbf{P}^{n,p}$ sellainen mitta avaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$, että X on $\mathrm{Bin}(n,p)$-jakautunut ja $\mathbf{P}^{m,q}$ sellainen mitta, että X on $\mathrm{Bin}(m,q)$-jakautunut. Osoita, että $\mathbf{P}^{n,p} \sim \mathbf{P}^{m,q}$ jos ja vain jos $n = m$. Laske

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}^{n,p}}{\mathrm{d}\mathbf{P}^{n,q}}.$$

2.3. Olkoon X satunnaismuuttuja avaruudelta $(\Omega, \mathcal{F})$. Olkoon $\mathbf{P}^{\nu,\sigma^2}$ sellainen todennäköisyysmitta avaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$, että X on $\mathrm{N}(\nu, \sigma^2)$-jakautunut. Olkoon $\mathbf{P}^{\mu,\sigma^2}$ vastaavasti sellainen mitta, että X on $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-jakautunut. Osoita, että $\mathbf{P}^{\nu,\sigma^2} \sim \mathbf{P}^{\mu,\sigma^2}$ ja laske

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}^{\nu,\sigma^2}}{\mathrm{d}\mathbf{P}^{\mu,\sigma^2}}.$$

2.4. Olkoon $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ yhden askeleen yhden osakkeen hinnoittelumalli. Olkoon

$$\bar{R}_1 \quad := \quad \frac{S_1/B_1 - S_0}{S_0}$$

osakkeen S diskontattu tuotto. Osoita, että hinnoittelumalli $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ on arbitraasivapaa jos ja vain jos

$$\mathbf{P}(\bar{R}_1 = 0) \quad = \quad 1$$

tai

$$\mathbf{P}(\bar{R}_1 > 0) \quad > \quad 0 \quad \text{ja} \quad \mathbf{P}(\bar{R}_1 < 0) \quad > \quad 0.$$

2.5. Osoita, että mikäli osakkeita on useampia kuin yksi, niin harjoitus 2.4 antaa ainoastaan välttämättömän ehdon arbitraasivapaudelle.

2.6. Osoita, että joukot

$$\begin{aligned}
&\{\mathbf{Q} \,:\, \mathbf{Q} \sim \mathbf{P}\}, \\
&\{\mathbf{Q} \,:\, \mathbf{Q} \sim \mathbf{P}\,, \mathrm{d}\mathbf{Q}/\mathrm{d}\mathbf{P} \text{ rajoitettu }\}, \\
&\{\mathbf{Q} \,:\, \mathbf{Q} \sim \mathbf{P} \text{ riskineutraali }\}, \\
&\{\mathbf{Q} \,:\, \mathbf{Q} \sim \mathbf{P} \text{ riskineutraali }, \mathrm{d}\mathbf{Q}/\mathrm{d}\mathbf{P} \text{ rajoitettu }\}
\end{aligned}$$

ovat konvekseja

2.7. Paikkaa lauseen 2.29 vaikeamman puolen todistuksen aukko: oletus siitä, että S on $\mathbf{P}$-rajoitettu.

2.8. Osoita, että lauseessa 2.29 voimme valita sellaisen ekvivalentin riskineutraalin mitan $\mathbf{Q}$, että $\mathrm{d}\mathbf{Q}/\mathrm{d}\mathbf{P}$ on rajoitettu.

2.9. Olkoon kassavirta (eli kori) V koottu kassavirroista $V^1, \ldots, V^n$ painoilla a^i, $i = 1, \ldots, n$ eli $V = \sum_{i=1}^n a^i V^i$. Olkoon $R_1(V)$ korin V tuotto eli $R_1(V) = (V_1 - V_0)/V_0$. Osoita, että

$$R_1(V) \quad = \quad \sum_{i=1}^n b^i R_1(V^i), \qquad \text{missä} \quad b^i \quad = \quad \frac{a^i V_0^i}{\sum_{j=1}^n a^j V_0^j}.$$

2.10. Olkoon V jokin kassavirta arbitraasivapaassa yhden askeleen mallissa. Olkoon $\mathbf{Q}$ mallin jokin ekvivalentti riskineutraali mitta. Osoita, että

(a) $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[R_1(V)] = r$, missä r on mallin korko,

(b) Olkoon $\tilde{\mathbf{P}} \sim \mathbf{P}$ sellainen mitta, että $S \in L^1(\tilde{\mathbf{P}})$. Osoita, että

$$\mathbf{E}^{\tilde{\mathbf{P}}}\left[R_1(V)\right] \quad = \quad r - \mathbf{Cov}^{\tilde{\mathbf{P}}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{P}}}, R_1(V)\right].$$

2.11. Todista arbitraasivapauden geometrinen karakterisointi 2.31 yhden osakkeen tapauksessa. Mitä ovat tällöin $\operatorname{conv}\operatorname{supp}\mu$ ja $\operatorname{ri}\operatorname{conv}\operatorname{supp}\mu$?

Luku 3

Johdannaisten oikeat hinnat

> Clearly the price considered most likely by the market is the true current price: if the market judged otherwise, it would quote not this price, but another price higher or lower. — Louis Bachelier

Osto- ja myyntihinnat

Metamääritelmä. Satunnaismuuttuja on *[rajoitettu]*, jos kaikki relevantit odotusarvot ovat olemassa.

3.1 Määritelmä. Olkoon $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ yhden askeleen hinnoittelumalli. *Ehdollinen vaade* (*contingent claim*) on [rajoitettu] satunnaismuuttuja avaruudelta $(\Omega, \mathcal{F})$. *Johdannainen* (*derivative*) on [rajoitettu] satunnaismuuttuja F avaruudelta $(\Omega, \mathcal{F})$, joka voidaan esittää osakkeiden huomisten hintojen $S_1^1, \ldots, S_1^d$ funktiona: $F(\omega) = f(S_1^1(\omega), \ldots, S_1^d(\omega))$.

Optio ja johdannainen tarkoittavat tällä kurssilla samaa. Ehdollinen vaade on periaatteessa yleisempi käsite kuin johdannainen. Kuitenkin, jos mallimme kaikki satunnaisuus tulee osakkeista eli $\mathcal{F} = \sigma(S_1)$, niin kaikki ehdolliset vaateet ovat johdannaisia. Itse asiassa ehto F on $\sigma(S_1)$-mitallinen tarkoittaa, että $F = f(S_1)$ jollekin deterministiselle funktiolle $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Ehdollisen vaateen F hinta määritellään arbitraasivapauden avulla tulkitsemalla F uudeksi osakkeeksi. Vaateen hinta on liian korkea tai matala, jos se mahdollistaa arbitraasin.

3.2 Määritelmä. Olkoon $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ yhden askeleen ja d:n osakkeen arbitraasivapaa hinnoittelumalli. Hinta c on ehdollisen vaateen F *arbitraasivapaa hinta*, jos laajennettu $(d+1)$:n osakkeen hinnoittelumalli $(B, (S, S^{d+1}), \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ on arbitraasivapaa. Tässä osake S^{d+1} on rakennettu ehdollisesta vaateesta F ja sen hinnasta c:

$$S_0^{d+1} \;=\; c \qquad \text{ja} \qquad S_1^{d+1} \;=\; F.$$

Mikään ei takaa, että arbitraasivapaa hinta c on yksikäsitteinen. Itse asiassa tyypillisesti se ei ole.

3.3 Määritelmä. Ehdollisen vaateen F arbitraasivapaiden hintojen joukolle käytämme merkintää $C(F)$. Ehdollisen vaateen F *ostohinta* on

$$c^-(F) \;:=\; \inf C(F).$$

Vastaavasti F:n *myyntihinta* on

$$c^+(F) \;:=\; \sup C(F).$$

3.4 Esimerkki. Tarkastelemme korotonta hinnoittelumallia

$$\begin{array}{ccccll} & & & & S_1(3) = S_0(1+u) & \text{tn:llä } p_3 \\ & & & \nearrow & & \\ S_0 & \longrightarrow & S_1(\omega) & \rightarrow & S_1(2) = S_0 & \text{tn:llä } 1-(p_1+p_3) \\ & & & \searrow & & \\ & & & & S_1(1) = S_0(1+d) & \text{tn:llä } p_1. \end{array}$$

Siis $\Omega = \{\text{“alas”}, \text{“ei muutosta”}, \text{“ylös”}\} = \{1,2,3\}$. Olkoon $d < 0 < u$, jolloin malli on väitteen 2.9 nojalla arbitraasivapaa.

Olkoon F *digitaalioptio*, joka antaa haltijalleen yhden euron, jos maailmantila $\omega = 3 =$ “ylös” toteutuu eli

$$F(\omega) \;=\; \mathbf{1}_{\{3\}}(\omega) \;=\; \mathbf{1}_{\{S_0(1+u)\}}(S_1(\omega))$$

Etsimme arbitraasivpaiden hintojen joukon $C(F)$. Hinta $c = 0$ on liian halpa ja $c = 1$ on liian kallis (harjoitustehtävä). Olkoon siis $c \in (0,1)$ ja $\pi = (\beta, \gamma, \eta)$ alkuvaraton salkku:

$$\beta + \gamma S_0 + \eta c \;=\; 0.$$

Tässä η on digitaalioptioiden lukumäärä.

Tarkastelemme mitä käy eri maailmantiloissa. Jos $\omega = 2 =$ “ei muutosta”, niin digitaalioptioon sijoitettu omaisuus on arvoton ja varallisuutemme on

$$V_1^\pi(2) \;=\; \beta + \gamma S_0 \;=\; -\eta c.$$

Siispä, jotta π olisi arbitraasisalkku, $\eta \leq 0$. Jos $\omega = 1 =$ “alas”, niin digitaalioptio on edelleen arvoton ja

$$V_1^\pi(1) \;=\; \beta + \gamma S_0(1+d).$$

Saamme ehdon

$$\eta \quad \leq \quad \frac{\gamma S_0 d}{c}.$$

Olkoon sitten $\omega = 3 =$ "ylös". Tällöin digitaalioptio on käyttökelpoinen ja

$$V_1^\pi(3) \quad = \quad \beta + \gamma S_0(1+u) + \eta.$$

Tästä saamme ehdon

$$\eta \quad \geq \quad -\frac{\gamma S_0 u}{1-c}.$$

Siispä

$$-\frac{\gamma S_0 u}{1-c} \quad \leq \quad \eta \quad \leq \quad \frac{\gamma S_0 d}{c}.$$

Erityisesti on siis oltava $\gamma \geq 0$. Jos $\gamma > 0$, niin huomaamme, että on oltava

$$u \quad \geq \quad \frac{c-1}{c} d.$$

Ratkaisemalla c:n suhteen saamme alarajan

$$c \quad \geq \quad \frac{-d}{u-d}$$

Jos taas $\gamma = 0$, niin on helppo nähdä, että myös $\beta = \eta = 0$, emmekä voi tehdä arbitraasia. Siten siis arbitraasivapaiden hintojen joukko on

$$C(F) \quad \supset \quad \left(0, \frac{-d}{u-d}\right).$$

Jätämme harjoitustehtäväksi osoittaa, että tämä inkluusio on yhtälö. $\diamond$

Esimerkistä 3.4 näemme, että määritelmän perusteella arbitraasivapaiden hintojen löytäminen on tuskallista. Käytäntöön tuo helpotusta se, että ekvivalentit martingaalimitat ovat *hinnoittelijoita*.

3.5 Lause. *Olkoon $\mathcal{Q}$ hinnoittelumallin $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ekvivalenttien riskineutraalien mittojen joukko ja F [rajoitettu] ehdollinen vaade. Tällöin*

$$C(F) \quad = \quad \left\{ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{F}{B_1}\right] \;:\; \mathbf{Q} \in \mathcal{Q} \text{ ja } F \in L^1(\mathbf{Q}) \right\}. \tag{3.6}$$

Lisäksi osto- ja myyntihinnat saadaan kaavoista

$$c^-(F) \quad = \quad \inf_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{F}{B_1}\right] \qquad \text{ja} \qquad c^+(F) \quad = \quad \sup_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{F}{B_1}\right].$$

Todistus. Lauseen 2.29 nojalla c on ehdollisen vaateen F arbitraasivapaa hinta jos ja vain jos on olemassa sellainen $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$, että

$$c = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{F}{B_1}\right] \quad \text{ja} \quad S_0^i = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{S_1^i}{B_1}\right]$$

kaikilla $i = 1, \ldots, d$. Mutta jo jälkimmäinen ehto takaa, että $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$. Siten inkluusio $\subset$ kaavassa (3.6) on selvä. Olettakaamme sitten kääntäen, että

$$c = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{F}{B_1}\right]$$

jollekin $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$. Tällöin $\mathbf{Q}$ on ekvivalentti riskineutraali myös laajennetulle hinnoittelumallille. Inkluusio $\supset$ kaavassa (3.6) seuraa tästä.

Osto- ja myyntihinnat seuraavat kaavasta (3.6) jos vain voimme olettaa, että $F \in L^1(\mathbf{Q})$ kaikilla $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$. Mutta [rajoitettu] tarkoittaa juuri tätä. □

Seuraava väite on *ylisuojausdualiteetti* (*superhedging duality*). Se myös perustelee nimitykset osto- ja myyntihinta.

3.7 Väite. *Arbitraasivapaassa hinntoittelumallissa*

$$\begin{aligned} c^-(F) &= \sup\left\{c \in \mathbb{R} : \exists \pi \in \mathbb{R}^{1+d}, c = V_0^\pi \textit{ ja } V_1^\pi \leq F\right\}, \\ c^+(F) &= \inf\left\{c \in \mathbb{R} : \exists \pi \in \mathbb{R}^{1+d}, c = V_0^\pi \textit{ ja } V_1^\pi \geq F\right\}. \end{aligned}$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

3.8 Esimerkki. Palaamme esimerkkiin 3.4 lauseen 3.5 voimalla. Olkoon

$$q := \mathbf{Q}(\{3\}), \qquad 1 - (q + \delta) := \mathbf{Q}(\{2\}) \qquad \text{ja} \qquad \delta := \mathbf{Q}(\{1\}),$$

missä $q \in (0, 1)$ on mielivaltainen ja $\delta \in (0, 1)$ sellainen, että $q + \delta < 1$. Tällöin $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$. Nyt ehto sille, että $\mathbf{Q}$ on riskineutraali mitta on

$$S_0(1 + u)q + S_0(1 - (q + \delta)) + S_0(1 + d)\delta = S_0.$$

Siis, kun q on mielivaltainen, niin $\delta = -(uq)/d > 0$. Ehdosta $q + \delta < 1$ saamme ylärajan q:lle:

$$1 > q + \delta = q - \frac{uq}{d} = q\frac{d - u}{d} \quad \Longrightarrow \quad q < \frac{-d}{u - d}.$$

Digitaalioption F oikea hinta on sen odotusarvo mitan $\mathbf{Q}$ suhteen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[F] &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\mathbf{1}_{\{S_1 = S_0(1+u)\}}\right] \\ &= \mathbf{Q}\Big(S_1 = S_0(1 + u)\Big) \\ &= q. \end{aligned}$$

Koska $q \in (0, -d/(u-d))$ oli vapaa parametri, niin

$$C(F) \quad = \quad \left(0, \frac{-d}{u-d}\right).$$

$\diamond$

Täydellisyys

3.9 Määritelmä. Olkoon $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ yhden askeleen hinnoittelumalli. Ehdollinen vaade F on *toistettavissa* tai *suojattavissa* (*replicable, attainable, redundant*), jos on olemassa salkku $\pi = (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{1+d}$, jolle

$$F \quad = \quad V_1^\pi \quad := \quad \beta B_1 + \sum_{i=1}^{d} \gamma^i S_1^i.$$

Tämä π vaateen F *toisto- tai suojaussalkku* (*replicating portfolio*, *hedging portfolio*). Mikäli kaikki [rajoitetut] ehdolliset vaateet ovat suojattavissa, niin hinnoittelumalli on *täydellinen* (*complete*).

Periaatteessa täydellisyys ja arbitraasivapaus ovat toisistaan riippumattomia käsitteitä. Kuitenkin, jos mallissa on arbitraasia, niin toistoargumentit ovat hieman erikoisia. Nimittäin arbitraasimalleissa löydämme sellaisen salkun $\hat{\pi}$, että $V_0^{\hat{\pi}} < 0$ ja $V_1^{\hat{\pi}} \geq 0$. Tällöin, jos π on vaateen F suojaussalkku, niin $\pi + \hat{\pi}$ on vaateen F ylisuojaussalkku, mutta $V_0^{\pi+\hat{\pi}} < V_0^\pi$. Vaade F voidaan siis ylisuojata mielivaltaisen pienellä negatiivisella alkupääomalla. Tästä syystä tarkastelemme täydellisyyttä vain arbitraasivapaissa hinnoittelumalleissa.

Arbitraasivapaissa malleissa toistettavien vaateiden hinta on toistosalkun alkupääoma, jos tämä alkupääoma on yksikäsitteinen.

3.10 Väite. *Olkoon* $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *arbitraasivapaa yhden askeleen hinnoittelumalli ja* F *[rajoitettu] ehdollinen vaade.*

(i) *Jos* F *on toistettavissa, niin* $C(F)$ *on yksiö, jonka ainoa alkio on* V_0^π*, missä* π *on vaateen* F *toistava salkku.*

(ii) *Jos* F *ei ole toistettavissa, niin* $C(F)$ *on avoin väli* $(\,c^-(F), c^+(F)\,)$.

Väitteen 3.10 kohdan (i) toditus. Olettakaamme, että F voidaan toistaa. Olkoon $\pi = (\beta, \gamma)$ jokin vaateen F toistavista salkuista. Nyt pääoma V_0^π

on sama kaikilla toistosalkuilla π. Nimittäin

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{F}{B_1}\right] &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{V_1^\pi}{B_1}\right] \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\beta B_0 + \sum_{i=1}^{d} \gamma^i \frac{S_1^i}{B_1}\right] \\
&= \beta B_0 + \sum_{i=1}^{\mathrm{d}} \gamma^i \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{S_1^i}{B_1}\right] \\
&= \beta B_0 + \sum_{i=1}^{\mathrm{d}} \gamma^i S_0^i \\
&= V_0^\pi.
\end{aligned}$$

Näemme myös, että $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[F/B_1] = V_0^\pi$ on riippumaton mitasta $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$. Väite seuraa siten lauseesta 3.5. □

Ekvivalenttien riskineutraalien mittojen joukko on konveksi. Siten joukko $C(F)$ on joko tyhjä tai väli. Väitteen 3.10 kohta (ii) sanoo, että se on avoin väli. Tämän todistaminen vaatii *Hahn–Banach-lausetta* (joka on erottavan hypertason lauseen yleistys).

3.11 Apulause. *Olkoon $\mathcal{V}$ jonkin normiavaruuden E suljettu konveksi osajoukko ja $x \notin \mathcal{V}$. Tällöin on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen fnktionaali $\ell : E \to \mathbb{R}$, että $\sup_{v\in\mathcal{V}} \ell(v) < \ell(x)$.*

Väitteen 3.10 kohdan (ii) toditus. Osoitamme, että jokaiselle $c \in C(F)$ löytyy sellaiset $c^*, c_* \in C(F)$, että $c_* < c < c^*$. Olkoon

$$c = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{F}{B_1}\right].$$

Olkoon $\mathcal{V} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$ saavutettavien vaateiden joukko. Selvästi $\mathcal{V}$ on suljettu aliavaruus. Koska $F \notin \mathcal{V}$, niin Hahn–Banach-lauseen nojalla löydämme sellaisen jatkuvan lineaarisen funktionaalin ℓ, että

$$\sup_{V\in\mathcal{V}} \ell(V) < \ell(F).$$

Koska $\mathcal{V}$ on vektoriavaruus, niin tästä seuraa, että $\ell(V) = 0$ kaikilla $V \in \mathcal{V}$. Nyt revimme hihasta funktionaalianalyyttisen totuuden: ℓ voidaan tulkita integraaliksi

$$\ell(F) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[FZ]$$

jollekin $Z = Z(\ell) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$. Normeeraamalla funktionaalia ℓ voimme olettaa, että $\|Z\|_\infty \leq 1/2$. Nyt voimme asettaa

$$\mathbf{P}^*(\mathrm{d}\omega) \quad := \quad (1 + Z(\omega))\,\mathbf{Q}(\mathrm{d}\omega).$$

Tällöin $\mathbf{P}^* \sim \mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ ja $\mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[V] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[V]$ kaikilla $V \in \mathcal{V}$. Koska $1 \in \mathcal{V}$ näemme, että $\mathbf{P}^*$ on todennäköisyysmitta. Valitsemalla $V = S^i$ näemme, että $\mathbf{P}^* \in \mathcal{Q}$. Lisäksi

$$c^* \quad := \quad \mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}\left[\frac{F}{B_1}\right] \quad = \quad \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}^*}[F] + \ell(F)}{B_1} \quad > \quad \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{F}{B_1}\right] \quad = \quad c$$

eli $c^* > c$ on F:n arbitraasivapaa hinta. Tekemälle samat temput kuin edellä, mutta asettamalla

$$\mathbf{P}^*(\mathrm{d}\omega) \quad := \quad (1 - Z(\omega))\,\mathbf{Q}(\mathrm{d}\omega)$$

löydämme F:lle c:tä pienemmän arbitraasivapaan hinnan. $\square$

3.12 Esimerkki. Tarkastelemme yhden osakkeen ja kahden tilan hinnoittelumallia eli korollista keskeistä lelumallia. Olkoon korko $r > -1$, $S_0 > 0$ vakio ja S_1 satunnaismuuttuja

$$\begin{array}{ccccll}
 & & & & S_1(1) = S_0(1+u) & \text{tn:llä } p \\
 & & & \nearrow & & \\
S_0 & \longrightarrow & S_1(\omega) & & & \\
 & & & \searrow & & \\
 & & & & S_1(0) = S_0(1+d) & \text{tn:llä } 1-p.
\end{array}$$

Olkoon $p \in (0,1)$ ja $d < u$. Nyt jokainen ehdollinen vaade F on toistettavissa. Nimittäin meidän tulee vain ratkaista painot β ja γ yhtälöparista

$$\begin{aligned}
\beta B_1 + \gamma S_1(1) &= F(1), \\
\beta B_1 + \gamma S_1(0) &= F(0).
\end{aligned}$$

Saamme

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{F(1) - F(0)}{S_1(1) - S_1(0)} \\
&= \frac{F(1) - F(0)}{S_0(u-d)}, \\
\beta &= \frac{1}{B_1}\left(F(0) - \frac{S_1(0)}{S_1(1) - S_1(0)}\Big(F(1) - F(0)\Big)\right) \\
&= \frac{1}{1+r}\left(F(0) - \frac{1+d}{u-d}\Big(F(1) - F(0)\Big)\right).
\end{aligned}$$

Jos $d < r < u$, niin hinnoittelumalli on arbitraasivapaa ja ekvivalentteja riskineutraaleja mittoja on vain yksi, joka määräytyy kaavasta

$$q \quad := \quad \mathbf{Q}(\{1\}) \quad = \quad \frac{r-d}{u-d}.$$

Nimittäin

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{S_1}{B_1}\right] = S_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{S_0(1+u)}{1+r}q + \frac{S_0(1+d)}{1+r}(1+q) = S_0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1+u}{1+r}q + \frac{1+d}{1+r}(1-q) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad q = \frac{r-d}{u-d}.
\end{aligned}$$

Tällöin vaateen F toistohinta on

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{F}{1+r}\right] \quad &= \quad \frac{F(1)}{1+r}q + \frac{F(0)}{1+r}(1-q) \\
&= \quad \frac{F(1)}{1+r}\frac{r-d}{u-d} + \frac{F(0)}{1+r}\frac{u-r}{u-d} \\
&= \quad \frac{1}{1+r}\frac{F(1)(r-d) + F(0)(u-r) - (1+r)(F(1)-F(0))}{u-d} \\
&\qquad + \frac{F(1)-F(0)}{u-d} \\
&= \quad \frac{1}{1+r}\frac{F(0)(u+1) - F(1)(1+d)}{u-d} + \frac{F(1)-F(0)}{u-d} \\
&= \quad \frac{1}{1+r}\left(F(0) - \frac{1+d}{u-d}\Big(F(1)-F(0)\Big)\right) + \frac{F(1)-F(0)}{u-d} \\
&= \quad \frac{1}{1+r}\left(F(0) - \frac{1+d}{u-d}\Big(F(1)-F(0)\Big)\right)B_0 + \frac{F(1)-F(0)}{S_0(u-d)}S_0 \\
&= \quad \beta B_0 + \gamma S_0.
\end{aligned}$$

Tulos saatiin pakottamalla osakkeiden paino

$$\gamma \quad = \quad \frac{F(1)-F(0)}{S_0(u-d)}$$

esiin. Huomattavaa on myös, että toiston alkuvarallisuudelle pätee aina

$$\frac{F(1)}{1+r}q + \frac{F(0)}{1+r}(1-q) \quad = \quad \beta B_0 + \gamma S_0,$$

missä $q = (r-d)/(u-d)$. Ei siis tarvitse olettaa, että $q \in (0,1)$. Erityisesti $q \in (0,1)$ jos ja vain jos $d < r < u$ eli mallimme on arbitraasivapaa. $\diamond$

Staattinen II päälause

Olkoon $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ kaikkien $\mathbf{P}$-melkein varmasti äärellisten satunnaismuuttujien muodostama vektoriavaruus. Olkoon $\mathcal{V}$ yhden askeleen hinnoittelumallin $(B,S,\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ toistettavien [rajoitettujen] vaateiden joukko. Siis

$$\mathcal{V} \;=\; \left\{V_1^\pi \,:\, \pi\in\mathbb{R}^{1+d}\right\}.$$

Tällöin jos $\mathbf{Q}$ on ekvivalentti riskineutraali mitta, niin

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &\subset L^0(\Omega,\sigma(S),\mathbf{Q})\\ &\subset L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{Q})\\ &= L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P}).\end{aligned}$$

Jos hinnoittelumalli on täydellinen, niin tällöin yllä olevat inkluusiot ovat yhtälöitä. Erityisesti tällöin $\sigma(S)=\mathcal{F}$. Koska $\mathcal{V}$ on äärellisulotteinen, niin myös avaruuden $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ on täydellisessä tilanteessa oltava äärellisulotteinen. Tämä tarkoittaa, että satunnaisuus redusoituu "olennaisesti äärelliseen" määrään mahdollisia skenaarioita. Täsmällinen matemaattinen määrittely tälle saadaan käyttämällä atomin käsitettä.

3.13 Määritelmä. Olkoon $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ todennäköisyysavaruus. Tapahtuma $A\in\mathcal{F}$ on *atomi*, jos

(i) $\mathbf{P}(A)>0$,

(ii) jos $B\in\mathcal{F}$ ja $B\subset A$, niin joko $\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(A)$ tai $\mathbf{P}(B)=0$.

Seuraava tulos sitoo atomit satunnaismuuttujien avaruuden dimensioon. Siinä $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ on niiden satunnaismuuttujien $X\in L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ avaruus, joille $\mathbf{E}[|X|^p]<\infty$, kun $p\in(0,\infty)$. Avaruuteen $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ kuuluu oleellisesti rajoitetut satunnaismuuttujat. Jokainen $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$, $p\in[0,\infty]$, on lineaarinen. Lisäksi $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})\subset L^q(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$, kun $p\geq q$.

3.14 Apulause. *Kaikille* $p\in[0,\infty]$

$$\begin{aligned}&\dim L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})\\ &= \sup\left\{n\in\mathbb{N}\,:\,\exists\ \textit{ositus}\ A^1,\dots,A^n,\ \textit{missä}\ \mathbf{P}(A^i)>0\,\forall\, i\right\}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Erityisesti dimensio $\dim L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ *ei riipu luvusta* p.

Todistus. Jos $A^1,\dots,A^n$ on Ω:n ositus, niin indikaattorit $\mathbf{1}_{A^1},\dots,\mathbf{1}_{A^n}$ ovat lineaarisesti riippumattomia avaruudessa $L^p:=L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$. Siten $\dim L^p\geq n$. Täten riittää tarkastella tilannetta, missä kaavan (3.15) oikea puoli on äärellinen luku n_0. Jos $A^1, \ldots, A^{n_0}$ on lukua n_0 vastaava Ω:n ositus, niin jokainen A^i on atomi, koska muuten n_0 ei ole maksimaalinen. Siten $Z \in L^p$ on vakio atomien A^i sisällä: $Z(\omega) = z^i$, kun $\omega \in A^i$. Niinpä

$$Z = \sum_{i=1}^{n_0} z^i \mathbf{1}_{A^i}.$$

Mutta tämä tarkoittaa, että indikaattorit $\mathbf{1}_{A^1}, \ldots, \mathbf{1}_{A^{n_0}}$ muodostavat avaruuden L^p kannan. Siispä $\dim L^p = n_0$. □

Rahoitusteorian II päälause karakterisoi arbitraasivapaan hinnoittelumallin täydellisyyden riskineutraalien mittojen avulla.

3.16 Lause. *Arbitraasivapaa yhden askeleen hinnoittelumalli* $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *on täydellinen jos ja vain jos sillä on vain yksi riskineutraali mitta. Tällöin* $\dim L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \le d + 1$.

Todistus. Jos hinnoittelumalli on täydellinen, niin indikaattori $\mathbf{1}_A$ voidaan suojata kaikilla $A \in \mathcal{F}$. Väitteen 3.10 nojalla sen suojaushinta

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{\mathbf{1}_A}{B_1}\right] = \frac{1}{B_1}\mathbf{Q}(A)$$

on riippumaton mitasta $\mathbf{Q}$. Siten mittoja $\mathbf{Q} \in \mathcal{Q}$ on vain yksi.

Olettakaamme sitten, että $\mathcal{Q} = \{\mathbf{Q}\}$. Olkoon F rajoitettu ehdollinen vaade. Tällöin F:llä on yksikäsitteinen arbitraasivapaa hinta

$$c = \frac{1}{B_1}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[F]$$

ja väitteen 3.10 nojalla F on toistettavissa. Niinpä $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \subset \mathcal{V}$. Erityisesti siis $\dim L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \le \dim \mathcal{V} \le d + 1$ ja apulauseen 3.14 nojalla avaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ on korkeintaan $d + 1$ atomia. Siten kaikki ehdolliset vaateet ovat rajoitettuja ja toistettavissa. □

Seuraava huomautus kertoo, mitä täydellisyys ja arbitraasivapaus tarkoittaa käytännössä yhden askeleen hinnoittelumalleissa.

3.17 Huomautus. d:n osakkeen hinnoittelumalli $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ on täydellinen vain jos $\Omega = \{1, \ldots, m\}$, missä $m \le d + 1$. Jos osakkeet ovat pelkistymättömiä, niin hinnoittelumalli on arbitraasivapaa vain jos $d + 1 \le m$ (tämän perustelemisen jätämme harjoitustehtäväksi). Täydellisessä arbitraasivapaassa mallissa siis $d + 1 = m$. Tällöin ehdollisen vaateen $F : \Omega \to \mathbb{R}$

suojaus saadaan ratkaisemalla muuttujat $\beta, \gamma^1, \ldots, \gamma^d$ lineaarisesta yhtälöryhmästä

$$\beta B_1 + \sum_{i=1}^{d} \gamma^i S_1^i(j) \quad = \quad F(j), \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{3.18}$$

Lisäksi vaateen F arbitraasivapaa hinta on

$$\beta + \sum_{i=1}^{d} \gamma^i S_0^i.$$

Ekvivalentti riskineutraali mitta $\mathbf{Q}$ määräytyy alkeistapahtumien j todennäköisyyksistä q^j, $j = 1, \ldots, m$, missä q^j on digitaalioption $\mathbf{1}_{\{j\}}$ suojaukseen tarvittava alkupääoma. Mikäli arbitraasivapaa hinnoittelumalli ei ole täydellinen, niin ekvivalentteja riskineutraaleja mittoja on useita. Tämä näkyy yhtälöryhmässä (3.18) niin, että ratkaisu $\beta, \gamma^1, \ldots, \gamma^d$ ei ole yksikäsitteinen, koska $d + 1 < m$. ◇

Optioiden käyttötarkoituksia

Seuraava esimerkki kertoo, miten osto-optioita voidaan käyttää muuttamaan varallisuusprofiilia.

3.19 Esimerkki. Tarkastelemme riskisijoitussalkkua $\pi = (0, \gamma)$, missä kertoimet γ^i ovat positiivisia. Hetkellä T varallisuutemme on positiivinen

$$V_T^\pi \quad = \quad \sum_{i=1}^{d} \gamma^i S_T^i.$$

Haluamme herkistää varallisuutemme osakkeiden hintojen nousulle ja vastaavasti tehdä siitä vähemmän herkän hintojen laskulle eli haluamme muuttaa profiilin V_T^π profiiliksi $h(V_T^\pi)$, missä h on konveksi ja kasvava. Jos markkinoilla on myytävänä johdannainen $H = h(V_T^\pi)$, niin voimme luopua salkustamme ja ostaa tämän johdannaisen. Tyypillisesti tällaista johdannaista ei kuitenkaan ole markkinoilla. Voimme kuitenkin rakentaa sen osto-optioilla ja pankkitilillä. Tätä menetelmää kutsutaan *salkkuvakuutukseksi* (*portfolio insurance*). Oletamme yksinkertaisuuden vuoksi, että h on sileä. Tällöin

$$h(x) \quad = \quad h(0) + \int_0^x h'(y)\,\mathrm{d}y,$$

missä h' on posiviivinen ja kasvava. Jatkamalla derivointia ja vaihtamalla integrointijärjestystä saamme

$$\begin{aligned}
h(x) &= h(0) + \int_0^x h'(y)\,\mathrm{d}y \\
&= h(0) + \int_0^x \left\{ h'(0) + \int_0^y h''(z)\,\mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}y \\
&= h(0) + h'(0)x + \int_0^x \left\{ \int_0^y h''(z)\,\mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}y \\
&= h(0) + h'(0)x + \int_0^x \left\{ \int_z^x \mathrm{d}y \right\} h''(z)\,\mathrm{d}z \\
&= h(0) + h'(0)x + \int_0^x (x-z)h''(z)\,\mathrm{d}z \\
&= h(0) + h'(0)x + \int_0^\infty (x-z)^+ h''(z)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Profiili $h(V_T^\pi)$ saadaan siis pankkitalletuksesta, osakekorista ja osakekorin osto-optioista $(V_T^\pi - z)$, $z > 0$, kaavalla

$$h(V_T^\pi) \;=\; h(0) + h'(0)V_T^\pi + \int_0^\infty (V_T^\pi - z)h''(z)\,\mathrm{d}z.$$

Käytännössä tämä integraali joudutaan tietysti approksimoimaan summalla, sillä osto-optioita voi ostaa vain äärellisen monella eri lunastushinnalla z. $\diamond$

Esimerkki 3.19 antaa kasvavan konveksin positiivisen johdannaisen $H = h(S_T)$ hinnan, kun osto-optioiden $(S_T - z)$ hinnat $c^{\mathrm{call}}(z)$ on annettu. Nimittäin lineaarisuuden nojalla

$$c^H \;=\; h(0) + h'(0)S_0 + \int_0^\infty c^{\mathrm{call}}(z)h''(z)\,\mathrm{d}z.$$

Tässä emme käyttäneet arbitraasiargumenttia. Hinta c^H on toki H:n arbitraasivapaa hinta, jos $c^{\mathrm{call}}(z)$:t ovat arbitraasivapaita hintoja.

Optioita voidaan käyttää myös tuoton ja riskin säätämiseen. Seuraava esimerkki kuvaa option *vipuvoimaa* (*leverage*) ja riskin pienentämistä.

3.20 Esimerkki. Tarkastelemme keskeistä lelumallia

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & S_1(1) = 120 \\
 & & & \nearrow & \\
S_0 = 100 & \longrightarrow & S_1(\omega) & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & S_1(0) = 90.
\end{array}$$

Tämä malli on arbitraasivapaa ja riskineutraali mitta karakterisoituu luvusta

$$q \quad := \quad \mathbf{Q}(S_1 = 120) \quad = \quad \frac{-(-10)}{20-(-10)} \quad = \quad \frac{1}{3}$$

Nyt osakkeen S tuotto $R_1 = (S_1 - 100)/100$ on

$$R_1 \quad = \quad \begin{cases} \mathbf{20}\,\%, & \text{jos } S_1 = 120, \\ -\mathbf{10}\,\%, & \text{jos } S_1 = 90. \end{cases}$$

Olkoon F osto-optio $(S_1 - 100)^+$. Arbitraasivapaaksi toistohinnaksi saamme

$$c \quad = \quad 20 \cdot \frac{1}{3} \quad = \quad \frac{20}{3}.$$

Osto-option F tuotto on

$$R_1^F \quad = \quad \frac{(S_1 - 100)^+ - 20/3}{20/3}$$

eli

$$R_1^F \quad = \quad \begin{cases} \mathbf{200}\,\%, & \text{jos } S_1 = 120, \\ -\mathbf{100}\,\%, & \text{jos } S_1 = 90. \end{cases}$$

Tuotot ovat kymmenkertaistuneet, hyvässä ja pahassa. Tämä on vipuvoimaa.

Tarkastelemme sitten, miten riskiä pienennetään. Rakennamme salkun osakkeesta ja myyntioptiosta. Siis $G = S_1 + (100 - S_1)^+$. Myyntioption hinnaksi saamme $c = 20/3$. Siten tuotoksi tulee

$$R_1^G \quad = \quad \begin{cases} \mathbf{12,5}\,\%, & \text{jos } S_1 = 120, \\ -\mathbf{6,25}\,\%, & \text{jos } S_1 = 90. \end{cases}$$

Riski on siis pienentynyt. ◇

Seuraava tulos, joka tässä yleisyydessä lienee peräisin E. Valkeilalta, kertoo, että esimerkin 3.20 ilmiö pätee kaikissa malleissa.

3.21 Väite. *Olkoon $X \in L^2(\mathbf{P})$ positiivinen ja $K > 0$ vakio.*

(i) *Olkoon γ sellainen vakio, että $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\gamma(X-K)^+]$. Tällöin*

$$\mathbf{Var}[X] \quad \le \quad \mathbf{Var}[\gamma(X-K)^+].$$

(ii) *Olkoon α sellainen vakio, että $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\alpha(X + (K-X)^+)]$. Tällöin*

$$\mathbf{Var}[X] \quad \ge \quad \mathbf{Var}\left[\alpha\Big(X + (K-X)^+\Big)\right].$$

Väitteen 3.21 todistus perustuu Lebesguen lemmaan. Tätä varten käsittelemme yleistettyjä käänteisfunktioita. Olkoon $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kasvava ja oikealta jatkuva funktio. Määrittelemme

$$a^{-1+}(x) \quad := \quad \inf \{y : a(y) > x\}$$

ja sovimme, että $\inf \varnothing = \infty$. Tällöin

(i) a^{-1+} on oikealta jatkuva ja kasvava,

(ii) $a^{-1+}(x) < \infty$ jos ja vain jos $x < a(\infty-) := \lim_{y\to\infty} a(y)$.

Funktio a^{-1+} on funktion a *oikeanpuoleinen käänteisfunktio*. Funktion a *vasemmanpuoleisen käänteisfunktion* a^{-1-} määrittelemme kaavalla

$$a^{-1-}(x) \quad := \quad \sup \{y : a(y) < x\}.$$

Tällöin

$$a^{-1-}(x) \quad = \quad a_-^{-1+}(x) \quad := \quad \lim_{y\to x-} a^{-1+}(x).$$

Jos lisäksi sovimme, että $f(0-) = f(0)$ kaikille $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, niin

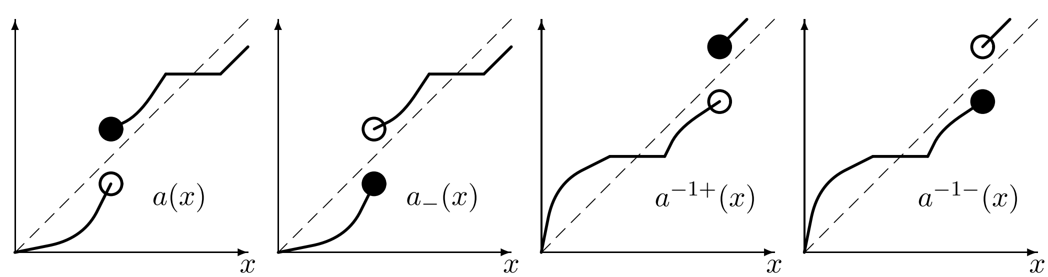
$$\begin{aligned} a_-(a^{-1-}(x)) &\le a_-(a^{-1+}(x)) \\ &\le x \\ &\le a(a^{-1-}(x)) \\ &\le a(a^{-1+}(x)). \end{aligned}$$

Erityisesti jos a on jatkuva, niin kaikille $x < a(\infty-)$ pätee

$$a(a^{-1+}(x)) \quad = \quad a(a^{-1-}(x)) \quad = \quad x$$

ja a on funktion a^{-1+} oikeanpuoleinen käänteisfunktio sekä

$$a(y) \quad = \quad \sup \left\{x : a^{-1+}(x) \le y\right\}.$$



Seuraava tulos on Lebesguen lemma. Se on muuttujanvaihtokaavan

$$\int_\alpha^\beta f(x)a'(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_{a^{-1}(\alpha)}^{a^{-1}(\beta)} f\left(a^{-1}(y)\right)\,\mathrm{d}y.$$

yleistys. Mittateoriaa osaaville Lebesguen lemman todistaminen on helppoa ja sitä osaamattomille mahdotonta.

3.22 Apulause. *Olkoon $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ oikealta jatkuva ja kasvava ja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Tällöin pätee muuttujanvaihtokaava*

$$\int_0^\infty f(x)\,a(\mathrm{d}x) \quad = \quad \int_{\{a^{-1+}<\infty\}} f(a^{-1+}(x))\,\mathrm{d}x.$$

Väitteen 3.21 todistus. Todistamme vain kohdan (i). Kohdan (ii) todistamisen jätämme harjoitustehtäväksi.

Merkitsemme $U := \gamma(X-K)^+$. Koska $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[U]$, riittää osoittaa, että

$$\mathbf{E}[X^2] \quad \leq \quad \mathbf{E}[U^2].$$

Olkoon F_X satunnaismuuttujan X kertymäfunktio. Merkitsemme

$$\begin{aligned} a_X(y) &\;:=\; \int_0^y x\,F_X(\mathrm{d}x), \\ a_U(y) &\;:=\; \int_0^y \gamma(x-K)^+\,F_X(\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Tarkoituksenamme on nyt osoittaa, että $a_X(y) \geq a_U(y)$. Nyt $a_U(\infty-) = \mathbf{E}[U]$, $a_X(\infty-) = \mathbf{E}[X]$ ja γ oli valittu niin, että $a_U(\infty-) = a_X(\infty-) =: \mu$. Seuraava lyhyt geometrinen päättely on todistuksen ydin. Koska selvästi $\gamma > 1$, niin kuvaus $x \mapsto \gamma(x-K)^+$ kasvaa nopeammin kuin identiteettikuvaus $x \mapsto x$. Koska vielä $a_U(y) = 0$, kun $y \leq K$, niin kaikille $y > 0$ pätee

$$a_X(y) \quad \geq \quad a_U(y).$$

Siispä vastaaville käänteisfunktioille pätee

$$a_X^{-1+}(y) \quad \leq \quad a_U^{-1+}(y).$$

Loppu todistuksesta on Lebesguen lemman soveltamista identtiseen kuvaukseen $x \mapsto x$ ja formaalia pyörittelyä:

$$\mathbf{E}[X^2] \quad = \quad \int_0^\infty x\,a_X(\mathrm{d}x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\mu} a_X^{-1+}(y)\,\mathrm{d}y \\
&\le \int_0^{\mu} a_U^{-1+}(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\infty} x\,a_U(\mathrm{d}x) \\
&= \int_0^{\infty} x\,\gamma(x-K)^+\,F_X(\mathrm{d}x)
\end{aligned}
$$

Toisaalta, koska

$$\int_0^{\infty} \big(\gamma(x-K)^+ - x\big)^2\, F_X(\mathrm{d}x) \quad \ge \quad 0,$$

niin

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[U^2] &= \int_K^{\infty} \gamma^2(x-K)^2\,F_X(\mathrm{d}x) \\
&\ge 2\gamma \int_K^{\infty} x(x-K)\,F_X(\mathrm{d}x) - \int_K^{\infty} x^2\,F_X(\mathrm{d}x) \\
&\ge \gamma \int_K^{\infty} x(x-K)\,F_X(\mathrm{d}x).
\end{aligned}
$$

Siispä $\mathbf{E}[X^2] \le \mathbf{E}[U^2]$ ja (i) on todistettu. □

Harjoitustehtäviä lukuun 3

3.1. Osoita, että rajoitettu satunnaismuuttuja on [rajoitettu].

3.2. Osoita, että esimerkissä 3.4 digitaalioption hinta $c = 0$ on liian halpa ja $c = 1$ on liian kallis.

3.3. Olkoon esimerkissä 3.4 $c \notin (0, -d(u-d))$. Etsi arbitraasisalkku.

3.4. Todista väite 3.7.

3.5. Tarkastelemme yhden askeleen ja kahden tilan korollista mallia

$$
\begin{array}{ccccll}
 & & & \nearrow & S_1(1) = S_0(1+u) & \text{tn:llä } p \\
S_0 & \longrightarrow & S_1(\omega) & & & \\
 & & & \searrow & S_1(0) = S_0(1+d) & \text{tn:llä } 1-p,
\end{array}
$$

missä $p \in (0,1)$ ja $d < r < u$. Olkoon $F = (S_1 - K)^+$ eurooppalainen osto-optio. Laske sen arbitraasivapaat hinnat.

3.6. Tarkastelemme yhden askeleen ja kolmen tilan mallia: $r = 5\%$ ja

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & S_1(3) = 120\,€ & & \text{tn:llä } 20\% \\
 & & \nearrow & & & \\
S_0 = 80\,€ & \longrightarrow & S_1(\omega) \;\rightarrow & S_1(2) = 90\,€ & & \text{tn:llä } 30\% \\
 & & \searrow & & & \\
 & & & S_1(1) = 60\,€ & & \text{tn:llä } 50\%.
\end{array}
$$

Laske myyntioption $(100\,€ - S_1)^+$ arbitraasivapaat hinnat.

3.7. Tarkastelemme yleistä yhden askeleen arbitraasivapaata mallia. Olkoon $C^{\text{put}} = (K - S_1^i)^+$ ja $C^{\text{call}} = (S_1^i - K)^+$. Olkoon $\bar{K} = K/B_1$. Osoita, että

$$
\begin{array}{ccccccc}
\left(\bar{K} - S_0^i\right)^+ & \leq & c^-\left(C^{\text{call}}\right) & \leq & c^+\left(C^{\text{call}}\right) & \leq & \bar{K} \\
\left(S_0^i - \bar{K}\right)^+ & \leq & c^-\left(C^{\text{put}}\right) & \leq & c^+\left(C^{\text{put}}\right) & \leq & \bar{K}
\end{array}
$$

3.8. Konstruoi sellainen yhden askeleen hinnoittelumalli, jossa on olemassa salkku π, jolle $V_0^\pi < 0$ ja $V_1^\pi \geq 0$. Voiko tällainen hinnoittelumalli olla arbitraasivapaa.

3.9. Onko arbitraasin mahdollistavassa yhden askeleen hinnoittelumallissa välttämättä tehtävän 3.8 mukaisia salkkuja?

3.10. Anna esimerkki todennäköisyysavaruudesta, jossa on (a) äärettömästi atomeja, (b) 32 atomia ja (c) ei yhtään atomia.

3.11. Perustele huomautuksessa 3.17 mainitut seikat.

3.12. Tarkastelemme esimerkkiä 3.19. Oletamme, että salkussa π painot voivat olla myös negatiivisia. Varallisuus V_T^π voi siis olla myös negatiivinen. Olkoon h sileä konveksi funktio. Konstruoi varallisuus $h(V_T^\pi)$ käyttämällä pankkitalletusta ja koria sekä osto- ja myyntioptioita.

3.13. Olkoon a kasvava, positiivinen ja oikealta jatkuva funktio. Asetamme

$$a^{-1+}(x) \quad := \quad \inf\{y \,:\, a(y) > t\},$$

missä $\inf \varnothing = \infty$. Osoita, että a^{-1+} on oikealta jatkuva kasvava funktio.

3.14. Todista väitteen 3.21 kohta (ii).

3.15. Todista apulauseen 4.9 kohta (iii).

"Yksi askel" pähkinänkuoressa

- Arbitraasivapaus $\Longleftrightarrow$ on olemassa ekvivalentti riskineutraali mitta $\mathbf{Q}$.
- Vaateen F arbitraasivapaa hinta $= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{F}{B_1}\right]$.
- Täydellisyys $\Longleftrightarrow$ ekvivalentti riskineutraali mitta $\mathbf{Q}$ on yksikäsitteinen.

d pelkistymätöntä osaketta ja $\Omega = \{1, \ldots, m\}$

- Toisto: ratkaise yhtälöryhmä

$$\beta B_1 + \sum_{i=1}^{d} \gamma^i S_1^i(j) \quad = \quad F(j), \qquad j = 1, \ldots, m.$$

- Arbitraasivapaa hinta:

$$\beta + \sum_{i=1}^{d} \gamma^i S_0^i.$$

- Ekvivalentti riskineutraali mitta määräytyy luvuista q^j, missä q^j on digitaalioption $\mathbf{1}_{\{j\}}$ suojauksen alkupääoma.

Osa II

Diskreetti aika

Luku 4

Markkinat ja martingaalit

> Trying to predict the future is a mug's game. But ... we need to have some sort of idea of what the future's actually going to be like because we are going to have to live there, probably next week. — Douglas Adams

Dynaamisia käsitteitä

Dynaamisessa mallissa meidän pitää mallintaa jokaiselle ajan hetkelle t informaatio $\mathcal{F}_t$, jonka varassa teemme päätöksiä.

4.1 Määritelmä. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ todennäköisyysavaruus. *Historia* (*filtration*) $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ on kasvava jono $\mathcal{F}$:n ali-σ-algebroja.

Informaation kasvavuus $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, kun $s \leq t$, takoittaa että menneitä tapahtumia ei unohdeta.

4.2 Esimerkki. Jos Ω koostuu kolmesta peräkkäisestä kolikonheitosta eli $\Omega = \{0,1\}^3$, niin peräkkäisistä kolikonheitoista kertyvää informaatiota vastaa historia

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_0 &= \Big\{\varnothing, \Omega\Big\}, \\
\mathcal{F}_1 &= \Big\{\{i\} \times \{0,1\}^2 : i = 0,1\Big\} \cup \mathcal{F}_0, \\
\mathcal{F}_2 &= \Big\{\{(i,j)\} \times \{0,1\} : i,j = 0,1\Big\} \cup \mathcal{F}_1, \\
\mathcal{F}_3 &= \Big\{\{(i,j,k)\} : i,j,k = 0,1\Big\} \cup \mathcal{F}_2.
\end{aligned}
$$

Tässä aaltosuluissa olevat joukot kuvaavat kertyvää uutta tietoa tapahtumista, jotka sattuvat tai eivät satu. Pahoittelemme, että joukko-opin merkintöjen monimutkaisuutta. Itse asia on kuitenkin varsin yksinkertainen. $\diamond$

4.3 Määritelmä. Satunnaismuuttuja $\tau : \Omega \to \{0, 1 \ldots, T\}$ historialliselta todennäköisyysavaruudelta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ on $\mathbb{F}$-*pysäytyshetki* (*stopping time*), jos $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ kaikilla $t \le T$.

Pysäytyshetken idea on se, että hetkellä t meidän tulee aina tietää (tai päättää) onko pysäyttämisen aika jo tullut vai ei.

Jatkossa käytämme tarpeen vaatiessa merkintää

$$\mathcal{T}_t \quad := \quad \{\tau : \tau \text{ on } \mathbb{F}\text{-pysäytyshetki ja } \tau \ge t\}.$$

Joukko $\mathcal{T}_t = \mathcal{T}_t(\mathbb{F})$ koostuu siis niistä $\mathbb{F}$-pysäytysstrategioista τ, jotka eivät lankea käytettäviksi ennen hetkeä t. Kaikkien $\mathbb{F}$-pysäytyshetkien joukko on siis $\mathcal{T}_0$.

4.4 Määritelmä. Stokastinen prosessi X historialliselta todennäköisyysavaruudelta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ on $\mathbb{F}$-*sopiva* (*adapted*), jos X_t on $\mathcal{F}_t$-mitallinen eli $\{X_t \in B\} \in \mathcal{F}_t$ kaikilla $t \le T$ ja X:n maaliavaruuden Borel-joukoilla B.

Prosessin X sopivuus tarkoittaa, että hetkellä t tiedämme sen arvon X_t. Pienin historia, jonka suhteen X on sopiva on tietenkin prosessin X oma sisäinen historia $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \le T}$, missä $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_t)$.

4.5 Esimerkki. Olkoon $X = (X_t)_{t \le T}$ prosessi historialliselta todennäköisyysavaruudelta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^X, \mathbf{P})$, Tällöin ensimmäinen rajanylityshetki

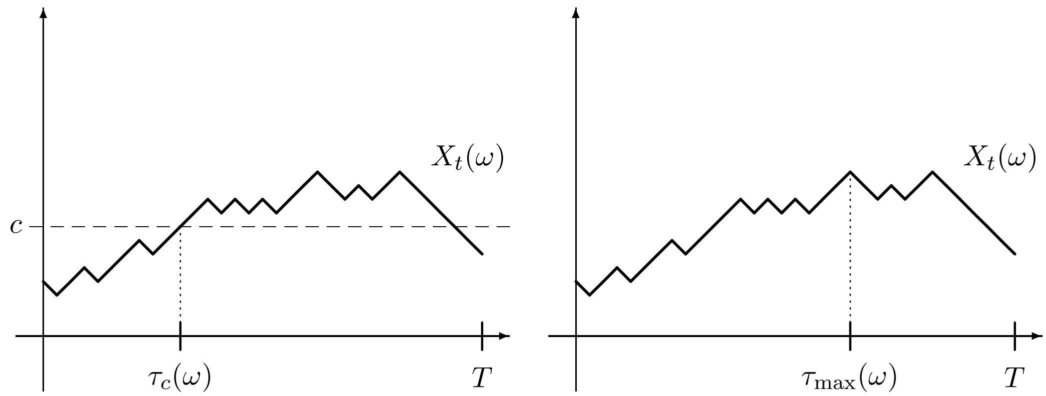
$$\tau_c \quad = \quad \min\Big\{t \le T \, : \, X_t \ge c\Big\}$$

on $\mathbb{F}^X$-pysäytyshetki, mutta ensimmäinen maksimihetki

$$\tau_{\max} \quad = \quad \min\left\{t \le T \, : \, X_t \ge \max_{s \le T} X_s\right\}$$

ei ole $\mathbb{F}^X$-pysäytyshetki. Se on kuitenkin pysäytyshetki laajemman historian $\mathcal{F}_t^* = \sigma(X_1, \ldots, X_t, \max_{s \le T} X_s)$ suhteen. Sen sijaan viimeinen maksimihetki ei ole pysäytyshetki edes tämän laajennetun historian suhteen. ◇

Eurooppalainen johdannainen tai ehdollinen vaade on dynaamisessa mallissa sama kuin staattisessa yhden askeleen mallissakin: *eurooppalainen ehdollinen vaade* on jokin $\mathcal{F}_T$-mitallinen satunnaismuuttuja F ja *euroopalainen johdannainen* on jokin $\sigma(S_t^i : t \le T, i = 1, \ldots, d)$-mitallinen satunnaismuuttuja eli muotoa $F = f(S_t^i : t \le T, i = 1, \ldots, d)$. *Amerikkalainen ehdollinen vaade* on $\mathbb{F}$-sopiva stokastinen prosessi $F = (F_t)_{t \le T}$. Tässä F_t on vaateen *sisäinen arvo* (*intrinsic value*). Se on hinta, jonka vaateen



Pysäytyshetki τ_c (vasemmalla) ja ei-pysäytyshetki $\tau_{\max}$ (oikealla) eräässä X:n realisaatiossa $X_.(\omega)$.

haltija saa, jos hän käyttää vaateensa hetkellä t. Yleisesti amerikkalaisen vaateen arvo on F_τ, missä τ on se pysäytyshetki, jolloin vaateen haltija päättää käyttää sen. Mielenkiintoinen kysymys onkin löytää optimaalinen hetki τ käyttää vaade. *Amerikkalainen johdannainen* on stokastinen prosessi, joka on sopiva osakevektorin S sisäisen historian suhteen eli muotoa $F_t = f(S_s^i : s \le t, i = 1, \ldots, d)$.

Sekä eurooppalaiset että amerikkalaiset johdannaiset voivat olla polkuriippuvia. Esimerkiksi *amerikkalainen osto-optio* $(S-K)^+ = ((S_t-K)^+)_{t\le T}$ ja *amerikkalainen myyntioptio* $(K-S)^+$ eivät ole polkuriippuvia. Sen sijaan *eurooppalainen look-back-optio* $\max_{t\le T}(S_t-K)^+$ ja *amerikkalainen look-back-optio* $(\max_{s\le t}(S_s-K)^+)_{t\le T}$ ovat polkuriippuvia.

Otaksuma tehokkaista markkinoista: markkinat on martingaali

Osakekurssien kehitystä, tai pikemminkin tulevia tuottoja, on pyritty ennustamaan tai selittämään erilaisten markkinoiden tai yleisemmin talouden tunnuslukujen avulla. Tällaisia tunnuslukuja ovat esimerkiksi inflaatio, työttömyysaste, yrityksen velkaantumisaste ja yrityksen voitto. Periaatteessa onkin selvää, että osakekurssi ei ainakaan saisi olla riippumaton kaikista mahdollisista tunnusluvuista. Tulevat tuotot voivat tietenkin olla hieman eri asia. Tällaista ennustusyritystä kutsutaan *fundamentaaliksi analyysiksi*, koska se perustuu markkinoiden perusilmiöihin eli “fundamentteihin”. Toinen tapa yrittää ennustaa osakekurssin kehitystä on katsoa sen aikaisempaa kehitystä. Tätä tapaa kutsutaan *tekniseksi analyysiksi*. Ei tietenkään ole aivan mahdoton ajatus, että osakkeen hintahistoria kertoo jotain tulevista tuotoista.

Toisaalta ei ole mitään perustavaa syytä, miksi sen tulisi kertoa mitään. Lisäksi tekninen analyysi johtaa usein varsin kummallisiin sijoitusstrategioihin, kuten seuraava Benjamin Grahamin kritiikki sanoo:

> The one principal that applies to nearly all these so-called "technical approaches" is that one should buy because a stock or the market has gone up and one should sell because it has declined. This is the exact opposite of sound business sense.

Perusongelma on siis ennustaa osakkeen $S = (S_t)_{t \le T}$ tulevat tuotot

$$R_t \ := \ \frac{\Delta S_t}{S_{t-1}} \ := \ \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}.$$

tai muutokset ΔS_t hetkellä $t_0 < t$. Tuottojen mallintaminen on siinä mielessä sama asia kuin itse prosessin mallintaminen, että alkuperäinen prosessi voidaan rekonstruoida tuottoprosessista.

4.6 Apulause. *Osakeprosessi S saadaan sen tuotoista R ja alkuarvosta S_0 kaavalla*

$$S_t \ = \ S_0 \prod_{s \le t} (1 + R_s). \tag{4.7}$$

Toisin sanoen (4.7) on differenssiyhtälön

$$\frac{\Delta S_t}{S_{t-1}} \ = \ R_t$$

yksikäsitteinen ratkaisu.

Todistus. Käytämme induktiota. Alkutilanne $t = 1$ on selvä. Olettakaamme, että väite pätee hetkillä $1, \ldots, t$. Hetkellä $t+1$ tapahtuva muutos on

$$\begin{aligned}
\Delta \left(S_0 \prod_{s \le t+1} (1 + R_s) \right) &= S_0 \Delta \left(\prod_{s \le t+1} (1 + R_s) \right) \\
&= S_0 \left(\prod_{s \le t+1} (1 + R_s) - \prod_{s \le t} (1 + R_s) \right) \\
&= S_0 \prod_{s \le t} (1 + R_s) R_{t+1} \\
&= S_t R_{t+1}.
\end{aligned}$$

Tästä väite jo seuraakin. □

Apulause 4.6 siis sanoo, että differenssiyhtälön

$$\Delta x_t = x_{t-1}\Delta a_t, \qquad x_0 = 1,$$

yksikäsitteinen ratkaisu on

$$\mathcal{E}(a)_t = \prod_{s\leq t}(1-\Delta a_s).$$

Jonoa $\mathcal{E}(a)$ kutsutaan jonon a *stokastiseksi eksponentiksi*. Yhteys tavalliseen eksponenttiin on ilmeinen. Jos a on sileä funktio, niin differentiaaliyhtälön

$$\mathrm{d}x_t = x_t \mathrm{d}a_t, \qquad x_0 = 1,$$

yksikäsitteinen ratkaisu on tunnetusti $\exp\{a_t\}$.

Haluamme ennustaa tulevan tuoton R_t parhaalla mahdollisella tavalla hetkellä $t_0 < t$, kun käytössämme on jokin informaatio $\mathcal{F}_{t_0}$. Tämä informaatio voi olla osakkeen hintakehitys hetkeen t_0 asti eli $\mathcal{F}_{t_0} = \sigma(S_1, \ldots, S_{t_0})$ tai jotain enemmän. Paras ennuste on ehdollinen odotusarvo: $\mathcal{F}_{t_0}$-mitallisten satunnaismuuttujien $\hat{R}_{t|t_0}$ joukossa ehdollinen ehdollinen odotusarvo minimoi ennustusvirheen $\mathbf{Var}[\hat{R}_{t|t_0} - R_t]$ (itse asiassa tämä on ehdollisen odotusarvon L^2-projektioon perustuva määritelmä).

Annamme ehdollisen odotusarvon yleisen L^1-määritelmän, vaikka helpompi, mutta rajoitetumpi, projektiolauseeseen perustuva L^2-määritelmä olisikin tarkoituksiimme riittävä. Yleinen määritelmä 4.8 on peräisin Kolmogorovilta. Itse asiassa hänen suuri tuloksensa oli, että näin määritelty ehdollinen odotusarvo on olemassa ja $\mathbf{P}$-melkein varmasti yksikäsitteinen.

4.8 Määritelmä. Olkoon $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ja $\mathcal{G}$ jokin $\mathcal{F}$:n ali-σ-algebra. Satunnaismuuttujan X *ehdollinen odotusarvo* informaatiolla $\mathcal{G}$ eli $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ määräytyy ehdoista

(i) $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ on $\mathcal{G}$-mitallinen,

(ii) kaikille $A \in \mathcal{G}$ pätee

$$\mathbf{E}\Big[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]\,\mathbf{1}_A\Big] = \mathbf{E}\Big[X\,\mathbf{1}_A\Big].$$

Ehdollinen odotusarvo toteuttaa kaikki tavallisen odotusarvon normaalit kaavat. Lisäksi sille pätee seuraavat kaavat.

4.9 Apulause. *Olkoon $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ja $\mathcal{G}$ $\mathcal{F}$:n ali-σ-algebra. Tällöin*

(i) *Jos X on $\mathcal{G}$-mitallinen ja Y [rajoitettu], niin*

$$\mathbf{E}[XY|\mathcal{G}] \quad = \quad X\mathbf{E}[Y|\mathcal{G}].$$

(ii) *Jos X on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{G}$, niin*

$$\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] \quad = \quad \mathbf{E}[X].$$

(iii) *Jos $\mathcal{H}$ on $\mathcal{G}$:n ali-σ-algebra, niin karkeampi aina voittaa*

$$\mathbf{E}\Big[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]\,\Big|\,\mathcal{H}\Big] \quad = \quad \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}[X|\mathcal{H}]\,\Big|\,\mathcal{G}\Big] \quad = \quad \mathbf{E}[X|\mathcal{H}].$$

Todistus. Todistamme kohdan (i) osoittamalla sen ensin tilanteessa $X = \mathbf{1}_B$, $B \in \mathcal{G}$, jolloin väite on helppo tarkistaa. Tällöin, jos $A \in \mathcal{G}$, niin

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[\mathbf{1}_B\mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]\mathbf{1}_A\Big] &= \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]\mathbf{1}_{B\cap A}\Big] \\ &= \mathbf{E}\Big[Y\mathbf{1}_{B\cap A}\Big] \\ &= \mathbf{E}\Big[\mathbf{1}_B Y\mathbf{1}_A\Big],\end{aligned}$$

missä käytimme ehdollisen odotusarvon $\mathbf{E}[Y|\mathcal{G}]$ määritelmää leikkausjoukolle $A\cap B \in \mathcal{G}$. Yleiselle $X \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ väite seuraa nyt approksimoimalla sitä dominoidusti tai monotonisesti indikaattorien lineaarikombinaatioilla

$$X^n \quad := \quad \sum_{i=1}^{n} x^{n,i}\mathbf{1}_{B^{n,i}}$$

ja käyttämällä ehdollisen odotusarvon lineaarisuutta.

Kohta (ii) seuraa siitä, että nyt X on riippumaton kaikista satunnaismuuttujista $\mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{G}$. Siten

$$\mathbf{E}\left[X\mathbf{1}_A\right] \quad = \quad \mathbf{E}\left[X\right]\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A\right] \quad = \quad \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\left[X\right]\mathbf{1}_A\Big].$$

Kohdan (iii) jätämme harjoitustehtäväksi. □

Jatkossa $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\le T}$ on kiinteä ja käytämme lyhennysmerkintää

$$\mathbf{E}_t[\,\cdot\,] \quad := \quad \mathbf{E}[\,\cdot\,|\,\mathcal{F}_t].$$

Huomaamme, että kun $s \le t$, niin apulauseen 4.9 (iii) nojalla

$$\mathbf{E}_s\Big[\mathbf{E}_t[\,\cdot\,]\Big] \quad = \quad \mathbf{E}_t\Big[\mathbf{E}_s[\,\cdot\,]\Big] \quad = \quad \mathbf{E}_s[\,\cdot\,].$$

4.10 Esimerkki. Olkoot X ja Y diskreettejä satunnaismuuttujia. Olkoon $X \in L^1(\mathbf{P})$. Tällöin määritelmän 4.8 mukainen ehdollinen odotusarvo $\mathbf{E}[X|Y] := \mathbf{E}[X|\sigma(Y)]$ saadaan perinteisestä ehdolliseen todennäköisyyteen perustuvasta ehdollisesta odotusarvosta $\mathbf{E}[X|Y=y]$ kaavalla

$$\mathbf{E}[X|Y](\omega) \quad := \quad \sum_y \mathbf{E}[X|Y=y]\mathbf{1}_{\{Y=y\}}(\omega).$$

Tässä siis summaus käy läpi Y:n arvojoukon ja

$$\mathbf{E}[X|Y=y] \quad := \quad \sum_x x\mathbf{P}(X=x|Y=y),$$

missä summaus käy läpi X:n arvojoukon. $\diamond$

Palaamme nyt osakkeen tuoton mallintamiseen.

Monet ovat etsineet maagista ennustuskaavaa $\mathbf{E}_{t_0}[R_t]$. Perusteellisista etsinnöistä huolimatta näyttää kuitenkin siltä, että paras arvaus on riippumaton informaatiosta $\mathcal{F}_{t_0}$: $\mathbf{E}_{t_0}[R_t] = \mathbf{E}[R_t]$ on deterministinen. Tämä saattaa tuntua yllättävältä ja masentavaltakin, mutta lopulta se on luonnollista. Olettakaamme, että on olemassa maaginen kaava, joka informaatiosta $\mathcal{F}_{t_0}$ kertoo, onko tuotto keskimääräisä parempaa vai huonompaa. Oletamme, että herra K. tuntee maagisen kaavan ja on huomannut, että osakkeen huominen tuotto on keskimääräistä parempi. Tällöin herra K. tietysti ostaa niin monta osaketta tänään kuin mahdollista. Mutta näin tehdessään hän nostaa osakkeen hintaa. Nimittäin tällöin muut investoijat huomaavat herra K:n ostot ja päättelevät, että herra K. tietää jotakin. Hekin rupeavat ostamaan osakkeita. Käy siis niin, että osakkeen kurssi nousee "välittömästi" niin, että herra K:n toivoma keskimääräistä parempi tuotto häviää osakkeen hinnan nousuun.

Edellä esitetty tilanne kuvaa markkinoiden tehokkuutta. Seuraava formulointi tälle ilmiölle lienee peräisin Famalta.

> **Otaksuma tehokkaista markkinoista.** Osakkeiden tämän hetkiset hinnat sisältävät jo kaiken markkinoihin vaikuttavan informaation $\mathcal{F}_t$. Siten tulevat tuotot johtuvat "aidosti uudesta informaatiosta" (*news*), joka on täysin ennustamatonta. Toisin sanoen tuotot R_{t+s}, $s > 0$, ovat riippumattomia σ-algebrasta $\mathcal{F}_t$. Erityisesti tuotot R_t, $t \geq 0$, ovat keskenään riipumattomia.

Itse asiassa otaksuma tehokkaista markkinoista (*efficient market hypothesis*) muotoillaan usein hintojen muutoksille, eikä tuotoille. Matemaattisesti tämä ero on kuitenkin lähes merkityksetön. Valitsemme tuotoista puhuvan eli geometrisen version mukavuussyistä.

Tehokkaiden markkinoiden otaksumasta on kolme eri muotoa.

Heikko muoto. Kaikki mennyt hintainformaatio sisältyy täysin osakkeen nykyiseen hintaan. Tästä otaksumasta seuraa, että tekninen analyysi on hyödytöntä.

Puolivahva muoto. Kaikki julkisesti saatavilla oleva informaatio sisältyy täysin osakkeen nykyiseen hintaan. Tästä otaksumasta seuraa, että fundamentaali analyysi on hyödytöntä.

Vahva muoto. Kaikki relevantti informaatio sisältyy täysin osakkeen nykyiseen hintaan. Tästä otaksumasta seuraa, että sisäpiiritieto hyödytöntä.

4.11 Huomautus. Otaksuma tehokkaista markkinoista on paradoksi: se pitää paikkansa vain jos siihen ei uskota. ◇

Siirrymme nyt tarkastelemaan tehokkaiden markkinoiden otaksuman yhteyttä riskineutraaleihin mittoihin, martingaaleihin ja arbitraasiin.

Oletamme, että tuottoprosessissi R on *stationaarinen* eli R_t:t ovat samoin jakautuneita. Tämä on äärimmäisen luonnollinen oletus. Jos nimittäin todellinen aikasarja ei ole stationaarinen, niin sen kausivaihtelut ja trendit voidaan "valkaista" pois datasta, jolloin päädymme stationaariseen aikasarjaan. Oletamme lisäksi, että tuottoprosessi on neliöintegroituva eli $R_t \in L^2(\mathbf{P})$ kaikilla $t \leq T$. Tällöin voimme kirjoittaa Faman otaksuman tehokkaista markkinoista muotoon

$$R_t = \mu + \sigma\varepsilon_t, \tag{4.12}$$

missä prosessi ε on *valkoinen häly* (white noise):

(i) $\mathbf{E}[\varepsilon_t] = 0,\ \mathbf{E}[\varepsilon_t^2] = 1,$

(ii) satunnaismuuttujat $\varepsilon_t,\ t \leq T$, ovat riippumattomia.

Erityisesti $\mu = \mathbf{E}[R_t]$ on osakkeen *tuotto-odotus* ja $\sigma = \sqrt{\mathbf{Var}[R_t]}$ on osakkeen *volatiliteetti*. Tätä mallia kutsutaan myös *satunnaiskuluksi* (random walk).

4.13 Huomautus. Mikäli tarkastelemme useita osakkeita, niin ei ole järkevää olettaa, että kiinteällä hetkellä t tuotot $R_t^1, \ldots, R_t^d$ ovat riippumattomia. Luonnollinen "toisen asteen" malli on tällöin

$$R_t^i = \mu^i + \sum_{k=1}^{m} a^{ki}\varepsilon_t^k,$$

missä ε^k:t ovat toisistaan riippumattomia valkoisia hälyjä. Tällöin matriisi $a = (a^{ki})_{k\le m, i\le d}$ rakentaa riippumattomista valkoisista hälyistä ε^k, $k \le m$, tuottojen R^i, $i \le d$, välille korrelaation. Nimittäin

$$\mathbf{Cov}\left[R_t^i, R_t^j\right] = \sum_{k=1}^{m} a^{ki}a^{kj}. \tag{4.14}$$

Ertyisesti mikä tahansa kovarianssimatriisi σ voidaan esittää tällaisessa muodossa eli kovarianssimatriisilla on aina hajotelma $\sigma = a^{\mathsf{T}}a$. Jätämme tämän huomautuksen perustelun harjoitustehtäväksi. ◇

Dynaamisessa mallissa riskineutraalia mittaa vastaa martingaalimitta.

4.15 Määritelmä. Prosessi X historialliselta todennäköisyysavaruudelta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ on $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$-*martingaali*, jos

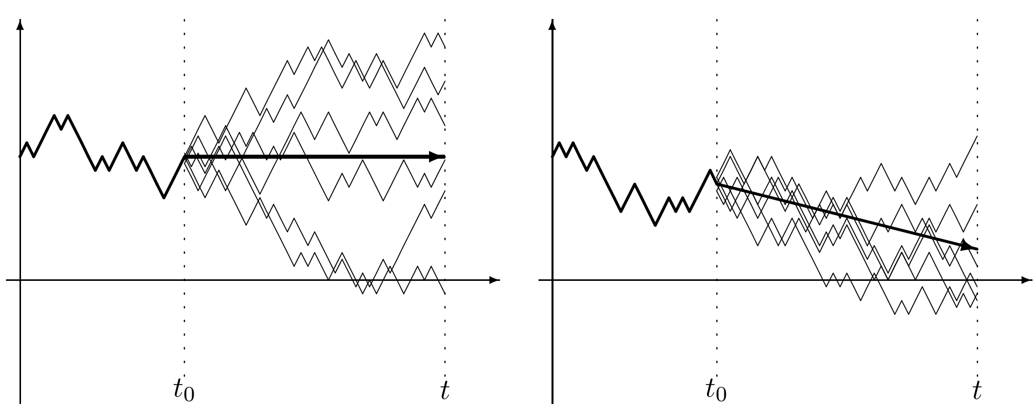
(i) X on $\mathbb{F}$-sopiva,

(ii) X_t on $\mathbf{P}$-integroituva kaikilla t,

(iii) $\mathbf{E}_s[X_t] = X_s$ kaikilla $s \le t$.

Mikäli ehdossa (iii) on epäyhtälö $\le$, niin X on $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$-*ylimartingaali*.

Ylimartingaali siis vähenee ajassa keskimäärin. Syy tähän nurinkuriseen nimitykseen tulee analyysistä, tarkemmin potentiaaliteoriasta.



Martingaalipolkuja $(X_s)_{s\le t}$ ehdollistettuna polkuun $(X_s)_{s\le t_0}$ (vasemmalla) ja vastaavia ylimartingaalipolkuja (oikealla).

4.16 Huomautus. Diskreetissä ajassa martingaaliehto (iii) voidaan kirjoittaa muodossa $\mathbf{E}_t[X_{t+1}] = X_t$ kaikilla $t < T$. Tämä seuraa käyttämällä apulauseen 4.9 kohtaa (iii) "karkeampi aina voittaa" riittävän monta kertaa peräkkäin. ◇

Dynaaminen hinnoittelumalli on yhden askeleen hinnoittelumallin luonnollinen laajennus: otamme mukaan historian.

4.17 Määritelmä. *Dynaaminen hinnoittelumalli* on $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, missä riskittömän sijoituksen prosessi B on deterministinen ja riskillisten sijoitusten prosessit S^i, $i = 1, \ldots, d$, ovat kaikki $\mathbb{F}$-sopivia.

4.18 Määritelmä. Todennäköisyysmitta $\mathbf{Q}$ on dynaamisen hinnoittelumallin $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ *martingaalimitta*, jos kaikki diskontatut osakeprosessit $\bar{S}^i = S^i/B$ ovat $(\mathbf{Q}, \mathbb{F})$-martingaaleja eli

$$\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[\bar{S}^i_{t+1}\right] \;=\; \bar{S}^i_t, \qquad i = 1, \ldots, d.$$

Mikäli lisäksi $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$, niin $\mathbf{Q}$ on *ekvivalentti martingaalimitta*.

4.19 Väite. *Mitta $\mathbf{Q}$ on martingaalimitta jos ja vain jos kaikilla $t < T$*

$$\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}[R^i_{t+1}] \;=\; r_{t+1}, \qquad i = 1, \ldots, d,$$

missä $r_{t+1} := \Delta B_{t+1}/B_t$ on riskitön tuotto.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraava väite kertoo miten ekvivalentteja riskineutraaleja mittoja voidaan periaatteessa konstruoida lähtien otaksumasta (4.12).

4.20 Väite. *Olkoon yhden osakkeen hinnoittelumalli $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ sellainen, että se toteuttaa ehdon (4.12). Olkoon lisäksi $\Delta B_t/B_{t-1} = r$. Olkoon $\mathbf{Q}$ sellainen todennäköisyysmitta, että sen suhteen prosessi*

$$(t, \omega) \;\mapsto\; \tilde{\varepsilon}_t(\omega) \;:=\; \varepsilon_t(\omega) - \frac{r - \mu}{\sigma}$$

on valkoinen häly. Tällöin $\mathbf{Q}$ on martingaalimitta. Lisäksi $\mathbf{Q}$ on tulomitta ja $\mathbf{Q}(\tilde{\varepsilon}_t \in \mathrm{d}x_t) = \mathbf{P}(\varepsilon_t \in \mathrm{d}x_t)$.

Todistus. Koska $\mathbf{P}$ on tulomitta, niin selvästi myös $\mathbf{Q}$ on tulomitta. Myös väite $\mathbf{Q}(\tilde{\varepsilon}_t \in \mathrm{d}x_t) = \mathbf{P}(\varepsilon_t \in \mathrm{d}x_t)$ on selvä. Enää pitää siis osoittaa, että $\mathbf{Q}$ on martingaalimitta. Tehtävämme on itse asiassa päästä eroon osakkeen ylituotosta suhteessa riskittömään tuottoon. Nimittäin otaksuman (4.12) nojalla

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_t[R_{t+1}] &= \mathbf{E}_t[\mu + \sigma\varepsilon_{t+1}] \\
&= \mu + \sigma\mathbf{E}_t[\varepsilon_{t+1}] \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

Mutta väitteen 4.19 nojalla haluaisimme, että $\mu = r$. Olkoon sitten $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ sellainen, että $\tilde{\varepsilon}$ on $\mathbf{Q}$-valkoinen häly. Tällön $\tilde{\varepsilon}$ on $(\mathbf{Q}, \mathbb{F})$-martingaali ja

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}[R_{t+1}] &= \mu + \sigma \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}[\varepsilon_{t+1}] \\ &= \mu + \sigma \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{\varepsilon}_{t+1} + \frac{r-\mu}{\sigma}\right] \\ &= \mu + \sigma \frac{r-\mu}{\sigma} \\ &= r. \end{aligned}$$

Lause seuraa siten väitteestä 4.19. □

4.21 Huomautus. Väitteessä 4.20 esiintyvälle osakkeen suhteelliselle ylituotolle

$$\frac{\mu - r}{\sigma}$$

käytetään rahoitusteoriassa myös nimityksiä *riskin markkinahinta* ja *Sharpen suhde*. Nimitys "riskin markkinahinta" tulee siitä, että sijoittajalla on kaksi valintaa:

(i) Sijoittaa riskittömästi pankkiin, jolloin tuotto on r.

(ii) Sijoittaa riskillisesti osakkeeseen, jolloin tuotto on μ, mutta riski on σ.

Koska markkinahinnat ovat mitä ovat, niin sijoittajat ovat keskimäärin indifferenttejä valintojen (i) ja (ii) välillä. ◇

4.22 Esimerkki. Olkoon otaksumassa (4.12) prosessi ε gaussinen valkoinen häly eli mitan $\mathbf{P}$ suhteen $\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0,1)$. Olkoon $\mathbb{F} = \mathbb{F}^{\varepsilon}$. Tällöin $\mathbf{P}$ on tulomitta, joka voidaan karakterisoida kaavalla

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\varepsilon_1 \in \mathrm{d}x_1, \ldots, \varepsilon_T \in \mathrm{d}x_T) \\ &\quad = \mathbf{P}(\varepsilon_1 \in \mathrm{d}x_1) \cdots \mathbf{P}(\varepsilon_T \in \mathrm{d}x_T) \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x_1^2\right\} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x_T^2\right\} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_T \\ &\quad = \frac{1}{(2\pi)^{T/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} x_t^2\right\} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_T. \end{aligned}$$

Väitteen 4.20 nojalla $\mathbf{Q}$ on martingaalimitta, jos sen suhteen prosessi

$$\tilde{\varepsilon} \quad = \quad \varepsilon - \frac{r-\mu}{\sigma}$$

on valkoinen häly. Itse asiassa on selvää, että $\tilde{\varepsilon}$ on gaussinen valkoinen häly $\mathbf{Q}$:n suhteen, koska ε on gaussinen $\mathbf{P}$:n suhteen. Toisin sanoen mitan $\mathbf{Q}$

suhteen ε_t:t ovat riippumattomia ja $\mathrm{N}((r-\mu)/\sigma, 1)$-jakautuneita. Siten myös mitta $\mathbf{Q}$ on tulomitta. Koska

$$\mathbf{Q}(\tilde{\varepsilon}_t \in \mathrm{d}x_t) \quad = \quad \mathbf{P}(\varepsilon_t \in \mathrm{d}x_t)$$

eli

$$\mathbf{Q}(\varepsilon_t \in \mathrm{d}x_t) \quad = \quad \mathbf{P}\left(\varepsilon_t + \frac{r-\mu}{\sigma} \in \mathrm{d}x_t\right),$$

niin saamme

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Q}(\varepsilon_1 \in \mathrm{d}x_1, \ldots, \varepsilon_T \in \mathrm{d}x_T) \\
&= \mathbf{Q}(\varepsilon_1 \in \mathrm{d}x_1) \cdots \mathbf{Q}(\varepsilon_T \in \mathrm{d}x_T) \\
&= \mathbf{P}\left(\varepsilon_1 + \frac{r-\mu}{\sigma} \in \mathrm{d}x_1\right) \cdots \mathbf{P}\left(\varepsilon_T + \frac{r-\mu}{\sigma} \in \mathrm{d}x_T\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \cdots \\
&\qquad \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_T - \frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_T \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{T/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(x_t - \frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_T.
\end{aligned}$$

Jätämme harjoitustehtäväksi perustella, että $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ ja laskea Radon–Nikodym-derivaatan $\mathrm{d}\mathbf{Q}/\mathrm{d}\mathbf{P}$ sekä mitanvaihtoon liittyvän mitanvaihtomartingaalin eli uskottavuusosamääräfunktion $t \mapsto \mathbf{E}_t[\mathrm{d}\mathbf{Q}/\mathrm{d}\mathbf{P}]$.

Lopuksi on syytä mainita, että tässä konstruoimamme $\mathbf{Q}$ ei ole ainoa mahdollinen martingaalimitta tässä mallissa. Itse asiassa, jos $\mathbf{Q}$ on mikä tahansa tulomitta, jonka suhteen $\tilde{\varepsilon}$ on jatkuvasti jakautunut kantajanaan $\mathbb{R}$, niin $\mathbf{Q}$ on ekvivalentti martingaalimitta. Valkoisen hälyn $\tilde{\varepsilon}$ ei siis tarvitse olla gaussinen. $\diamond$

Sijoitusstrategiat ja arbitraasi

Yhden askeleen mallissa sijoittaja valitsi hetkellä $t = 0$ salkun $\pi = (\beta, \gamma)$, missä β ja γ olivat deterministisiä painoja. Dynaamisessa mallissa hetkellä $t < T$ salkun π_t painot β_t ja γ_t valitaan sillä informaatiolla, joka sijoittajalla on käytössä juuri ennen hetkeä t, jolloin osakkeiden uudet hinnat annetaan. Painot siis valitaan ennustettavasti.

4.23 Määritelmä. Prosessi $\pi = (\beta_t, \gamma_t)_{t \le T}$ on *sijoitusstrategia* hinnoittelumallissa $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, jos se on $\mathbb{F}$-*ennustettava* eli β_t ja γ_t ovat $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallisia. Sijoitusstrategian *varallisuus* V^π on stokastinen prosessi

$$(t, \omega) \mapsto V_t^\pi(\omega) \quad := \quad \beta_t(\omega) B_t + \sum_{i=1}^d \gamma_t^i(\omega) S_t^i(\omega).$$

Sijoitusstrategia π on *omavarainen* (*self-financing*), jos sen varallisuus toteuttaa differenssiyhtälön

$$\Delta V_t^\pi \quad = \quad \beta_t \Delta B_t + \sum_{i=1}^d \gamma_t^i \Delta S_t^i. \tag{4.24}$$

Omavaraisuus tarkoittaa siis sitä, että kaikki muutokset varallisuudessa hetkellä t tulevat osakkeiden ja pankkitilin muutoksista hetkellä t.

Seuraava väite antaa omavaraisuudelle budjettirajoitustulkinnan, mikä on itse asiassa olla yhtälöä (4.24) parempi määritelmä omavaraisuudelle. Yhtälö (4.24) on kuitenkin kanoninen määritelmä, koska se on helppo yleistää jatkuvaan aikaan.

4.25 Väite. *Sijoitusstrategia* $\pi = (\beta, \gamma)$ *on omavarainen jos ja vain jos se toteuttaa budjettirajoituksen*

$$\beta_t B_t + \sum_{i=1}^d \gamma_t^i S_t^i \quad = \quad \beta_{t+1} B_t + \sum_{i=1}^d \gamma_{t+1}^i S_t^i.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Seuraava osittaisintegrointikaavan diskreetti analogia on jatkossa hyödyllinen erityisesti diskonttauksen yhteydessä.

4.26 Apulause. *Olkoot* a *ja* b *lukujonoja. Tällöin*

$$\Delta(a_t b_t) \quad = \quad a_{t-1} \Delta b_t + b_{t-1} \Delta a_t + \Delta a_t \Delta b_t.$$

Todistus. Algebrallisten identiteettien todistaminen on tyypillisesti suoraviivaista, mutta työlästä. Vähennämme tylsää kaavanpyöritystä todistamalla aluksi epäsymmetrisen kaavan

$$\Delta(a_t b_t) \quad = \quad a_t \Delta b_t + b_{t-1} \Delta a_t.$$

Suoralla laskulla saamme

$$\begin{aligned}
\Delta(a_t b_t) &= a_t b_t - a_{t-1} b_{t-1} \\
&= a_t b_t - a_t b_{t-1} + a_t b_{t-1} - a_{t-1} b_{t-1} \\
&= a_t \Delta b_t + b_{t-1} \Delta a_t.
\end{aligned}$$

Enää pitää siis osoittaa, että

$$a_t \Delta b_t \quad = \quad a_{t-1}\Delta b_t + \Delta a_t \Delta b_t.$$

Tämäkin on suora lasku. Aloitamme yhtälön oikeasta puolesta.

$$\begin{aligned}
a_{t-1}\Delta b_t + \Delta a_t \Delta b_t &= a_{t-1}b_t - a_{t-1}b_{t-1} + (a_t - a_{t-1})(b_t - b_{t-1}) \\
&= a_{t-1}b_t - a_{t-1}b_{t-1} + a_t b_t - a_t b_{t-1} - a_{t-1}b_t + a_{t-1}b_{t-1} \\
&= a_t b_t - a_t b_{t-1} \\
&= a_t \Delta b_t.
\end{aligned}$$

Apulause on todistettu. □

Seuraava väite kertoo, miten omavaraisuus suhtautuu diskonttaukseen.

4.27 Väite. *Sijoitusstrategia* $\pi = (\beta, \gamma)$ *on omavarainen jos ja vain jos sen* diskontattu varallisuus $\bar{V}^\pi := V^\pi / B$ *toteuttaa differenssiyhtälön*

$$\Delta \bar{V}_t^\pi \quad = \quad \sum_{i=1}^{d} \gamma_t^i \Delta \bar{S}_t^i.$$

Todistus. Tämä väite on kohtalaisen helppo todistaa apulauseen 4.26 avulla. Jätämme varsinaisen kaavanpyörityksen harjoitustehtäväksi. □

Seuraava tulos on korotettu lauseeksi helppoudestaan huolimatta. Sen todistus perustuu seuraavaan keskeiseen seikkaan (tai pikemminkin todistaa seuraavan keskeisen seikan): jos M^i, $i \le d$, ovat martingaaleja ja γ^i, $i \le d$, ovat ennustettavia ja [rajoitettuja], niin kaavalla

$$\Delta Y_t \quad = \quad \sum_{i=1}^{d} \gamma_t^i \, \Delta M_t^i$$

määritelty prosessi Y on martingaali.

4.28 Lause. *Todennäköisyys* $\mathbf{Q}$ *on hinnoittelumallin* $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ *martingaalimitta jos ja vain jos diskontattu arvoprosessi* $\bar{V}^\pi$ *on* $(\mathbf{Q}, \mathbb{F})$*-martingaali kaikilla rajoitetuilla omavaraisilla sijoitusstrategioilla* π*.*

Todistus. Olkoon $\mathbf{Q}$ martingaalimitta. Väitteen 4.27 nojalla

$$\Delta \bar{V}_t^\pi \quad = \quad \sum_{i=1}^{d} \gamma_t^i \Delta \bar{S}_t^i.$$

Koska $\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}[\Delta\bar{S}_{t+1}^i] = 0$ kaikilla i, niin

$$\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[\bar{V}_{t+1}^\pi\right] \quad = \quad \sum_{i=1}^d \gamma_t^i \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[\Delta\bar{S}_t^i\right] \quad = \quad 0.$$

Siten $\Delta\bar{V}^\pi$ on martingaalidifferenssi eli $\bar{V}^\pi$ on martingaali.

Jos taas $\bar{V}^\pi$ on martingaali kaikilla rajoitetuilla omavaraisilla π, niin käänteinen väite, että $\mathbf{Q}$ on martingaalimitta seuraa valitsemalla sijoitusstrategioiksi osakkeet $i = 1, \ldots, d$ eli $\gamma = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. □

Dynaamisessa mallissa arbitraasi määritellään kuten yhden askeleen mallissa tarkaselemalla alkuhetkeä $t = 0$ ja eräpäivää $t = T$ välittämättä siitä, mitä välillä tapahtuu.

4.29 Määritelmä. Dynaamisen hinnoittelumallin $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ *arbitraasistrategia* on sellainen omavarainen [rajoitettu] sijoitusstrategia π, että

(i) $V_0^\pi = 0$,

(ii) $V_T^\pi \geq 0$,

(iii) $\mathbf{P}(V_T^\pi > 0) > 0$.

Jos hinnoittelumallissa ei ole arbitraasistrategioita, niin se on *arbitraasivapaa*

Seuraava tulos on helpompi puoli dynaamisesta rahoitusteorian I peruslauseesta. Sen todistus on oleellisesti sama, kuin yhden askeleen mallin vastaavan tuloksen todistus (lauseen 2.29 helpompi puoli).

4.30 Väite. *Jos hinnoittelumallissa* $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ *on ekvivalentti martingaalimitta, niin hinnoittelumalli on arbitraasivapaa.*

Todistus. Olkoon $\mathbf{Q}$ ekvivalentti martingaalimitta ja π alkuvaraton omavarainen sijoitusstrategia. Lauseen 4.28 nojalla $\bar{V}^\pi$ on martingaali. Siten

$$B_T \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[V_T^\pi\right] \quad = \quad \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\bar{V}_T^\pi\right] \quad = \quad \bar{V}_0^\pi \quad = \quad 0.$$

Koska $V_T^\pi \geq 0$ $\mathbf{P}$-melkein varmasti niin se on sitä myös $\mathbf{Q}$-melkein varmasti. Siten edellisestä seuraa, että $V_T^\pi = 0$ $\mathbf{Q}$-melkein varmasti. Koska $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$, niin $V_T^\pi = 0$ myös $\mathbf{P}$-melkein varmasti eli alkuvaraton omavarainen sijoitusstrategia π ei voi olla arbitraasistrategia. □

4.31 Huomautus. Tässä vaiheessa on hyvä mainita mallimme usein kirjoittamattomat oletukset eli rajoitukset: lainoille on sama osto- ja myyntikorko, osakkeilla ja johdannaisilla on joka hetkellä tietty kiinteä hinta, ei rajoitusta ostamiselle eikä myynnille: kaikkea voi ostaa ja myydä osissa ja kaikesta voi ottaa velkaa; myös osissa, osakkeita, johdannaisia, lainaa jne. on aina saatavilla, ei välityskuluja, ei osinkoja, (meidän) osto- ja myyntitapahtumat eivät vaikuta osakkeiden tai johdannaisten hintoihin. Jätämme harjoitustehtäväksi pohtia, missä mielessä nämä oletukset ovat perusteltuja. Ilkeästi tulkittunahan ne ovat älyttömiä. ◇

Harjoitustehtäviä lukuun 4

4.1. Olkoon c^{call} eurooppalaisen osto-option $(S_T - K)^+$ arbitraasivapaa hinta ja c^{put} vastaavan myyntioption $(K - S_T)^+$ arbitraasivapaa hinta. Osoita, että aina on voimassa osto–myynti-pariteetti

$$c^{\mathrm{put}} \quad = \quad \frac{K}{B_T} + c^{\mathrm{call}} - S_0.$$

4.2. Perustele huomautuksen 4.13 kaava (4.14).

4.3. Olkoon σ kovarianssimatriisi. Osoita, että on olemassa sellainen alakolmiomatriisi a, että $\sigma = a^{\mathsf{T}} a$.

4.4. Olkoon a jokin matriisi. Osoita, että $a^{\mathsf{T}} a$ on konvarianssimatriisi. Toisin sanoen on olemassa satunnaisvektori, jonka kovarianssimatriisi on juuri $a^{\mathsf{T}} a$.

4.5. Olkoon huomautuksessa 4.13 valkoiset hälyt ε^k, $k \le d$, binäärisiä eli

$$\mathbf{P}(\varepsilon^k_t = 1) \quad = \quad \frac{1}{2} \quad = \quad \mathbf{P}(\varepsilon^k_t = -1).$$

Koska tällainen malli on (a) arbitraasivapaa, (b) täydellinen.

4.6. Karakterisoi harjoituksen 4.5 monen osakkeen hinnoittelumallin ekvivalentit martingaalimitat.

4.7. Perustele esimerkki 4.10 lähtien määritelmästä 4.8.

4.8. Perustele paradoksihuomautus 4.11.

4.9. Todista väite 4.19.

4.10. Olkoon $\bar{R}^i$ diskontatun osakkeen $\bar{S}^i = S^i/B$ tuotto. Osoita, että $\mathbf{Q}$ on martingaalimitta jos ja vain jos $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_t \left[\bar{R}^i_{t+1}\right] = 0$ kaikilla t ja i.

4.11. Laske luentojen esimerkkiin 4.22 liittyvä mitanvaihtomartingaali $t \mapsto \mathbf{E}_t\left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}\right]$ ja osoita, että $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$.

4.12. Todista väite 4.25.

4.13. Todista väite 4.27.

4.14. Osoita, että diskreetissä ajassa dynaaminen arbitraasin määritelmä 4.29 ei muutu, jos ehto (ii) korvataan näennäisesti vahvemmalla ehdolla $V_t^\pi \geq 0$ *kaikilla* $t \leq T$.

4.15. Tarkastelemme yhden osakkeen hinnoittelumallia. Olkoon tuotto annettu Faman kaavalla $R_t = \mu + \sigma\varepsilon_t$, missä ε on valkoinen häly. Osoita, että aina on olemassa martingaalimitta $\mathbf{Q}$, mutta aina ei ole olemassa ekvivalenttia martingaalimittaa. Milloin ekvivalentti martingaalimitta on yksikäsitteinen?

Luku 5

Binomimalli

Everything should be made as simple as possible, but not simpler.
— Albert Einstein

Kolikkoavaruus

Tarkastelemme yhden osakkeen kiinteäkorkoista mallia. Hetkellä t osakkeella $S = (S_t)_{t \leq T}$ on vain kaksi tulosmahdollisuutta: "ylös" ja "alas". Laajennamme siis johdattelevan esimerkin yhden askeleen ja kahden tilan mallin dynaamiseksi malliksi, missä hetkellä t tilannetta kuvaa siirtymäkaavio

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & S_t(1+u) & & \text{tn:llä } p \\
 & & & \nearrow & & & \\
S_t & \longrightarrow & S_{t+1} & & & & \\
 & & & \searrow & & & \\
 & & & & S_t(1+d) & & \text{tn:llä } 1-p,
\end{array}
$$

missä $d < u$.

Palaamme todennäköisyyslaskennan juurille ja rakennamme hinnoittelumallin kolikonheittojen avulla. Klaava olkoon "ylös" ja kruuna "alas". Oletamme siis, että kaikki satunnaisuus tulee kolikosta. Otosavaruus Ω koostuu tällöin 0−1-jonoista

$$
\omega \quad = \quad \omega_1\omega_2\cdots\omega_{t-1}\omega_t\omega_{t+1}\cdots\omega_T,
$$

missä ω_t on joko 1 (klaava, ylös) tai 0 (kruuna, alas). Emme oleta, että kolikko on reilu. Olkoon $p \in (0,1)$ kolikon paino eli

$$
p \quad = \quad \mathbf{P}(\{1\}) \quad = \quad \mathbf{P}(\text{“klaava”}) \quad = \quad \mathbf{P}(\text{“ylös”}).
$$

Nyt Ω on äärellinen: siinä on 2^T alkioita. Emme siis voi törmätä mittateoreettisiin hirviöihin ja voimme huoletta valita σ-algebraksi $\mathcal{F}$ kaikki Ω:n osajoukot eli potenssijoukon $\operatorname{pot}\Omega$. Oletamme, että kolikonheitot ovat toistaan riippumattomia. Tällöin $\mathbf{P}$ on stationaarinen tulomitta

$$\mathbf{P}(\{\omega\}) \;=\; \mathbf{P}(\{\omega_1\cdots\omega_T\}) \;=\; \mathbf{P}(\{\omega_1\})\cdots\mathbf{P}(\{\omega_T\}),$$

joka määräytyy täysin parametrista p. Emme siis olettaneet, että kolikko on reilu. Alkeistapahtuman $\omega\in\Omega$ todennäköisyys voidaan nyt laskea usealla eri tavalla. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\{\omega_1\cdots\omega_T\}) &= \prod_{t=1}^{T}\Big(p\mathbf{1}_{\{1\}}(\omega_t)+(1-p)\mathbf{1}_{\{0\}}(\omega_t)\Big)\\
&= \prod_{t=1}^{T}p^{\omega_t}(1-p)^{1-\omega_t}\\
&= p^{\sum_{t=1}^{T}\omega_t}(1-p)^{\sum_{t=1}^{T}(1-\omega_t)}\\
&= p^{\#\{t\le T\,:\,\omega_t=1\}}(1-p)^{\#\{t\le T\,:\,\omega_t=0\}}.
\end{aligned}$$

Olkoon $\xi=(\xi_t)_{t\le T}$ *koordinaattikuvaus* eli *kolikkoprosessi*:

$$\xi_t(\omega) \;:=\; \omega_t.$$

Historia $\mathbb{F}:=\mathbb{F}^{\xi}$ muodostuu kolikonheitoista kerääntyvästä infomaatiosta:

$$\mathcal{F}_t \;=\; \sigma\left(\xi_1,\ldots,\xi_t\right) \;=\; \sigma\Big(\{\omega_1\cdots\omega_t\}\times\{0,1\}^{T-t}\,:\,\omega_s\in\{0,1\},s\le t\Big)\,.$$

Olemme rakentaneet kolikkoavaruuden.

5.1 Määritelmä. $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbf{P})$ on *kolikkoavaruus*, jos

(i) $\Omega=\{0,1\}^T$,

(ii) $\mathcal{F}=\operatorname{pot}\{0,1\}^T$,

(iii) $\mathcal{F}_t=\operatorname{pot}\{0,1\}^t\,\times\,\{0,1\}^{T-t}$,

(iv) $\mathbf{P}$ on stationaarinen tulomitta.

Kolikkoavaruusmallissa on vain yksi estimoitava parametri: $p=\mathbf{P}(\{1\})$.

Osakekurssin S on oltava $\mathbb{F}$-sopiva. Tämä tarkoittaa sitä, että S_t riippuu ω:sta ainoastaan ensimmäisen t:n koordinaatin eli kolikonheiton kautta:

$$S_t(\omega) \;=\; S_t(\omega_1\cdots\omega_t\cdots\omega_T) \;=\; S_t(\omega_1\cdots\omega_t).$$

Oletamme Faman otaksuman (4.12), että tulevat tuotot ovat riippumattomia menneisyydestä. Toisin sanoen

$$\begin{aligned} R_{t+1}(\omega) &= \frac{S_{t+1}(\omega) - S_t(\omega)}{S_t(\omega)} \\ &= \frac{S_{t+1}(\omega_1 \cdots \omega_{t+1}) - S_t(\omega_1 \cdots \omega_t)}{S_t(\omega_1 \cdots \omega_t)} \\ &= R_{t+1}(\omega_{t+1}). \end{aligned}$$

Tuotto R, joka on jokaisella hetkellä aina joko u tai d, voidaan esittää kolikkoprosessin ξ avulla:

$$R_t = d + (u-d)\xi_t. \tag{5.2}$$

Koska S saadaan tuottoprosessista R kaavalla

$$S_t(\omega) = S_t(\omega_1 \cdots \omega_t) = S_0 \prod_{s \le t} \Big(1 + R_s(\omega_s)\Big),$$

niin ξ:n tasolla mallimme on

$$S_t(\omega) = S_t(\omega_1 \cdots \omega_t) = S_0 \prod_{s \le t} \Big((1+d) + (u-d)\xi_s(\omega_s)\Big).$$

Faman otaksuma (4.12) taas sanoi, että

$$R_t = \mu + \sigma\varepsilon_t,$$

missä ε on valkoinen häly. Kolikkoavaruudessa tuotto taas on kaavan (5.2) mukainen, missä ξ on kolikkoprosessi. Koska kolikkoprosessi on positiivinen, se ei voi olla valkoinen häly. Se on kuitenkin jono riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joten valkoinen häly saadaan kaivettua siitä esiin standardoimalla. Nimittäin standardoitu prosessi

$$\varepsilon_t := \frac{\xi_t - \mathbf{E}[\xi_t]}{\sqrt{\mathbf{Var}[\xi_t]}} = \frac{\xi_t - p}{\sqrt{p(1-p)}}$$

on valkoinen häly. Pakottamalla tämä ε kaavaan (5.2) saamme Fama-muotoisen kaavan tuotolle:

$$\begin{aligned} R_t &= d + (u-d)\xi_t \\ &= (u-d)p + d + (u-d)\sqrt{p(1-p)}\frac{\xi_t - p}{\sqrt{p(1-p)}} \\ &= \Big((u-d)p + d\Big) + (u-d)\sqrt{p(1-p)}\,\varepsilon_t. \end{aligned} \tag{5.3}$$

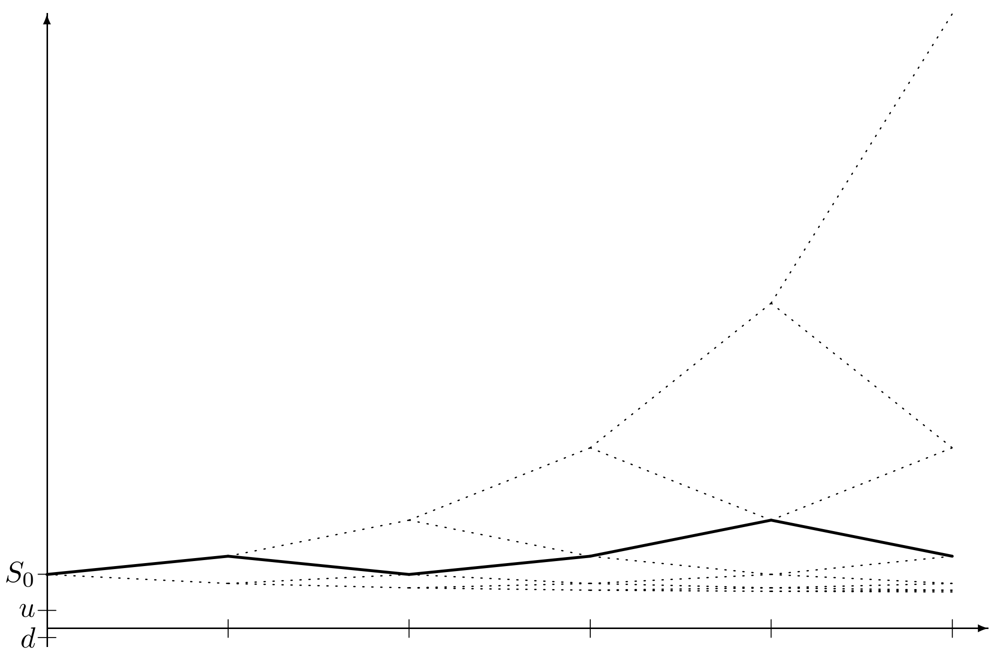
Parametrien u, d, p ja μ, σ välinen yhteys on siis

$$\begin{aligned}\mu &= \mu(u,d,p) &= (u-d)p+d \\ \sigma &= \sigma(u,d,p) &= (u-d)\sqrt{p(1-p)}.\end{aligned}$$

Lisäksi kaavassa (5.3) prosessi $\varepsilon = \varepsilon(p)$ on valkoinen häly, joka saa arvot

$$\frac{1-p}{\sqrt{p(1-p)}} \qquad \text{ja} \qquad \frac{-p}{\sqrt{p(1-p)}}$$

todennäköisyyksin p ja $1-p$.



Polku $S_\cdot(\omega)$ mahdollisuuksiensa hilassa; $S_0 = 3u, d = -0{,}5u$.

Olemme rakentaneet binomimallin.

5.4 Määritelmä. Yhden osakkeen hinnoittelumalli $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ on *binomimalli*, jos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ on kolikkoavaruus ja

(i) $B_t = (1+r)^t$ eli $\Delta B_t / B_{t-1} = r$,

(ii) $S_t = S_0 \prod_{s\le t}\Big((1+d) + (u-d)\xi_s\Big)$ eli $R_t = d + (u-d)\xi_t$,

Mallin parametrit ovat u, d, r ja p.

5.5 Huomautus. Todellisessa maailmassa parametrit u, d ja p pitää tietysti estimoida datasta. Jos $x_1, \ldots, x_N$ ovat havaitut osaketuotot, niin luonnollinen estimaatti p:lle on niiden tuottojen x_n, $n = 1, \ldots, N-1$, osuus, joilla $x_{n+1} > x_n$. Parametrien u ja d estimointi on hieman haasteellisempaa. Yksi tapa on estimoida ensin tuotto-odotus μ ja volatiliteetti σ tavalliseen tapaan käyttäen otoskeskiarvoa ja otoshajontaa ja ratkaista sitten parametrit u ja d, kun p, μ ja σ on annettu. Kaavojen $u = u(\mu, \sigma, p)$ ja $d = d(\mu, \sigma, p)$ keksimisen jätämme harjoitustehtäväksi. $\diamond$

Osakkeen S kehitystä kuvaa binomimallissa *binomipuu*

$$
\begin{array}{ccccccl}
 & & & & & & S_3(111) \\
 & & & & & \nearrow & \\
 & & & & S_2(11) & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & S_1(1) & & & & S_3(110) = S_3(101) = S_3(011) \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
S_0 & & & & S_2(10) = S_2(01) & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & S_1(0) & & & & S_3(100) = S_3(010) = S_3(001) \\
 & & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & S_2(00) & & \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & S_3(000).
\end{array}
$$

Jos $u = 1/5$, $d = -2/5$ ja $S_0 = 150$, niin saamme numeerisen mallin

$$
\begin{array}{ccccccl}
 & & & & & & 259{,}20 \\
 & & & & & \nearrow & \\
 & & & & 216 & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & 180 & & & & 129{,}60 \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
150 & & & & 108 & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & 90 & & & & 64{,}80 \\
 & & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & 54 & & \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & 32{,}40.
\end{array}
$$

Nimitys "binomimalli" tulee siitä, että osakkeen arvo S_t riippuu kolikkomuuttujista $\xi_1, \ldots, \xi_t$ ainoastaan niiden summan

$$X_t \;=\; \sum_{s=1}^{t} \xi_s$$

kautta ja tämä summa X_t on binomijakautunut parametrein t ja p:

$$\mathbf{P}(X_t = x) \;=\; \binom{t}{x} p^x (1-p)^{t-x}.$$

Osakekkeen S_t binomimuuttujan X_t välinen yhteys on helppo nähdä:

$$S_t \;=\; S_0(1+u)^{X_t}(1+d)^{t-X_t}, \tag{5.6}$$

$$X_t \;=\; \log \frac{S_t}{S_0(1+d)^t} \Big/ \log \frac{1+u}{1+d}, \tag{5.7}$$

missä log on mikä tahansa logaritmi. Käyttämällä yhteyksiä (5.6) ja (5.7) voimme laskea satunnaismuuttujan S_t jakauman. Nimittäin, jos

$$a_t(y) \;=\; a_t(y; u, d, S_0) \;:=\; \log \frac{y}{S_0(1+d)^t} \Big/ \log \frac{1+u}{1+d},$$

niin

$$\mathbf{P}(S_t = y) \;=\; \mathbf{P}\Big(X_t = a_t(y)\Big) \;=\; \binom{t}{a_t(y)} p^{a_t(y)} (1-p)^{t-a_t(y)},$$

kun $a_t(y) \in \{0, \ldots, t\}$ ja 0 muulloin. Lopuksi näemme, että johtamiemme kaavojen avulla prosessit S, R ja ξ voidaan esittää toistensa avulla "katsomatta tulevaisuuteen". Tästä seuraa, että ne virittävät samat historiat: $\mathbb{F}^S = \mathbb{F}^R = \mathbb{F}^\xi$.

Seuraavaksi laskemme ehdollisia odotusarvoja binomimallissa.

5.8 Apulause. *Olkoon F satunnaismuuttuja kolikkoavaruudelta. Tällöin*

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_t\left[F\right](\omega_1 \cdots \omega_t) \\ &= \sum_{k=0}^{T-t} \sum_{x_{t+1}\cdots x_T \in A_k} F(\omega_1 \cdots \omega_t x_{t+1} \cdots x_T) p^{T-t-k}(1-p)^k, \end{aligned} \tag{5.9}$$

missä

$$A_k \;=\; \left\{ x_{t+1} \cdots x_T \in \{0,1\}^{T-t} \;:\; \sum_{s=t+1}^{T} x_s = k \right\}.$$

Todistus. Jokainen satunnaismuuttuja kolikkoavaruudelta voidaan kirjoittaa kolikkoprosessin avulla: on olemassa sellainen funktio $f : \{0,1\}^T \to \mathbb{R}$, että

$$F(\omega_1 \cdots \omega_T) \quad = \quad f\Big(\xi_1(\omega_1), \ldots, \xi_T(\omega_T)\Big).$$

Käyttämällä kolikkoprosessia ja poistamalla kaksoissummauksen huomaamme, että (5.9) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_t\left[f(\xi_1, \ldots, \xi_T)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{T-t} \sum_{x_{t+1}\cdots x_T \in A_k} f(\xi_1, \ldots, \xi_t, x_{t+1}, \ldots, x_T) p^{T-t-k}(1-p)^k \\
&= \sum_{x_{t+1}\cdots x_T \in \{0,1\}^{T-t}} f(\xi_1, \ldots, \xi_t, x_{t+1}, \ldots, x_T)\mathbf{P}(\xi_{t+1}=x_{t+1})\cdots\mathbf{P}(\xi_T=x_T).
\end{aligned}$$

Lopuksi huomaamme, että

$$\mathbf{P}(\xi_{t+1}=x_{t+1})\cdots\mathbf{P}(\xi_T=x_T) \quad = \quad \mathbf{P}(\xi_{t+1}=x_{t+1}, \ldots, \xi_T=x_T \,|\, \xi_1, \ldots, \xi_t)$$

ja väite on selvä. □

Kaavan (5.9) avulla voimme laskea minkä tahansa satunnaismuuttujan ehdollisen odotusarvon binomimallissa. Kaavassa on kuitenkin 2^{T-t} summattavaa, joten laskut voivat olla työläitä jopa tehokkaalle tietokoneelle. Toisaalta, jos satunnaismuuttuja riippuu ω:sta ainostaan kolikkosumman X_{t+s}, tai yhtä hyvin osakkeen hinnan S_{t+s}, kautta niin pääsemme helpommalla. Seuraava aputulos kertoo miten.

5.10 Apulause. *Olkoon* $X_s = \xi_1 + \cdots + \xi_s$ *ja* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Tällöin*

$$\mathbf{E}_t\left[g(X_{t+s})\right] \quad = \quad \sum_{x=0}^{s} g(X_t + x)\binom{s}{x} p^x (1-p)^{s-x} \tag{5.11}$$

Todistus. Todistuksen idea on katsoa läpi kaikki mahdolliset muutokset hetkestä t hetkeen $t+s$. Otamme käyttöön eteenpäin katsovan aikadifferenssioperaattorin:

$$\Delta_s X_t \quad := \quad X_{t+s} - X_t.$$

Tarkastamalla kaikki mahdolliset muutokset $\Delta_s X_t$ huomaamme, että

$$g(X_{t+s}) \quad = \quad \sum_{x=0}^{s} g(X_t + x)\mathbf{1}_{\{\Delta_s X_t = x\}}.$$

Koska tapahtumat $\{\Delta_s X_t = x\}$ ovat riippumattomia σ-algebrasta $\mathcal{F}_t$ ja $\Delta_s X_t$ on $\mathrm{Bin}(s,p)$-jakautunut, niin saamme

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_t\left[g(X_{t+s})\right] &= \sum_{x=0}^{s} \mathbf{E}_t\left[g(X_t+x)\mathbf{1}_{\{\Delta_s X_t = x\}}\right] \\
&= \sum_{x=0}^{s} g(X_t+x)\mathbf{E}_t\left[\mathbf{1}_{\{\Delta_s X_t = x\}}\right] \\
&= \sum_{x=0}^{s} g(X_t+x)\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{\Delta_s X_t = x\}}\right] \\
&= \sum_{x=0}^{s} g(X_t+x)\mathbf{P}(\Delta_s X_t = x) \\
&= \sum_{x=0}^{s} g(X_t+x)\binom{s}{x} p^x (1-p)^{s-x}.
\end{aligned}
$$

Olemme johtaneet kaavan (5.11). □

Arbitraasi ja täydellisyys

Binomimallin arbitraasivapaus on helppo määrittää. Itse asiassa tilanne on tismalleen sama, kuin yhden askeleen kahden tilan mallissa eli korollisessa keskeisessä lelumallissa.

5.12 Väite. *Binomimalli on arbitraasivapaa jos ja vain jos $d < r < u$.*

Todistus. Jos $r \le d$, niin yksinkertainen "osta ja pidä"-sijoitusstrategia antaa arbitraasin: otamme hetkellä $t = 0$ lainaa S_0:n verran ja ostamme yhden osakkeen. Hetkellä T meillä on velkaa $S_0(1+r)^T$:n verran, mutta osakkeissa oleva varallisuutemme on pahimmassakin tapauksessa $S_0(1+d)^T \ge S_0(1+r)^T$ ja positiivisella todennäköisyydellä pahin mahdollinen ei sattunut. Jos $r \ge u$, niin teemme arbitraasia kuten edellä, mutta myymällä lyhyeksi.

Olkoon sitten $d < r < u$. Tällöin, ja vain tällöin, voimme määritellä ekvivalentin martingaalimitan $\mathbf{Q}$ kolikkoavaruuteen asettamalla

$$
q \quad = \quad \mathbf{Q}(\xi_t = 1) \quad := \quad \frac{r-d}{u-d}. \tag{5.13}
$$

Arbitraasivapaus seuraa nyt väitteestä 4.30. □

Binomimallin ekvivalentti martingaalimitta määräytyy ehdosta (5.13). Siten se on välttämättä yksikäsiteinen.

Binomimalli on aina täydellinen: jokainen vaade voidaan toistaa jollakin omavaraisella strategialla. Emme todista tätä tässä. Sen sijaan todistamme sen seuraavissa osioissa konstruoimalla “kädet savessa” kaikkien vaateiden suojausstrategiat.

Differenssioperaattori Δ operoi ajassa: $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$. Seuraavat kotikutoiset operaattorit “operoivat sattumassa”.

5.14 Määritelmä. Olkoon X sopiva prosessi kolikkoavaruudelta. Hetkellä t sen *ennustettava muutos* tai *ennustettava Malliavin-differenssi* ∇X_t on $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallinen satunnaismuuttuja

$$\nabla X_t(\omega_1 \cdots \omega_{t-1}) \quad := \quad X_t(\omega_1 \cdots \omega_{t-1}1) - X_t(\omega_1 \cdots \omega_{t-1}0).$$

Ennustettava tappio $\nabla^- X_t$ ja *ennustettava voitto* $\nabla^+ X_t$ ovat $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallisia satunnaismuuttujia

$$\begin{aligned}
\nabla^- X_t(\omega_1 \cdots \omega_{t-1}) &:= X_t(\omega_1 \cdots \omega_{t-1}0) - X_{t-1}(\omega_1 \cdots \omega_{t-1}), \\
\nabla^+ X_t(\omega_1 \cdots \omega_{t-1}) &:= X_t(\omega_1 \cdots \omega_{t-1}1) - X_{t-1}(\omega_1 \cdots \omega_{t-1}).
\end{aligned}$$

5.15 Apulause. *Olkoon M sopiva prosessi kolikkoavaruudelta. Tällöin M on martingaali jos ja vain jos*

$$p \quad = \quad -\frac{\nabla^- M_t}{\nabla M_t}. \tag{5.16}$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

5.17 Huomautus. Kaavaa (5.16) kannattaa verrata martingaalimitan kaavaan. Jos $r = 0$, niin martingaalimitta määräytyy kaavasta

$$q \quad = \quad -\frac{d}{u-d}.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}
\nabla^- S_t &= S_{t-1} d, \\
\nabla S_t &= S_{t-1} \nabla R_t \quad = \quad S_{t-1}(u-d).
\end{aligned}$$

Siispä

$$-\frac{d}{u-d} \quad = \quad -\frac{\nabla^- S_t}{\nabla S_t}.$$

Jos $r \neq 0$, niin diskontattu osakekurssi $\bar{S}$ on $\mathbf{Q}$-martingaali, kun

$$q \quad = \quad \frac{r-d}{u-d}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\nabla^- \bar{S}_t &= \frac{1}{B_t} S_{t-1}(d-r), \\ \nabla \bar{S}_t &= \frac{1}{B_t} \nabla S_t = \frac{1}{B_t} S_{t-1}(u-d),\end{aligned}$$

joten

$$\frac{r-d}{u-d} = -\frac{\nabla^- \bar{S}_t}{\nabla \bar{S}_t}.$$

Yllä olemme hieman oikoneet operaattorikalkyylissä. Jätämme yksityiskohtien tarkistamisen harjoitustehtäväksi. ◇

Eurooppalaiset optiot

Olkoon $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ arbitraasivapaa binomimalli ja $\mathbf{Q}$ sen ekvivalentti martingaalimitta.

Olkoon F vaade kolikkoavaruudelta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$. Integroituvuuttaa tai [rajoittuneiosuutta] ei tarvitse erikseen olettaa, sillä kaikki satunnaismuuttujat kolikkoavaruudelta ovat rajoitettuja. Tämä johtuu siitä yksinkertaisesta syystä, että binomimallissa $\Omega = \{0,1\}^T$ on äärellinen. Jos F on toistettavissa eli on olemassa sellainen omavarainen sijoitusstrategia π, että $F = V_T^\pi$, niin lauseen 4.28 nojalla toistostrategiaan π liittyvä diskontattu varallisuus $\bar{V}^\pi$ on $(\mathbf{Q}, \mathbb{F})$-martingaali. Lisäksi $\bar{V}^\pi$ toistaa diskontatun vaateen $\bar{F} := F/B_T$. Erityisesti diskontatussa maailmassa tarvitsemme hetkellä $t \le T$ varallisuuden $\bar{V}_t^\pi$ diskontatun vaateen $\bar{F}$ toistamiseen. Poistamalla diskonttaukset, eli prolongaamalla hetkeen t, saamme seuraavan tuloksen.

5.18 Väite. *Olkoon F toistettava vaade arbitraasivapaassa binomimallissa ja π sen toistostrategia. Tällöin F:n toistohinta hetkellä $t \le T$ on*

$$c_t(F) = V_t^\pi = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}[F]. \tag{5.19}$$

Erityisesti $c_t(F)$ on yksikäsitteinen ja F:n tasapuolinen hinta hetkellä 0 on

$$c(F) = c_0(F) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\bar{F}].$$

Toistohinta $c_t(F)$ on myös arbitraasivapaa hinta. Tämä pätee kaikissa arbitraasivapaissa täydellisissä hinnoittelumalleissa. Heuristisesti syy on se, että tällöin vaade F voidaan *samaistaa* sen toistostrategian π kanssa. Samasta syystä täydellisissä arbitraasivapaissa hinnoittelumalleissa ei voi olla useita arbitraasivapaita hintoja. Tästä aiheesta puhumme tarkemmin seuraavassa luvussa.

5.20 Esimerkki. Laskemme eurooppalaisen osto-option $F = (S_T - K)^+$ arbitraasivapaan hinnan. Väitteen 5.18 nojalla toistohinta saadaan kaavalla

$$c(F) \;=\; \frac{1}{(1+r)^T}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[(S_T - K)^+\right].$$

Olkoon

$$x_0 \;:=\; \min\left\{x \geq 0 \,:\, S_0(1+u)^x(1+d)^{T-x} > K\right\}$$

eli x_0 on se määrä klaavoja, joka tarvitaan, että osakekurssi ylittää lunastushinnan K. Jos $x_0 > T$, niin $K \geq \max_t S_t$ ja optio on aina arvoton eli $c(F) = 0$. Muussa tapauksessa voimme käyttää kaavaa (5.11) ja saamme

$$\begin{aligned} c(F) \;&=\; \frac{1}{(1+r)^T}\Bigg(S_0 \sum_{x=x_0}^{T}(1+u)^x(1+d)^{T-x}\binom{T}{x}q^x(1-q)^{T-x} \\ &\qquad - K\sum_{x=x_0}^{T}\binom{T}{x}q^x(1-q)^{T-x}\Bigg). \end{aligned}$$

Tätä kaavaa kutsutaan *Cox–Ross–Rubinstein-hinnoittelukaavaksi.* Se on myöhemmin esitettävän legendaarisen Black–Scholes-hinnoittelukaavan diskreettiaikainen analogia. ◇

Siirrymme nyt etsimään toistostrategioita.

Tarkastelemme aluksi tilannetta juuri ennen eräpäivää eli hetkellä $T-1$. Tällöin vaateen kirjoittajalla eli myyjällä on käytössä varallisuus

$$c_{T-1}(F) \;=\; \frac{1}{1+r}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_{T-1}[F].$$

Kirjoittaja haluaa suojata vaateen F hetkellä T. Kuten yhden askeleen tapauksessa, on kirjoittajan ratkaistava $\mathcal{F}_{T-1}$-mitalliset painot β_T ja γ_T yhtälöparista

$$\begin{aligned} \beta_T(\omega_1\cdots\omega_{T-1})(1+r)^T + \gamma_T(\omega_1\cdots\omega_{T-1})S_T(\omega_1\cdots\omega_{T-1}1) \\ = F(\omega_1\cdots\omega_{T-1}1), \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} \beta_T(\omega_1\cdots\omega_{T-1})(1+r)^T + \gamma_T(\omega_1\cdots\omega_{T-1})S_T(\omega_1\cdots\omega_{T-1}0) \\ = F(\omega_1\cdots\omega_{T-1}0). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Ratkaisu on helppo laskea. Esitämme vain osakepainon γ_T ratkaisun. Pankkitilipainon β_T voimme nimittäin aina ratkaista yhtälöstä

$$V^{\pi}_{T-1} = \beta_T(1+r)^{T-1} + \gamma_T S_{T-1},$$

sillä varallisuusprosessin V^π tiedämme kaavasta (5.19). Ratkaisemalla yhtälöparin (5.21) – (5.22) saamme kaavan

$$\gamma_T(\omega_1\cdots\omega_{T-1}) \quad = \quad \frac{F(\omega_1\cdots\omega_{T-1}1) - F(\omega_1\cdots\omega_{T-1}0)}{S_T(\omega_1\cdots\omega_{T-1}1) - S_T(\omega_1\cdots\omega_{T-1}0)}.$$

Käyttämällä ennustettavaa Malliavin-differenssiä voimme kirjoittaa tämän kaavan muodossa

$$\gamma_T \quad = \quad \frac{\nabla F}{\nabla S_T} \quad := \quad \frac{\nabla V_T^\pi}{\nabla S_T}.$$

Kun muistamme, että $\nabla S_T = S_{T-1}\nabla R_T = S_{T-1}(u-d)$, niin saamme kaavan

$$\gamma_T \quad = \quad \frac{\nabla V_T^\pi}{S_{T-1}(u-d)}.$$

Jatkamalla edellä kuvatulla tavalla binomipuussa latvasta juureen löydämme toistostrategian π.

5.23 Lause. *Arbitraasivapaassa binomimallissa kaikki vaateet F voidaan toistaa. Toistostrategia on yksikäsitteinen ja se määräytyy osakepainosta*

$$\gamma_t \quad = \quad \frac{\nabla V_t^\pi}{S_{t-1}(u-d)} \quad = \quad \frac{\nabla \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}[F]}{S_{t-1}(u-d)(1+r)^{T-t}}$$

ja varallisuudesta

$$V_t^\pi \quad = \quad \frac{1}{(1+r)^{T-t}}\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}[F].$$

Todistus. Tavallaan olemme tämän lauseen jo todistaneetkin. Jätämme yksityiskohtien kokoamisen harjoitustehtäväksi. □

5.24 Esimerkki. Tarkastelemme kahden askeleen binomipuuta, jossa $S_0 = 4$, $u = 1$, $d = -0,5$ ja $r = 0,25$. Itse puu on siis

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 16 \\
 & & & \nearrow & \\
 & & 8 & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
4 & & & & 4 \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & 2 & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & 1.
\end{array}$$

Tässä mallissa martingaalimitta on symmetrinen:

$$\begin{aligned} q &= \frac{r-d}{u-d} \\ &= \frac{0{,}25-(-0{,}5)}{1-(-0{,}5)} \\ &= 0{,}5. \end{aligned}$$

Olkoon F *look-back*-optio

$$F = f(S) = \max_{0\le t\le 2}(S_t - 5)^+.$$

Laskemme option F arvoprosessin V käymällä binomipuuhun latvasta. Latvahetkellä $t = T = 2$ tietysti $V_2 = F$ eli

$$\begin{aligned} V_2(11) &= \max\left\{(4-5)^+,(8-5)^+,(16-5)^+\right\} = 11, \\ V_2(10) &= \max\left\{(4-5)^+,(8-5)^+,(4-5)^+\right\} = 3, \\ V_2(01) &= \max\left\{(4-5)^+,(2-5)^+,(4-5)^+\right\} = 0, \\ V_2(00) &= \max\left\{(4-5)^+,(2-5)^+,(1-5)^+\right\} = 0. \end{aligned}$$

Look-back-option arvot hetkellä $t = 1$ ovat

$$\begin{aligned} V_1(1) &= \frac{1}{1+r}\mathbf{E}_1^{\mathbf{Q}}[V_2](1) = \frac{1}{1{,}25}\left(11\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2}\right) = 5{,}60, \\ V_1(0) &= \frac{1}{1+r}\mathbf{E}_1^{\mathbf{Q}}[V_2](0) = \frac{1}{1{,}25}\left(0\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Laskemme sitten suojaushinnan eli option arvon hetkellä $t = 0$:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{(1+r)^2}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[V_2] \\ &= \frac{1}{1{,}25}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{1}{1{,}25}\mathbf{E}_1^{\mathbf{Q}}[V_2]\right] \\ &= \frac{1}{1{,}25}\left(5{,}60\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}\right) \\ &= 2{,}24. \end{aligned}$$

Option F arvoprosessipuu, joka ei ole binomipuu, on siis

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & 11 \\
 & & & \nearrow & \\
 & & 5{,}60 & \searrow & \\
 & \nearrow & & & 3 \\
2{,}24 & & & & \\
 & \searrow & & & 0 \\
 & & 0 & \nearrow & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & 0.
\end{array}
$$

Lopuksi etsimme suojausstrategian. Hetkellä $t = 0$

$$\gamma_1 \;=\; \frac{\nabla V_1}{S_0(u-d)} \;=\; \frac{V_1(1) - V_1(0)}{4 \cdot 3/2} \;=\; 0{,}93.$$

Hetkellä $t = 1$ saamme osakepainoiksi

$$
\begin{aligned}
\gamma_2(1) &= \frac{\nabla V_2(1)}{S_1(1)(u-d)} = \frac{V_2(11) - V_2(10)}{8 \cdot 3/2} = 0{,}67. \\
\gamma_2(0) &= \frac{\nabla V_2(1)}{S_1(0)(u-d)} = \frac{V_2(01) - V_2(00)}{2 \cdot 3/2} = 0.
\end{aligned}
$$

Pankkipainot β saamme kaavasta

$$\beta_t \;=\; \frac{V_{t-1} - \gamma_t S_{t-1}}{B_{t-1}}.$$

Hetkellä $t = 0$

$$\beta_1 \;=\; 2{,}24 - 0{,}93 \cdot 4 \;=\; -1{,}48$$

ja hetkellä $t = 1$

$$
\begin{aligned}
\beta_2(1) &= \frac{1}{1{,}25}(5{,}60 - 0{,}67 \cdot 8) = 0{,}19, \\
\beta_2(0) &= \frac{1}{1{,}25}(0 - 0 \cdot 2) = 0.
\end{aligned}
$$

$\diamond$

Lause 5.23 käsittelee yleisiä johdannaisia. Oletamme nyt, että johdannainen F ei ole polkuriippuvainen, vaan muotoa $F(\omega) = f\left(S_T(\omega)\right)$. Koska S_T voidaan lausua kolikkosumman X_T avulla, niin voimme yhtä hyvin olettaa, että $F(\omega) = \tilde{f}\left(X_T(\omega)\right)$. Tässä tapauksessa voimme esitää tulokset 5.18 ja 5.23 helpommin laskettavassa muodossa. Nimittäin kaavan (5.11) nojalla

$$\begin{aligned} V_t^\pi &= \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}[F] \\ &= \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[\tilde{f}(X_T)\right] \\ &= \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \sum_{x=0}^{T-t} \tilde{f}(X_t + x)\binom{T-t}{x} q^x (1-q)^{T-t-x}. \end{aligned}$$

Huomaamme, että V_t^π riippuu ω:sta ainoastaan kolikkosumman X_t, tai yhtä hyvin osakkeen hinnan S_t, kautta. Toisin sanoen V^π on *markoviaaninen*:

$$V_t^\pi = v_t(S_t).$$

Kun vielä huomaamme, että

$$\nabla V_t^\pi = v_t\Big(S_{t-1}(1+u)\Big) - v_t\Big(S_{t-1}(1+d)\Big),$$

olemme löytäneet tuloksille 5.18 ja 5.23 helpommin laskettavan version.

5.25 Väite. *Binomimallissa polkuriippumattoman johdannaisen $F = f(S_T)$ toistohinta hetkellä $t \le T$ on*

$$V_t^\pi = v_t(S_t) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \sum_{x=0}^{T-t} \tilde{f}(X_t + x)\binom{T-t}{x} q^x (1-q)^{T-t-x},$$

missä $\tilde{f}(X_t) = f(S_t)$. Toistoon liittyvät osakepainot saadaan kaavasta

$$\gamma_t = g_t(S_{t-1}) := \frac{v_t(S_{t-1}(1+u)) - v_t(S_{t-1}(1+d))}{S_{t-1}(u-d)}. \tag{5.26}$$

5.27 Huomautus. Käytännössä ei yleensä kannata käyttää väitteen 5.25 kaavaa. Sen sijaan $v_t(S_t)$ kannattaa laskea rekursiivisesti käyttäen tietoa

$$v_T(S_T) = f(S_T)$$

ja rekursiokaavaa

$$\begin{aligned} v_{t-1}(S_{t-1}) &= \frac{1}{(1+r)^{T-t-1}} \mathbf{E}_{t-1}^{\mathbf{Q}}\Big[f(S_T)\Big] \\ &= \frac{1}{1+r} \mathbf{E}_{t-1}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{1}{(1+r)^{T-t}} \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\Big[f(S_T)\Big]\right] \\ &= \frac{1}{1+r} \mathbf{E}_{t-1}^{\mathbf{Q}}\Big[v_t(S_t)\Big] \\ &= \frac{1}{1+r}\Big(v_t\left(S_{t-1}(1+u)\right) q + v_t\left(S_{t-1}(1+d)\right)(1-q)\Big). \end{aligned} \tag{5.28}$$

◇

5.29 Esimerkki. Tarkastelemme digitaalioptiota

$$F(\omega) = f(S_2(\omega)) = \mathbf{1}_{\{4\}}(S_2(\omega_2))$$

esimerkin 5.24 binomipuussa. Nyt $X_t = \log_4\left(S_t 2^{t-2}\right)$ ja $f(S_t) = \tilde{f}(X_t)$, missä $\tilde{f}(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$. Siten, väitteen 5.25 nojalla,

$$v_t(S_t) \;=\; \frac{1}{2{,}50^{2-t}} \sum_{x=0}^{2-t} \mathbf{1}_{\{1\}}\left(\log_4\left(S_t 2^{t-2}\right) + x\right) \binom{2-t}{x}.$$

Emme kuitenkaan käytä tätä laskuissamme, vaan rekursiota (5.28).

Laskemme varallisuusprosessin. Eräpäivänä tietysti $v_2(S_2) = f(S_2)$ eli

$$v_2(16) = 0, \quad v_2(4) = 1, \quad v_2(1) = 0.$$

Hetkellä $t = 1$ saamme rekursiokaavasta (5.28), että

$$\begin{aligned} v_1(8) &= \frac{1}{1{,}25}\left(v_2(16)\cdot\frac{1}{2} + v_2(4)\cdot\frac{1}{2}\right) &= 0{,}40, \\ v_1(2) &= \frac{1}{1{,}25}\left(v_2(4)\cdot\frac{1}{2} + v_2(1)\cdot\frac{1}{2}\right) &= 0{,}40 \end{aligned}$$

(se, että v_1 on vakio, on sattumaa). Hetkellä $t = 0$ saamme, niin ikään rekursiokaavasta (5.28), suojaushinnaksi

$$v_0 \;=\; v_0(4) \;=\; \frac{1}{1{,}25}\left(v_1(8)\cdot\frac{1}{2} + v_1(2)\cdot\frac{1}{2}\right) \;=\; 0{,}32.$$

Laskemme lopuksi osakkeiden suojauspainot. Hetkellä $t = 0$ saamme käyttämällä kaavaa (5.26)

$$g_1(4) \;=\; \frac{v_1(8) - v_1(2)}{4\cdot 3/2} \;=\; 0.$$

Hetkellä $t = 0$ emme siis tee vielä mitään. Hetkellä $t = 1$ kaava (5.26) antaa

$$\begin{aligned} g_2(8) &= \frac{v_2(16) - v_2(4)}{8\cdot 3/2} = \frac{-1}{12} = -0{,}08, \\ g_2(2) &= \frac{v_2(4) - v_2(1)}{2\cdot 3/2} = \frac{1}{3} = 0{,}33. \end{aligned}$$

◇

Amerikkalaiset optiot

Amerikkalainen optio on stokastinen prosessi $F = (F_t)_{t \le T}$, missä F_t, $t \le T$, on option *sisäinen arvo*: jos option haltija käyttää option F hetkellä t, niin hän saa F_t:n verran euroja. Luonnollisesti oletamme, että F on $\mathbb{F}$-sopiva prosessi eli sisäinen arvo on jokaisella hetkellä tiedossa.

Tarkastelemme aluksi tilannetta option kirjoittajan eli myyjän kannalta. Option F haltija voi käyttää optionsa minä hetkenä hyvänsä eräpäivään mennessä. Kirjoittajan tappio on siis F_τ, missä τ on se hetki jolloin haltija käyttää option. Kirjoittaja ei tiedä koska haltija aikoo käyttää optionsa. Hän voi kuitenkin laskeutua binomipuun latvasta juureen seuraavasti. Oletamme, että optiota ei ole käytetty hetkellä $T-2$. Hetkellä $T-1$ haltija joko käyttää option tai sitten ei. Jos optiota ei käytetä hetkellä $T-1$, niin se käytetään hetkellä T ja kirjoittaja tarvitsee hetkellä $T-1$ varallisuuden

$$\frac{1}{1+r}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_{T-1}\left[F_T\right]$$

option F_T suojaamiseen. Jos taas optio käytetään hetkellä $T-1$, niin suojaamiseen tarvittava varallisuus on option sisäinen arvo F_{T-1}. Siten hetkellä $T-1$ on kirjottajalla oltava varallisuus

$$U_{T-1} \quad = \quad \max\left\{F_{T-1}\,,\ \frac{1}{1+r}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_{T-1}\left[F_T\right]\right\},$$

jotta suojaaminen onnistuisi. Jatkamalla tätä päättelyä kohti binomipuun juurta huomaamme, että kirjoittajalla on hetkellä $t \le T$ oltava varallisuus

$$U_t \quad = \quad \max\left\{F_t\,,\ \frac{1}{1+r}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_{t}\left[U_{t+1}\right]\right\}, \tag{5.30}$$

jotta hän voisi suojautua option haltijaa vastaan. Osoittautuu, että binomimallissa tämä suojautuminen on aina mahdollista, ja jos option haltija ei käytä optiota optimaalisella hetkellä, niin kirjoittaja saa voittoa.

5.31 Määritelmä. Kaavan (5.30) määrittelemä prosessi $U = (U_t)_{t \le T}$ on amerikkalaisen option $F = (F_t)_{t \le T}$ *ulkoinen arvo* (myyjän kannalta).

Entä mikä on tilanne option haltijan kannalta? Erityisesti haltijaa kiinnostavia kysymyksiä ovat:

(i) Milloin optio kannattaa käyttää?

(ii) Milloin option kirjoittaja voi voittaa?

Vastaukset löytyvät optimaalisen pysäytyksen teoriasta ja Doobin hajotelmasta. Aloitamme pysäyttelemällä prosesseja ja erityisesti ylimartingaaleja.

5.32 Määritelmä. Olkoon Y jokin $\mathbb{F}$-sopiva prosessi ja τ jokin $\mathbb{F}$-pysäytyshetki. *Pysäytetty prosessi* Y^τ on

$$Y_t^\tau \;:=\; Y_{\min\{t,\tau\}} \;:=\; \sum_{s=0}^{t} Y_s \mathbf{1}_{\{\tau=s\}} + Y_t \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}.$$

Asettamalla $\eta_s := \mathbf{1}_{\{\tau\geq s\}}$ voimme kirjoittaa

$$Y_t^\tau \;=\; Y_0 + \sum_{s=1}^{t} \eta_s \Delta Y_s.$$

Seuraava apulause seuraa tästä esitysmuodosta. Jätämme yksityiskohtaisen perustelun harjoitustehtäväksi.

5.33 Apulause. *Olkoon Y $\mathbb{F}$-sopiva prosessi ja τ $\mathbb{F}$-pysäytyshetki.*

(i) *Jos Y on $(\mathbf{P},\mathbb{F})$-(yli)martingaali, niin pysäytetty prosessi Y^τ on myös $(\mathbf{P},\mathbb{F})$-(yli)martingaali.*

(ii) *Olkoon $\mathbb{F}$-pysäytyshetki $\tau' \leq \tau$. Tällöin, jos Y on $(\mathbf{P},\mathbb{F})$-martingaali, niin $\mathbf{E}[Y_\tau] = \mathbf{E}[Y_{\tau'}]$ ja jos Y on $(\mathbf{P},\mathbb{F})$-ylimartingaali, niin $\mathbf{E}[Y_\tau] \leq \mathbf{E}[Y_{\tau'}]$.*

Ensimmäinen optimaalinen hetki käyttää amerikkalainen optio löydetään käyttämällä Snellin peitteitä.

5.34 Määritelmä. Olkoon Y jokin $\mathbf{P}$-integroituva $\mathbb{F}$-sopiva prosessi. Sen *Snellin peite* U määräytyy rekursiivisesti ehdoista

(i) $U_T = Y_T$,

(ii) $U_t = \max\{Y_t, \mathbf{E}_t[U_{t+1}]\}$.

Seuraava tulos antaa Snellin peitteen laadullisen määritelmän.

5.35 Apulause. *Olkoon Y jokin $\mathbf{P}$-integroituva $\mathbb{F}$-sopiva prosessi. Sen Snellin peite U on pienin $(\mathbf{P},\mathbb{F})$-ylimartingaali, joka on sitä suurempi.*

Todistus. On ilmeistä, että U on Y:tä suurempi, koska

$$U_t \;=\; \max\{Y_t, \mathbf{E}_t[U_{t+1}]\}.$$

Tästä samasta yhtälöstä seuraa, että $U_t \geq \mathbf{E}_t[U_{t+1}]$ eli U on ylimartingaali. Olkoon sitten $\tilde{U}$ jokin toinen ylimartingaali, joka on Y:tä suurempi. Koska $U_T = Y_T$, niin $\tilde{U}_T \geq U_T$. Teemme sitten induktio-oletuksen ajassa taaksepäin: $\tilde{U}_{t+1} \geq U_{t+1}$. Tällöin

$$\tilde{U}_t \quad \geq \quad \mathbf{E}_t[\tilde{U}_{t+1}] \quad \geq \quad \mathbf{E}_t[U_{t+1}].$$

Toisaalta myös $\tilde{U}_t \geq Y_t$. Siten

$$\tilde{U}_t \quad \geq \quad \max\{Y_t, \mathbf{E}_t[U_{t+1}]\} \quad = \quad U_t$$

eli U on pienin Y:tä suurempi ylimartingaali. □

5.36 Apulause. *Olkoon Y jokin $\mathbf{P}$-integroituva sopiva prosessi ja U sen Snellin peite. Olkoon $\tau_{\min} \in \mathcal{T}_0$ ensimmäinen hetki, jolloin Y koskettaa peitettään:*

$$\tau_{\min} \quad := \quad \inf\{t \leq T \,:\, U_t = Y_t\}.$$

Tällöin pysäytetty prosessi $U^{\tau_{\min}}$ on $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$-martingaali.

Todistus. Tarkistamme aluksi, että $\tau_{\min}$ on $\mathbb{F}$-pysäytyshetki. Nyt

$$\{\tau_{\min} > t\} \quad = \quad \{Y_1 < U_1, \ldots, Y_t < U_t\} \quad \in \quad \mathcal{F}_t,$$

sillä prosessit U ja Y ovat $\mathbb{F}$-sopivia. Siten $\{\tau_{\min} \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, sillä se on joukon $\{\tau_{\min} > t\}$ komplementti.

Osoitamme sitten, että $U^{\tau_{\min}}$ on martingaali. Olkoon $\eta_t := \mathbf{1}_{\{\tau_{\min} \geq t\}}$. Nyt η on ennustettava ja

$$\Delta U^{\tau_{\min}}_{t+1} \quad = \quad \eta_{t+1}\Delta U_{t+1} \quad = \quad \mathbf{1}_{\{\tau_{\min} \geq t+1\}}\Delta U_{t+1}. \tag{5.37}$$

Käyttämällä Snellin peitteen ja $\tau_{\min}$:n määritelmiä näemme, että

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\{\tau_{\min} \geq t+1\}} U_t \quad &= \quad \mathbf{1}_{\{\tau_{\min} \geq t+1\}} \max\{Y_t, \mathbf{E}_t[U_{t+1}]\} \\
&= \quad \mathbf{1}_{\{\tau_{\min} \geq t+1\}} \mathbf{E}_t[U_{t+1}].
\end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä tulos yhtälöön (5.37) saamme

$$\Delta U^{\tau_{\min}}_{t+1} \quad = \quad \mathbf{1}_{\{\tau_{\min} \geq t+1\}} \left(U_{t+1} - \mathbf{E}_t\left[U_{t+1}\right]\right).$$

Ottamalla ehdolliset odotusarvot saamme

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_t\left[\Delta U^{\tau_{\min}}_{t+1}\right] \quad &= \quad \mathbf{E}_t\left[\mathbf{1}_{\{\tau_{\min} \geq t+1\}} \left(U_{t+1} - \mathbf{E}_t\left[U_{t+1}\right]\right)\right] \\
&= \quad \mathbf{1}_{\{\tau_{\min} \geq t+1\}} \mathbf{E}_t\left[\left(U_{t+1} - \mathbf{E}_t\left[U_{t+1}\right]\right)\right] \\
&= \quad 0.
\end{aligned}$$

Siis $U^{\tau_{\min}}$ on martingaali. □

5.38 Apulause. *Olkoon Y jokin $\mathbf{P}$-integroituva $\mathbb{F}$-sopiva prosessi ja U sen Snellin peite sekä $\tau_{\min} \in \mathcal{T}_0$ kuten apulauseessa 5.36. Tällöin*

$$U_t \quad = \quad \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}_t \left[Y_\tau \right] \tag{5.39}$$

ja erityisesti

$$U_0 \quad = \quad \mathbf{E}[Y_{\tau_{\min}}] \quad = \quad \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbf{E}[Y_\tau]. \tag{5.40}$$

Todistus. Jätämme väitteen (5.39) harjoitustehtäväksi ja todistamme väitteen (5.40).

Apulauseen 5.36 nojalla $U^{\tau_{\min}}$ on martingaali. Siten

$$U_0 \quad = \quad \mathbf{E}[U_{\tau_{\min}}] \quad = \quad \mathbf{E}[Y_{\tau_{\min}}].$$

Olkoon sitten τ jokin pysäytyshetki. Nyt U on ylimartingaali. Apulause 5.33 sanoo, että pysäytetty prosessi U^τ on myös ylimartingaali. Siten

$$U_0 \quad = \quad U_0^\tau \quad \geq \quad \mathbf{E}[U_T^\tau] \quad = \quad \mathbf{E}[U_\tau] \quad \geq \quad \mathbf{E}[Y_\tau].$$

Siispä mielivaltaiselle pysäytyshetkellä τ pätee, että

$$\mathbf{E}[Y_{\tau_{\min}}] \quad = \quad U_0 \quad \geq \quad \mathbf{E}[Y_\tau]$$

eli $\mathbf{E}[Y_{\tau_{\min}}] \geq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbf{E}[Y_\tau]$. Väite seuraa nyt siitä, että $\tau_{\min} \in \mathcal{T}_0$. $\square$

5.41 Määritelmä. Olkoon Y jokin $\mathbf{P}$-integroituva $\mathbb{F}$-sopiva prosessi. Tällöin $\mathbb{F}$-pysäytyshetki $\tau_+ \in \mathcal{T}_0$ on *optimaalinen hetki* (tarkemmin $\mathbb{F}$-optimaalinen) pysäyttää prosessi Y, jos

$$\mathbf{E}[Y_{\tau_+}] \quad = \quad \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbf{E}[Y_\tau].$$

Seuraava apulause karakterisoi kaikki optimaaliset pysäytyshetket Snellin peitteiden avulla.

5.42 Apulause. *Olkoon Y jokin $\mathbf{P}$-integroituva $\mathbb{F}$-sopiva prosessi ja U sen Snellin peite. Tällöin $\mathbb{F}$-pysäytyshetki τ on optimaalinen Y:lle jos ja vain jos*

$$Y_\tau = U_\tau \quad \text{ja} \quad U^\tau \quad \text{on } (\mathbf{P}, \mathbb{F}) - \text{martingaali}. \tag{5.43}$$

Todistus. Se, että ehdon (5.43) toteuttavat pysäytyshetket ovat optimaalisia seuraa apulauseen 5.38 todistuksesta. Nimittäin todistaessamme, että $\tau_{\min}$ on optimaalinen käytimme pysäytyshetkestä $\tau_{\min}$ hyväksi ainoastaan tietoja $Y_{\tau_{\min}} = U_{\tau_{\min}}$ ja $U^{\tau_{\min}}$ on martingaali.

Olkoon sitten τ jokin optimaalinen pysäytyshetki. Tehtävämme on siis osoittaa, että $Y_\tau = U_\tau$ ja että U^τ on martingaali. Koska joka tapauksessa U^τ on ylimartingaali, niin

$$U_0 \quad \geq \quad \mathbf{E}[U_t^\tau] \quad \geq \quad \mathbf{E}[U_T^\tau] \quad = \quad \mathbf{E}[U_\tau].$$

Koska τ on optimaalinen, niin

$$\mathbf{E}[U_\tau] \quad = \quad \mathbf{E}[Y_\tau] \quad = \quad \mathbf{E}[Y_{\tau_{\min}}] \quad = \quad U_0.$$

Näemme, että $\mathbf{E}[U_\tau - Y_\tau] = 0$. Koska lisäksi $U_\tau \geq Y_\tau$, niin $U_\tau = Y_\tau$. Osoitamme sitten, että U^τ on martingaali. Edellisen nojalla $\mathbf{E}[U_t^\tau] = U_0$ eli ylimartingaalin U^τ odotusarvo on vakio. Mutta ylimartingaali, jonka odotusarvo on vakio on martingaali. Nimittäin ehdoista

$$\mathbf{E}_{t-1}[U_t^\tau] \quad \leq \quad U_{t-1}^\tau \qquad \text{ja} \qquad \mathbf{E}[U_t^\tau] \quad = \quad \mathbf{E}[U_{t-1}^\tau]$$

seuraa, että satunnaismuuttuja $Y = \mathbf{E}_{t-1}[\Delta U_t^\tau] \leq 0$, mutta $\mathbf{E}[Y] = 0$. Siten $Y = 0$ eli U^τ on martingaali. □

Nyt tiedämme, että ensimmäinen peitteenkosketushetki $\tau_{\min}$ on ensimmäinen optimaalinen pysäytyshetki. Seuraavaksi etsimme viimeisen optimaalisen pysäytyshetken. Tähän tarvitsemme Doobin hajotelmaa.

5.44 Apulause. *Olkoon Y $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$-ylimartingaali. Tällöin sille on olemassa yksikäsitteinen* Doobin hajotelma

$$Y_t \quad = \quad M_t - A_t,$$

missä M on $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$-martingaali, jolle $M_0 = Y_0$, ja A on kasvava $\mathbb{F}$-ennustettava prosessi, jolle $A_0 = 0$.

Todistus. Paras tapa todistaa hajotelman olemassaolo on etsiä se. Prosessi M on martingaali, jos muutosprosessi ΔM on martingaalidifferenssi eli

$$\mathbf{E}_{t-1}[\Delta M_t] \quad = \quad 0.$$

Nyt pakotamme martingaalidifferenssin ΔM esiin prosessista Y seuraavasti:

$$\Delta M_t \quad := \quad Y_t - \mathbf{E}_{t-1}[Y_t]$$

Tällöin ΔM on mitä ilmeisimmin martingaalidifferenssi. Ehdosta $Y = M - A$, eli $\Delta Y = \Delta M - \Delta A$ saamme taas kaavan prosessille A:

$$\begin{aligned}
\Delta A_t &= -\Big(\Delta Y_t - \Delta M_t\Big) \\
&= -\Big(\Delta Y_t - (Y_t - \mathbf{E}_{t-1}[Y_t])\Big) \\
&= -\Big(-Y_{t-1} + \mathbf{E}_{t-1}[Y_t]\Big) \\
&= -\mathbf{E}_{t-1}[Y_t - Y_{t-1}] \\
&= -\mathbf{E}_{t-1}[\Delta Y_t].
\end{aligned}$$

Näemme, että prosessi A on ennustettava. Lisäksi, koska Y on ylimartingaali, niin A on kasvava. Summaamalla differenssit ja valitsemalla alkuarvon $M_0 = Y_0$ (ja siten $A_0 = 0$) olemme löytäneet prosessin Y Doobin hajotelman:

$$
\begin{aligned}
M_t &= Y_0 + \sum_{s=1}^{t} \Big(Y_s - \mathbf{E}_{s-1}\left[Y_s\right] \Big), \\
A_t &= -\sum_{s=1}^{t} \mathbf{E}_{s-1}\left[\Delta Y_s\right].
\end{aligned}
$$

Todistamme sitten, että hajotelma $Y = M - A$ on yksikäsitteinen. Olkoon $(\tilde{M}, \tilde{A})$ jokin, mahdollisesti toinen, Doobin hajotelma prosessille Y. Koska nyt $Y = M - A = \tilde{M} - \tilde{A}$, niin menemällä differensseihin näemme, että $\Delta M - \Delta A = \Delta\tilde{M} - \Delta\tilde{A}$. Tästä seuraa edelleen, että $\Delta M - \Delta\tilde{M} = \Delta A - \Delta\tilde{A}$. Koska ΔM ja $\Delta\tilde{M}$ ovat martingaalidifferenssejä ja prosessit A ja $\tilde{A}$ ovat ennustettavia, niin

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathbf{E}_{t-1}\left[\Delta M_t - \Delta\tilde{M}_t\right] \\
&= \mathbf{E}_{t-1}\left[\Delta A_t - \Delta\tilde{A}_t\right] \\
&= \Delta A_t - \Delta\tilde{A}_t.
\end{aligned}
$$

Täten siis $A = \tilde{A}$. Siten myös $M = \tilde{M}$. □

Binomimallissa voimme esittää ylimartingaalin Y Doobin hajotelman sattumaoperaattoreiden ∇ ja ∇^- avulla:

$$
\begin{aligned}
\Delta M &= \Delta Y + \Big(\nabla^- Y + p\nabla Y\Big), \\
\Delta A &= -\Big(\nabla^- Y + p\nabla Y\Big).
\end{aligned}
$$

Tällöin on helppo nähdä, että $\Delta Y = \Delta M - \Delta A$ eli $Y = M + A$. Lisäksi väitteen 5.16 avulla näemme, että M on martingaali.

Viimeinen optimaalinen pysäytyshetki löytyy Doobin hajotelmasta.

5.45 Apulause. *Olkoon Y jokin $\mathbf{P}$-integroituva $\mathbb{F}$-sopiva prosessi ja U sen Snellin peite. Olkoon $U = M - A$ $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$-ylimartingaalin U Doobin hajotelma ja*

$$
\tau_{\max} \;:=\; \inf\{t \leq T \,:\, A_{t+1} > 0\},
$$

missä $\tau_{\max} = T$ jos $A_t = 0$ kaikilla $t \leq T$. Tällöin $\tau_{\max}$ on viimeinen optimaalinen $\mathbb{F}$-pysäytyshetki pysäyttää prosessi Y.

Todistus. Pitää siis osoittaa, että (i) $\tau_{\max}$ on pysäytyshetki, (ii) $\tau_{\max}$ on optimaalinen ja (iii) jos $\tau > \tau_{\max}$ ja $\mathbf{P}(\tau > \tau_{\max}) > 0$, niin τ ei ole optimaalinen.

Kohdat (i) ja (ii) jätämme harjoitustehtäviksi. Toteamme vihjeeksi, että kohta (ii) seuraa apulauseesta 5.42.

Tarkastelemme kohtaa (iii). Nyt $\mathbf{E}[A_\tau] > 0$. Siten

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[U_T^\tau] &= \mathbf{E}[U_\tau] \\ &= \mathbf{E}[M_\tau] - \mathbf{E}[A_\tau] \\ &= U_0 - \mathbf{E}[A_\tau] \\ &< U_0^\tau.\end{aligned}$$

Koska martingaalin odotusarvo on vakio, niin U^τ ei voi olla martingaali. Siten, apulauseen 5.42 nojalla, τ ei voi olla optimaalinen. □

Palaamme takaisin binomipuuhun.

Edellisen perusteella tiedämme, että amerikkalaisen option $F = (F_t)_{t\le T}$ arvo hetkellä T on $U_T = F_T$ ja hetkellä t sen arvo on

$$U_t = \sup_{\tau\in\mathfrak{T}_t} \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[\frac{F_\tau}{(1+r)^{\tau-t}}\right] = \max\left\{F_t\,,\,\frac{1}{1+r}\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[U_{t+1}\right]\right\}.$$

Diskonttaamalla saamme

$$\bar{U}_t = \max\left\{\bar{F}_t\,,\,\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[\bar{U}_{t+1}\right]\right\}.$$

Prosessi $\bar{U}$ on $(\mathbf{Q},\mathbb{F})$-ylimartingaali, sillä se on diskontatun sisäisen arvon $(\bar{F}_t)_{t\le T}$ Snellin peite. Siten amerikkalaisen option optimaaliselle käytölle pätee:

(i) Ensimmäinen optimaalinen hetki käyttää optio on

$$\tau_{\min} = \inf\left\{t : \bar{U}_t = \bar{F}_t\right\} = \inf\left\{t : U_t = F_t\right\}$$

(ii) Alkuarvo

$$U_0 = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\bar{F}_{\tau_{\min}}\right] = \sup_{\tau\in\mathfrak{T}_0} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\bar{F}_\tau\right]$$

on option arbitraasivapaa tasapuolinen suojaushinta.

(iii) Jos $\bar{U} = \bar{M} - \bar{A}$ on $(\mathbf{Q},\mathbb{F})$-ylimartingaalin $\bar{U}$ Doobin hajotelma, niin

$$\tau_{\max} = \inf\left\{t : \bar{A}_{t+1} > 0\right\}$$

on viimeinen optimaalinen pysäytyshetki käyttää optio.

Tarkastelemme sitten suojaamista. Olkoon $\bar{U} = \bar{M} - \bar{A}$ option F diskontatun hinnan Doobin hajotelma. Määrittelemme apuvaateen G asettamalla

$$G \quad = \quad (1+r)^T \bar{M}_T \quad = \quad M_T,$$

eli $\bar{G} = \bar{M}_T$. Tämä eurooppalainen vaade voidaan toistaa. Toistostrategian π diskontattu arvoprosessi on $\bar{V}^\pi = \bar{M}$ ja tarvittava alkupääoma on $c(G) = \mathbf{E}^\mathbf{Q}[\bar{M}_T]$. Doobin hajotelma voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\bar{U}_t \quad = \quad \bar{V}_t^\pi - \bar{A}_t.$$

Jos $t \leq \tau_{\max}$, niin $\bar{U}_t = \bar{V}_t^\pi$ ja alkupääomalla $c(G)$ voidaan suojata amerikkalainen optio ennen viimeistä optimaalista pysäytyshetkeä $\tau_{\max}$. Toisaalta, jos $t > \tau_{\max}$, niin optio käytettiin epäoptimaalisella hetkellä. Tällöin option kirjoittaja on ylisuojannut option ja saa voittoa $A_t = (1+r)^t \bar{A}_t$:n verran.

Kokoamme havaintomme amerikkalaisten optioiden toistolauseeksi.

5.46 Lause. *Olkoon $F = (F_t)_{t \leq T}$ amerikkalainen vaade arbitraasivapaassa binomimallissa. Sen toistohinta hinta U_0 määräytyy rekursiivisesti kaavoista*

$$\begin{aligned} U_T &= F_T, \\ U_t &= \max\left\{F_t\,,\ \frac{1}{1+r}\mathbf{E}_t^\mathbf{Q}\left[U_{t+1}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Lisäksi F on toistettavissa ja sen toistostrategia $\pi = (\beta, \gamma)$ määräytyy varallisuuksista $U_t^\pi = U_t$ ja osakepainoista

$$\gamma_t \quad = \quad \frac{\nabla U_t^\pi}{S_{t-1}(u-d)}.$$

Mikäli option haltija käyttää option hetkellä τ, niin option suojaaja voittaa varallisuuden $(1+r)^\tau \bar{A}_\tau$, missä $\bar{A}$ tulee ylimartingaalin $\bar{U}$ Doobin hajotelmasta $\bar{U} = \bar{M} - \bar{A}$. Jos τ on optimaalinen, niin $\bar{A}_\tau = 0$.

5.47 Esimerkki. Tarkastelemme esimerkin 5.24 binomipuuta. Siis $T = 2$, $S_0 = 4$, $u = 1$, $d = -0{,}5$ ja $r = 0{,}25$ sekä $q = 1/2$. Tarkastelemme amerikkalaista myyntioptiota $F_t = (5 - S_t)^+$.

Olkoon $U = (U_t)_{t \leq 2}$ myyntioption arvoprosessi. Eräpäivänä

$$U_2(11) = 0, \quad U_2(10) = 1, \quad U_2(01) = 1, \quad U_2(00) = 4.$$

Jatkamme rekursiolla taaksepäin.

$$U_t \quad = \quad \max\left\{(5 - S_t)^+\,,\ 0{,}80 \cdot \mathbf{E}_t^\mathbf{Q}\left[U_{t+1}\right]\right\}.$$

Nyt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1^{\mathbf{Q}}[U_2](1) &= U_2(11)q + U_2(10)(1-q) \\ &= 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} \\ &= 0{,}50.\end{aligned}$$

Koska $(5 - S_1(1))^+ = (5-8)^+ = 0$, niin

$$U_1(1) = \max\{0\,,\,0{,}80\cdot 0{,}50\} = 0{,}40.$$

Samanlaisella laskulla näemme, että

$$U_1(0) = \max\{3,2\} = 3.$$

Hetkellä 0 saamme $(5-S_0)^+ = (5-4)^+ = 1$ ja

$$0{,}80\cdot\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[U_1] = 0{,}80\cdot\left(0{,}40\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2}\right) = 1{,}36.$$

Siten amerikkalaisen myyntioption $(5-S_t)^+$ hinta on $U_0 = 1{,}36$.

Selvitämme sitten ensimmäisen optimaalisen pysäytyshetken. Jos $t = 0$, niin $U_0 = 1{,}36 > 1 = (5-S_0)^+$. Siispä $\tau_{\min} > 0$. Hetkellä $t = 1$ ja tilalla $\xi_1 = 1$ vallitsee $U_1(1) = 0{,}40 > 0 = (5-8)^+$. Siten $\tau_{\min}(1) > 1$ ja koska $T = 2$, niin $\tau_{\min}(1) = 2$. Samalla tavalla näemme, että $\tau_{\min}(0) = 1$.

Selvitämme viimeisen optimaalisen pysäytyshetken. Laskemme aluksi Doobin hajotelman diskontatulle arvoprosessille. Nyt $\bar{U}_0 = U_0 = \bar{M}_0 = 1{,}36$ ja hetkellä $t = 1$ saamme

$$\begin{aligned}\bar{M}_1 &= M_0 + \frac{1}{1+r}U_1 - \frac{1}{1+r}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[U_1] \\ &= 1{,}36 + 0{,}80\cdot\left(0{,}40\cdot\mathbf{1}_{\{\xi_1=1\}} + 3\cdot\mathbf{1}_{\{\xi_1=0\}}\right) - 0{,}80\cdot\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[U_1] \\ &= 1{,}36 + 0{,}80\cdot\left(0{,}40\cdot\mathbf{1}_{\{\xi_1=1\}} + 3\cdot\mathbf{1}_{\{\xi_1=0\}}\right) - 1{,}36 \\ &= 0{,}32\cdot\mathbf{1}_{\{\xi_1=1\}} + 2{,}40\cdot\mathbf{1}_{\{\xi_1=0\}}.\end{aligned}$$

Havaitsemme, että $\bar{M}_1 = \bar{U}_1$. Siten $\bar{A}_1 = 0$ ja $\tau_{\max} \geq 1$. Nyt

$$0{,}80^2\cdot\mathbf{E}_1[U_2] = 0{,}80\cdot\left(0{,}40\cdot\mathbf{1}_{\{\xi_1=1\}} + 2\cdot\mathbf{1}_{\{\xi_1=0\}}\right),$$

mistä saamme, että

$$\begin{aligned}\bar{M}_2 &= \bar{M}_1 + \bar{U}_2 - 0{,}80^2\cdot\mathbf{E}_1^{\mathbf{Q}}[U_2] \\ &= \bar{U}_2 + 0{,}80\cdot\mathbf{1}_{\{\xi_1=0\}}.\end{aligned}$$

Tästä näemme, että $\tau_{\max} = 1$, jos $\xi_1 = 0$. Nimittäin nyt $\bar{A}_2(1) = 0{,}80$. Siispä, jos option haltija ei käytä optiotaan hetkellä $t = 1$, kun $\xi_1 = 0$, niin option myyjä saa voittoa summan $0{,}80^{-2}\cdot\bar{A}_2(0) = 1{,}25$ verran

Jatämme lopuksi harjoitustehtäväksi laskea suojausstrategian. ◇

5.48 Huomautus. Esimerkin 5.47 optio oli polkuriippumaton: $F_t = f(S_t)$. Kuten eurooppalaisessa tapauksessa, voimme tällöin laskea toistovarallisuuden ja osakepainot markoviaanisesti. Nimittäin nyt $U_t = u_t(S_t)$, missä

$$
\begin{aligned}
u_T(S_T) &= f(S_T), \\
u_t(S_t) &= \max\left\{ f(S_t)\,,\ \frac{1}{1+r}\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\Big[u_{t+1}(S_{t+1})\Big]\right\} \\
&= \max\left\{ f(S_t)\,,\ \frac{u_{t+1}(S_t(1+u))q + u_{t+1}(S_t(1+d))(1-q)}{1+r}\right\}.
\end{aligned}
$$

Toistostrategia on

$$
\gamma_t \;=\; g_t(S_{t-1}) \;:=\; \frac{u_t(S_{t-1}(1+u)) - u_t(S_{t-1}(1+d))}{S_{t-1}(u-d)}.
$$

$\diamond$

Lopetamme osion tarkastelemalla amerikkalaisten ja eurooppalaisten optioiden eroja. Lienee ilmeistä, että amerikkalaisen option hinta on vastaavaa eurooppalaista optiota korkeampi. Seuraava tulos kertoo, koska hinnat ovat samoja.

5.49 Väite. *Olkoon F_t, $t \le T$, jonkin sopimuksen sisäinen arvo. Olkoon vastaavan amerikkalaisen option arvo U_t ja eurooppalaisen arvo V_t. Tällöin $U_t \ge V_t$ kaikilla $t \le T$. Edelleen, jos $V_t \ge F_t$ kaikilla $t \le T$, niin $U_t = V_t$ kaikilla $t \le T$ ja siten $\tau_{\max} = T$.*

Todistus. Väitteen $U_t \ge V_t$ todistuksen jätämme harjoitustehtäväksi.

Oletamme sitten, että $V_t \ge F_t$, jolloin $\bar{V}_t \ge \bar{F}_t$. Koska $\bar{V}$ on martingaali, niin se on myös ylimartingaali. Toisaalta $\bar{U}$ on pienin ylimartingaali, jolle $\bar{U}_t \ge \bar{F}_t$. Siten $U_t \le V_t$, ja erityisesti $U_t = V_t$. Osoitamme lopuksi, että $\tau_{\max} = T$. Koska $\bar{U} = \bar{V}$ on martingaali, niin sen Doobin hajotelmassa ennustettava kasvava prosessi $\bar{A}$ on identtisesti 0. Siten tulos $\tau_{\max} = T$ seuraa apulauseesta 5.45, joka karakterisoi viimeisen optimaalisen pysäytyshetken. $\square$

5.50 Esimerkki. Tarkastelemme osto-optiota $(S_t - K)^+$. Koska $\bar{S}$ on $\mathbf{Q}$-martingaali, niin eurooppalaiselle arvolle pätee

$$
\begin{aligned}
\bar{V}_t &= \frac{1}{(1+r)^T}\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[(S_T - K)^+\right] \\
&\ge \frac{1}{(1+r)^T}\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[S_T - K\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[\bar{S}_T\right] - K\frac{1}{(1+r)^T} \\
&= \bar{S}_t - K\frac{1}{(1+r)^T}.
\end{aligned}
$$

Siten

$$V_t \;\geq\; S_t - K\frac{1}{(1+r)^{T-t}} \;\geq\; S_t - K.$$

Lisäksi, koska $V_t \geq 0$, niin $V_t \geq (S_t - K)^+$. Siten väitteen 5.49 nojalla amerikkalaisilla ja eurooppalaisilla osto-optioilla on sama hinta ja viimeinen optimaalinen hetki käyttää amerikkalainen osto-optio on eräpäivä T. ◇

5.51 Huomautus. Esimerkin 5.50 tulos ei päde myyntioptioille. ◇

Harjoitustehtäviä lukuun 5

5.1. Etsi binomimallin kaikki muunnokset (ja käänteismuunnokset) $S \leftrightarrow R \leftrightarrow X \leftrightarrow \xi$. Perustele myös, miksi $\mathbb{F}^S = \mathbb{F}^R = \mathbb{F}^X = \mathbb{F}^\xi$.

5.2. Etsi huomautuksen 5.5 muunnokset $u = u(\mu, \sigma, p)$ ja $d = d(\mu, \sigma, p)$.

5.3. Miksi kaavassa (5.9) ei esiinny binomikertoimia, mutta kaavassa (5.11) esiintyy?

5.4. Todista apulause 5.15.

5.5. Perustele huomautuksessa 5.17 käytetyt kaavat

$$
\begin{aligned}
\nabla^- S_t &= S_{t-1}\nabla^- R_t = S_{t-1}d, \\
\nabla S_t &= S_{t-1}\nabla R_t = S_{t-1}(u-d).
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
\nabla^- \bar{S}_t &= \frac{1}{B_t}\left(\nabla^- S_t - rS_{t-1}\right) = \frac{1}{B_t}S_{t-1}(d-r), \\
\nabla \bar{S}_t &= \frac{1}{B_t}\nabla S_t = \frac{1}{B_t}S_{t-1}(u-d).
\end{aligned}
$$

5.6. Tarkastelemme yleistettyä binomimallia eli *binäärimallia*. Tilannetta kuvaa aikaepähomogeeninen haarautuminen

$$
\begin{array}{ccccll}
 & & & \nearrow & S_t(1+u_{t+1}) & \text{tn:llä } p_{t+1} \\
S_t & \longrightarrow & S_{t+1} & & & \\
 & & & \searrow & S_t(1+d_{t+1}) & \text{tn:llä } 1-p_{t+1},
\end{array}
$$

missä $d_t \leq u_t$ ovat ennustettavia ja $p_t \in (0,1)$ kaikilla $t \leq T$.

(a) Olkoon korkoprosessi

$$\frac{\Delta B_t}{B_{t-1}} \quad =: \quad r_t$$

deterministinen. Osoita, että malli on arbitraasivapaa jos ja vain jos

$$u_t \quad < \quad r_t \quad < \quad d_t$$

kaikilla $t \leq T$. Määrää ekvivalentti martingaalimitta.

(b) Oletamme, että korkoprosessi $r = (r_t)_{t \leq T}$ ennustettava. Anna ehto arbitraasivapaudelle ja määrää ekvivalentti martingaalimitta.

5.7. Todista lause 5.23.

5.8. Laske digitaalioption $\mathbf{1}_{\{S_2=16\}}$ arvoprosessi V ja toistostrategia $\pi = (\beta, \gamma)$ esimerkin 5.24 binomipuussa.

5.9. Olkoon τ pysäytyshetki. Osoita, että prosessi η, missä

$$\eta_t \quad = \quad \mathbf{1}_{\{\tau \geq t\}},$$

on ennustettava ja, että

$$Y^\tau \quad = \quad Y_0 + \sum_{s=1}^{t} \eta_s \Delta Y_s.$$

5.10. Todista (edellisen harjoitustehtävän avulla) apulause 5.33.

5.11. Osoita, että prosessi $M = (M_t)_{t \leq T}$ on martingaali jos ja vain jos $\mathbf{E}[M_\tau] = M_0$ kaikilla pysäytyshetkillä $\tau \in \mathfrak{T}_0$.

5.12. Todista kaava (5.39).

5.13. Todista apulauseen 5.45 kohdat (i) ja (ii).

5.14. Kokoa todistus lauseelle 5.46.

5.15. Laske esimerkin 5.47 toistostrategia.

5.16. Olkoon $F = (F_t)_{t \leq T}$ jonkin sopimuksen sisäinen arvo. Olkoon U sitä vastaavan amerikkalaisen option ulkoinen arvoprosessi ja V vastaavan eurooppalaisen option ulkoinen arvoprosessi. Osoita, että $U_t \geq V_t$ kaikilla $t \leq T$.

5.17. Perustele huomautus 5.51 esimerkillä.

5.18. Olkoon binomimallissa $T = 2$, $S_0 = 150$, $u = 2/5$, $d = -1/5$ ja $r = 1/10$. Laske amerikkalaisen myyntioption $(\max_{s \leq t}(140 - S_s)^+)_{t \leq T}$ suojaushinta.

Luku 6

Rahoitusteorian päälauseet

> The great tragedy of science, the slaying of a beautiful theory by an ugly fact. — Thomas Henry Huxley

Yleinen diskreettiaikainen malli

Rakennamme yleisen d:n osakkeen ja ennustettavan koron hinnoittelumallin $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$. Perusjoukko Ω on jonoavaruus, tai tuloavaruus,

$$\Omega \quad = \quad \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{t-1} \times \Omega_t \times \Omega_{t+1} \times \cdots \times \Omega_T.$$

Koska haluamme, että vektoriarvoinen osakeprosessi $S = (S_t^1, \ldots, S_t^d)_{t \leq T}$ elää avaruudessa Ω, niin jokaisella hetkellä t valitsemme $\Omega_t = \mathbb{R}^d$ eli $\Omega = \mathbb{R}^{d \times T}$. Tällöin $\omega \in \Omega$ on muotoa

$$\omega \quad = \quad \omega_1 \cdots \omega_{t-1} \omega_t \omega_{t+1} \cdots \omega_T,$$

missä $\omega_t \in \mathbb{R}^d$, $t \leq T$. *Kanoninen prosessi* ξ on koordinaattikuvaus

$$\xi_t(\omega) \quad = \quad \omega_t \in \mathbb{R}^d.$$

Historia $\mathbb{F}$ on ξ:n generoima: $\mathbb{F} = \mathbb{F}^\xi$ eli $\mathcal{F}_t$ generoituu joukoista

$$\left\{ \omega \in \Omega : \xi_s^i(\omega) \leq x_s^i \right\}, \qquad x_s^i \in \mathbb{R},\, i = 1, \ldots, d,\, s \leq t.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että $\mathcal{F}_t$ kertoo alkiosta $\omega = \omega_1 \cdots \omega_T$ sen t ensimmäistä koordinaattia $\omega_1 \cdots \omega_t$. Kaikkien tapahtumien joukoksi valitsemme sen, mitä olemme havainneet hetkeen T mennessä: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. Todennäköisyys $\mathbf{P}$ tuloavaruudessa Ω ei ole välttämättä tulomitta eli satunnaisvektorit ξ_t,

$t \le T$, eivät välttämättä ole riippumattomia. Voimme kuitenkin *disintegroida* $\mathbf{P}$:n ehdollisiin todennäköisyyksiin:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi \in \mathrm{d}\omega) &= \mathbf{P}(\xi_1 \in \mathrm{d}\omega_1, \ldots, \xi_T \in \omega_T) \\ &= \mathbf{P}_t(\xi_1 \in \mathrm{d}\omega_1, \ldots, \xi_t \in \mathrm{d}\omega_t) \\ &\quad \times \mathbf{P}_t(\xi_{t+1} \in \mathrm{d}\omega_{t+1}, \ldots, \omega_T \in \mathrm{d}\omega_T \,|\, \xi_1 = \omega_1, \ldots, \xi_t = \omega_t). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Tässä $\mathbf{P}_t(\cdot)$ on mitan $\mathbf{P}$ rajoittuma σ-algebraan $\mathcal{F}_t$ eli $\mathbf{P}_t(\cdot)$ näkee ω:sta vain koordinaatit $\omega_1 \cdots \omega_t$. Ydin $\mathbf{P}_t(\cdot|\cdot)$ on $\mathcal{F}_t$-ehdollinen todennäköisyys, joka on rajoittunut $\mathcal{F}_t$:n "komplementtiin" eli kun $\omega_1 \cdots \omega_t$ on kiinnitetty, niin $\mathbf{P}_t(\cdot|\omega_1 \cdots \omega_t)$ on mitta, joka näkee ω:sta vain koordinaatit $\omega_{t+1} \cdots \omega_T$. Ilman kanonista prosessia voimme kirjoittaa kaavan (6.1) lyhyemmin:

$$\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) = \mathbf{P}_t(\mathrm{d}\omega_1 \cdots \omega_t)\mathbf{P}_t(\mathrm{d}\omega_{t+1} \cdots \omega_T \,|\, \omega_1 \cdots \omega_t). \tag{6.2}$$

Jatkamalla disintegrointia jokaisen aika-askeleen yli saamme hajotelman

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) &= \tilde{\mathbf{P}}_1(\mathrm{d}\omega_1)\tilde{\mathbf{P}}_2(\mathrm{d}\omega_2 \,|\, \omega_1)\tilde{\mathbf{P}}_3(\mathrm{d}\omega_3 \,|\, \omega_1\omega_2) \cdots \\ &\quad \cdots \tilde{\mathbf{P}}_t(\mathrm{d}\omega_t \,|\, \omega_1 \cdots \omega_{t-1}) \cdots \tilde{\mathbf{P}}_T(\mathrm{d}\omega_T \,|\, \omega_1 \cdots \omega_{T-1}), \end{aligned} \tag{6.3}$$

missä $\tilde{\mathbf{P}}_t$ on $\mathcal{F}_{t-1}$-ehdollinen todennäköisyys, joka näkee alkiosta ω ainoastaan koordinaatin ω_t, kun $\omega_1 \cdots \omega_{t-1}$ on kiinnitetty.

Olemme rakentaneet tarkoituksiimme sopivan historiallisen todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$. Yleinen hinnoittelumalli on nyt kokoelma $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, missä pankkitili B on $\mathbb{F}$-ennustettava $\mathbb{R}^+$-arvoinen prosessi ja osakevektori S on $\mathbb{F}$-sopiva $(\mathbb{R}^d)^+$-arvoinen prosessi.

Disintegraation olemassaolo avaruudessa $\mathbb{R}^{d \times T}$ on syvällinen mittateoreettinen totuus ja mitan $\mathbf{P}$ disintegraation löytäminen on yleensä vaikeaa. Käytännössä tämä ei kuitenkaan ole juuri koskaan ongelma, sillä tavallisesti malli rakennetaan juuri kaavan (6.2) tai (6.3) avulla. Itse asiassa disintegroinnissa on kyse tutusta ketju- tai tulosäännöstä

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \\ &\quad \cdots \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \end{aligned} \tag{6.4}$$

sillä erotuksella, että nyt ehdollistava joukko voi olla nollamitallinen.

6.5 Esimerkki. (i) Kolikkoavaruudessa

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t(\mathrm{d}\omega_1 \cdots \omega_t) &= \prod_{s=1}^{t} \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega_s) = \prod_{s=1}^{t} \mathbf{P}(\{\omega_s\}), \\ \mathbf{P}_t(\mathrm{d}\omega_{t+1} \cdots \omega_T \,|\, \omega_1 \cdots \omega_t) &= \mathbf{P}_t(\mathrm{d}\omega_{t+1} \cdots \omega_T) = \prod_{s=t+1}^{T} p^{\omega_s}(1-p)^{1-\omega_s}, \\ \tilde{\mathbf{P}}_t(\mathrm{d}\omega_t \,|\, \omega_1 \cdots \omega_{t-1}) &= \tilde{\mathbf{P}}_t(\mathrm{d}\omega_t) = p^{\omega_t}(1-p)^{1-\omega_t}. \end{aligned}$$

(ii) Olkoon ξ on diskreetti eli ξ_t:n arvojoukko on numeroituva joukko $\{\omega_t^1, \omega_t^2, \ldots\}$. Oletamme lisäksi, että ξ on markoviaaninen eli

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(\xi_{t+1}{=}\omega_1,\ldots,\xi_T{=}\omega_T \,|\, \xi_1{=}\omega_1,\ldots,\xi_t{=}\omega_t)\\ &\quad= \mathbf{P}(\xi_{t+1}{=}\omega_1,\ldots,\xi_T{=}\omega_T \,|\, \xi_t{=}\omega_t).\end{aligned}$$

Tällöin disintegrointikaavat (6.2) ja (6.3) saavat muodot

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) &= \mathbf{P}_t(\mathrm{d}\omega_1\cdots\omega_t)\mathbf{P}_t(\mathrm{d}\omega_{t+1}\cdots\omega_T \,|\, \omega_t)\\ &= \tilde{\mathbf{P}}_1(\mathrm{d}\omega_1)\tilde{\mathbf{P}}_2(\mathrm{d}\omega_2 \,|\, \omega_1)\tilde{\mathbf{P}}_3(\mathrm{d}\omega_3 \,|\, \omega_2)\cdots\tilde{\mathbf{P}}_T(\mathrm{d}\omega_T \,|\, \omega_{T-1}),\end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_t(\mathrm{d}\omega_{t+1}\cdots\omega_T \,|\, \omega_t) &= \mathbf{P}(\xi_{t+1}{=}\omega_{t+1},\ldots,\xi_T{=}\omega_T \,|\, \xi_t{=}\omega_t),\\ \tilde{\mathbf{P}}_t(\mathrm{d}\omega_t \,|\, \omega_{t-1}) &= \mathbf{P}(\xi_t = \omega_t \,|\, \xi_{t-1} = \omega_{t-1}).\end{aligned}$$

(iii) Olkoon $\xi = (\xi_t)_{t=1}^T$ $\mathbb{R}$-arvoinen ja jatkuvasti jakautunut tiheysfunktiolla f eli

$$\mathbf{P}(\xi_1 \in \mathrm{d}\omega_1, \ldots, \xi_T \in \mathrm{d}\omega_T) = f(\omega_1, \ldots, \omega_T)\,\mathrm{d}\omega_1\cdots\mathrm{d}\omega_T.$$

Vektorin $(\xi_{t_i})_{i=1}^k$ ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $(\xi_{s_j})_{j=1}^\ell$ saadaan marginaalien osamäärästä, jotka saadaan integroimalla pois "ylimääräiset" muuttujat:

$$\begin{aligned}f(\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_k} \,|\, \omega_{s_1}, \ldots, \omega_{s_\ell}) &= \frac{f_{k,\ell}(\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_k}; \omega_{s_1}, \ldots, \omega_{s_\ell})}{f_\ell(\omega_{s_1}, \ldots, \omega_{s_\ell})}\\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^{T-k-\ell}} f(\omega_1, \ldots, \omega_T)\,\mathrm{d}\omega_{u_1^*}\cdots\mathrm{d}\omega_{u_k^*}}{\int_{\mathbb{R}^{T-\ell}} f(\omega_1, \ldots, \omega_T)\,\mathrm{d}\omega_{s_1^*}\cdots\mathrm{d}\omega_{s_\ell^*}},\end{aligned}$$

missä $\{u_1^*, \ldots, u_{T-k-\ell}^*\} = \{1, \ldots, T\} \setminus \{t_1, \ldots, t_k, s_1, \ldots, s_\ell\}$ on niiden indeksien joukko, joista ei puhuta ja $\{s_1^*, \ldots, s_{T-\ell}^*\} = \{1, \ldots, T\} \setminus \{s_1, \ldots, s_\ell\}$ on niiden indeksien joukko, joihin ei ehdollisteta. Saamme kaavat

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_t(\mathrm{d}\omega_{t+1}\cdots\omega_T \,|\, \omega_1\cdots\omega_t) &= \frac{f(\omega_1, \ldots, \omega_T)}{\int_{\mathbb{R}^t} f(\omega_1, \ldots, \omega_t)\,\mathrm{d}\omega_{t+1}\cdots\mathrm{d}\omega_T}\mathrm{d}\omega_{t+1}\cdots\mathrm{d}\omega_T,\\ \tilde{\mathbf{P}}_t(\mathrm{d}\omega_t \,|\, \omega_1\cdots\omega_{t-1}) &= \frac{\int_{\mathbb{R}^{T-t}} f(\omega_1, \ldots, \omega_T)\,\mathrm{d}\omega_{t+1}\cdots\mathrm{d}\omega_T}{\int_{\mathbb{R}^{T-(t-1)}} f(\omega_1, \ldots, \omega_T)\,\mathrm{d}\omega_t\cdots\mathrm{d}\omega_T}\mathrm{d}\omega_t.\end{aligned}$$

◇

6.6 Huomautus. Disintegraatio liittyy luonnollisella tavalla ehdollisiin odotusarvoihin. Nimittäin disintegrointi tarkoittaa yleistettyä Fubinin kaavaa

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y] &= \int_{\Omega_1\times\cdots\times\Omega_T} Y(\omega_1\cdots\omega_T)\,\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega_1\cdots\omega_T) \\
&= \int_{\Omega_1\times\cdots\times\Omega_t} \left\{ \int_{\Omega_{t+1}\times\cdots\times\Omega_T} Y(\omega_1\cdots\omega_T)\,\mathbf{P}_t(\mathrm{d}\omega_{t+1}\cdots\omega_T\,|\,\omega_1\cdots\omega_t) \right\} \\
&\quad \mathbf{P}_t(\mathrm{d}\omega_1\cdots\omega_t) \\
&= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}_t[Y]\right].
\end{aligned}
$$

Erityisesti siis

$$
\mathbf{E}_t[Y](\omega_1\cdots\omega_t) = \int_{\Omega_{t+1}\times\cdots\times\Omega_T} Y(\omega_1\cdots\omega_T)\,\mathbf{P}_t(\mathrm{d}\omega_{t+1}\cdots\omega_T\,|\,\omega_1\cdots\omega_t).
$$

◇

6.7 Apulause. *Olkoot* $\mathbf{P}$ *ja* $\mathbf{Q}$ *jonoavaruuden* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F})$ *todennäköisyysmittoja hajotelminaan*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) &= \tilde{\mathbf{P}}_1(\mathrm{d}\omega_1)\tilde{\mathbf{P}}_2(\mathrm{d}\omega_2|\omega_1)\tilde{\mathbf{P}}(\mathrm{d}\omega_3|\omega_1\omega_2)\cdots\tilde{\mathbf{P}}_T(\mathrm{d}\omega_T|\omega_1\cdots\omega_{T-1}), \\
\mathbf{Q}(\mathrm{d}\omega) &= \tilde{\mathbf{Q}}_1(\mathrm{d}\omega_1)\tilde{\mathbf{Q}}_2(\mathrm{d}\omega_2|\omega_1)\tilde{\mathbf{Q}}(\mathrm{d}\omega_3|\omega_1\omega_2)\cdots\tilde{\mathbf{Q}}_T(\mathrm{d}\omega_T|\omega_1\cdots\omega_{T-1}).
\end{aligned}
$$

Tällöin $\mathbf{P}\sim\mathbf{Q}$ *jos ja vain jos* $\tilde{\mathbf{P}}_t(\,\cdot\,|\,\omega_1\cdots\omega_{t-1}) \sim \tilde{\mathbf{Q}}_t(\,\cdot\,|\,\omega_1\cdots\omega_{t-1})$ *kaikilla* t *ja* $\omega_1\cdots\omega_{t-1}$. *Lisäksi*

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbf{Q}}(\omega) = \prod_{t=1}^{T} \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{P}}_t(\,\cdot\,|\,\omega_1\cdots\omega_{t-1})}{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{Q}}_t(\,\cdot\,|\,\omega_1\cdots\omega_{t-1})}(\omega_t).
$$

Todistus. Tämä tulos seuraa huomautuksesta 6.6. Nimittäin

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y] &= \int_{\Omega} Y(\omega)\,\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) \\
&= \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}\cdots\int_{\Omega_T} Y(\omega)\,\tilde{\mathbf{P}}_T(\mathrm{d}\omega_T|\omega_1\cdots\omega_{T-1})\cdots\tilde{\mathbf{P}}_2(\mathrm{d}\omega_2|\omega_1)\tilde{\mathbf{P}}(\mathrm{d}\omega_1) \\
&= \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2}\cdots\int_{\Omega_T} Y(\omega)\,\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{P}}_T(\cdot|\omega_1\cdots\omega_{T-1})}{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{Q}}_T(\cdot|\omega_1\cdots\omega_{T-1})}(\omega_T)\tilde{\mathbf{Q}}_T(\mathrm{d}\omega_T|\omega_1\cdots\omega_{T-1}) \\
&\quad \cdots\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{P}}_2(\cdot|\omega_1)}{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{Q}}_2(\cdot|\omega_1)}(\omega_2)\tilde{\mathbf{Q}}_2(\mathrm{d}\omega_2|\omega_1)\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{P}}_1}{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{Q}}_1}(\omega_1)\tilde{\mathbf{Q}}_1(\mathrm{d}\omega_1) \\
&= \int_{\Omega_1\times\cdots\times\Omega_T} Y(\omega)\prod_{t=1}^{T}\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{P}}_t(\cdot|\omega_1\cdots\omega_{t-1})}{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{Q}}_t(\cdot|\omega_1\cdots\omega_{t-1})}(\omega_t)\mathbf{Q}(\mathrm{d}\omega_1\cdots\omega_T)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega Y(\omega)\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbf{Q}}(\omega)\,\mathbf{Q}(\mathrm{d}\omega) \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[Y\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\mathbf{Q}}\right].
\end{aligned}
$$

Tästä näemme Radon–Nikodym-derivaatan muodon ja väite seuraa. □

I päälause: arbitraasivapaus

Yleisen dynaamisen diskreettiaikaisen hinnoittelumallin $(B, S, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ arbt-raasivapaus voidaan karakterisoida täysin ehdollisten yhden askeleen mallien arbitraasivapaudella.

6.8 Apulause. *Hinnoittelumalli* $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ *mahdollistaa arbitraasin jos ja vain jos on olemassa ehdollinen yhden askeleen malli, joka mahdollistaa arbitraasin. Toisin sanoen on olemassa sellainen kiinteä hetki* $t \le T$ *ja* $\mathcal{F}_{t-1}$*-mitallinen riskisijoitus* $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^d)$*, että*

$$
\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^d \eta^i \Delta\bar{S}_t^i \ge 0\right) = 1 \quad ja \quad \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^d \eta^i \Delta\bar{S}_t^i > 0\right) > 0.
$$

Todistus. On selvää, että jonkin kiinteän hetken arbitraasimahdollisuudesta seuraa arbitraasimahdollisuus koko dynaamiseen malliin.

Oletamme sitten, että hinnoittelumalli mahdollistaa arbitraasin. Olkoon $\pi = (\beta, \gamma)$ arbitraasistrategia ja

$$
t^* \;:=\; \inf\left\{t \le T \,:\, \bar{V}_t^\pi(\omega) \ge 0 \text{ kaikilla } \omega \text{ ja } \mathbf{P}(\bar{V}_t > 0) > 0\right\}.
$$

Koska π on arbitraasistrategia, niin viimeistään $t^* = T$ tällainen hetki ja hetkellä t^* joko $\bar{V}_{t^*-1}^\pi = 0$ tai $\mathbf{P}(\bar{V}_{t^*-1}^\pi < 0) > 0$. Ensimmäisessä tapauksessa

$$
\bar{V}_{t^*}^\pi \;=\; \Delta\bar{V}_{t^*}^\pi \;=\; \sum_{i=1}^d \gamma_{t^*}^i \Delta\bar{S}_{t^*},
$$

joten valitsemme $\eta = \gamma_{t^*}$. Jälkimmäisessä tapauksessa puolestaan valitsemme $\eta = \gamma_{t^*}\mathbf{1}_{\{\bar{V}_{t^*-1}^\pi < 0\}}$. Tällöin

$$
\sum_{i=1}^d \eta^i \Delta\bar{S}_{t^*}^i \;=\; \Delta\bar{V}_{t^*}^\pi \mathbf{1}_{\{\bar{V}_{t^*-1}^\pi < 0\}} \;\ge\; V_{t^*-1}^\pi \mathbf{1}_{\{\bar{V}_{t^*-1}^\pi < 0\}}.
$$

Rakentamamme η on kaipaamamme arbitraasi kiinteällä hetkellä t^*. □

Olemme nyt valmiit todistamaan rahoitusteorian I päälauseen.

6.9 Lause. *Hinnoittelumalli* $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ *on arbitraasivapaa jos ja vain jos sille on olemassa ekvivalentti martingaalimitta* $\mathbf{Q}$.

Todistus. Tiedämme jo, että $\mathbf{Q}$:n olemassaolosta seuraa arbitraasivapaus. Tämä oli väite 4.30.

Olkoon sitten hinnoittelumalli arbitraasivapaa. Tällöin, apulauseen 6.8 nojalla, jokainen ehdollinen askel $t-1 \to t$ on arbitraasivapaa. Siten, staattisen I päälauseen 2.29 nojalla, on olemassa ehdollisen todennäköisyyden $\tilde{\mathbf{P}}_t$ kanssa ekvivalentti ehdollinen riskineutraali todennäköisyys $\tilde{\mathbf{Q}}_t$. Mutta $\mathbf{P}$ määräytyy ehdollisista todennäköisyyksistä $\tilde{\mathbf{P}}_t$ disintegrointikaavan (6.2) mukaan. Siispä määrittelemme mitan $\mathbf{Q}$ vastaavasti:

$$\mathbf{Q}(\mathrm{d}\omega_1 \cdots \omega_T) \quad := \quad \tilde{\mathbf{Q}}_1(\mathrm{d}\omega_1)\tilde{\mathbf{Q}}_2(\mathrm{d}\omega_2 \,|\, \omega_1) \cdots \tilde{\mathbf{Q}}_T(\mathrm{d}\omega_T \,|\, \omega_1 \cdots \omega_T).$$

Nyt $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ apulauseen 6.7 nojalla. Perustelemme sitten, että $\mathbf{Q}$ on martingaalimitta. Nyt

$$\mathbf{E}^{\tilde{\mathbf{Q}}_t(\,\cdot\,|\,\omega_1 \cdots \omega_{t-1})}[\Delta \bar{S}_t] \quad = \quad 0,$$

mutta

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_{t-1}[\Delta \bar{S}_t](\omega_1 \cdots \omega_{t-1}) \\
&\quad = \int_{\Omega_t \times \cdots \times \Omega_T} \Delta \bar{S}_t(\omega_1 \cdots \omega_T)\, \mathbf{Q}_{t-1}(\mathrm{d}\omega_t \cdots \omega_T \,|\, \omega_1 \cdots \omega_{t-1}) \\
&\quad = \int_{\Omega_t} \Delta \bar{S}_t(\omega_1 \cdots \omega_{t-1}\omega_t)\, \tilde{\mathbf{Q}}_t(\mathrm{d}\omega_t \,|\, \omega_1 \cdots \omega_{t-1}) \\
&\quad = \mathbf{E}^{\tilde{\mathbf{Q}}_t(\,\cdot\,|\,\omega_1 \cdots \omega_{t-1})}[\Delta \bar{S}_t] \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Siispä $\mathbf{Q}$ on ekvivalentti martingaalimitta. □

Dynaamisen hinnoittelumallin $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ ekvivalenttien martingaalimittojen joukolle käytämme merkintää $\mathcal{Q}$.

Tarkastelemme nyt johdannaisten arbitraasivapaita hintoja dynaamisessa mallissa. Osoittautuu, että tilanne on yhden askeleen mallin kaltainen.

6.10 Määritelmä. Olkoon F hinnoittelumallin $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ ehdollinen vaade. Luku $c(F)$ vaateen F *arbitraasivapaa hinta*, jos on olemassa sellainen prosessi S^{d+1} avaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, että

$$S_0^{d+1} \quad = \quad c(F) \qquad \text{ja} \qquad S_T^{d+1} \quad = \quad F$$

sekä laajennettu malli $(B,(S,S^{d+1}),\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbf{P})$ on arbitraasivapaa. Arbitraasivapaiden hintojen joukko on $C(F)$ ja *osto- ja myyntihinnat* ovat

$$c^-(F) \quad := \quad \inf C(F) \qquad \text{ja} \qquad c^+(F) \quad := \quad \sup C(F).$$

6.11 Väite. *Olkoon $\bar{F}$ arbitraasivapaan hinnoittelumallin $(B,S,\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbf{P})$ diskontattu ehdollinen vaade. Tällöin*

$$C\left(\bar{F}\right) \quad = \quad \left\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\bar{F}\right] \,:\, \mathbf{Q}\in\mathcal{Q} \;\; \textit{ja}\; \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[|\bar{F}|\right]<\infty\right\}. \tag{6.12}$$

Lisäksi, jos $C(\bar{F})\neq\varnothing$ ja $\bar{F}$ on rajoitettu, niin

$$c^-\left(\bar{F}\right) \quad = \quad \inf_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\bar{F}\right] \qquad \textit{ja} \qquad c^+\left(\bar{F}\right) \quad = \quad \sup_{\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\bar{F}\right].$$

Todistus. Rahoitusteorian I päälauseen 6.9 nojalla $c(\bar{F})$ on diskontatun vaateen $\bar{F}$ arbitraasivapaa hinta jos ja vain jos laajennetulle hinnoittelumallille on olemassa sellainen ekvivalentti mitta $\mathbf{Q}$, että

$$\bar{S}^i_t \quad = \quad \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_t\left[\bar{S}^i_T\right], \qquad t=0,\ldots,T \quad \text{ja} \quad i=1,\ldots,d+1.$$

Erityisesti $\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}$ eli se on laajentamattoman mallin ekvivalentti martingaalimitta. Saamme inkluusion $\subset$ kaavaan (6.12). Kääntäen, jos $c(\bar{F})=\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\bar{F}]$ jollekin $\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}$, niin määrittelemme prosessin $\bar{S}^{d+1}$ asettamalla

$$\bar{S}^{d+1}_t \quad := \quad \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_t\left[\bar{F}\right].$$

Tällöin $\mathbf{Q}$ on laajennetun mallin ekvivalentti martingaalimitta. Inkluusio $\supset$ kaavassa (6.12) seuraa.

Kaavat osto- ja myyntihinnoille seuraavat välittömästi kaavasta (6.12), jos vain $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[|\bar{F}|]<\infty$ kaikilla $\mathbf{Q}\in\mathcal{Q}$. Mutta tämä pitää paikkansa, koska $\bar{F}$ on rajoitettu. □

6.13 Väite. *Olkoon $\bar{F}$ arbitraasivapaan hinnoittelumallin $(B,S,\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbf{P})$ diskontattu ehdollinen vaade. Tällöin*

(i) *Jos $\bar{F}$ on toistettavissa, niin $C(\bar{F})=\{V_0^\pi\}$, missä π on jokin $\bar{F}$:n toistava strategia.*

(ii) *Jos $\bar{F}$ ei ole toistettavissa, niin joko $C(\bar{F})=\varnothing$ tai $c^-(\bar{F})<c^+(\bar{F})$ ja*

$$C(\bar{F}) \quad = \quad \left(c^-(\bar{F}),\, c^+(\bar{F})\right).$$

Todistus. Todistamme kohdan (i). Kohta (ii) jää harjoitustehtäväksi.

Olkoon $\bar{F}$ toistettavissa. Tällöin arbitraasivapaa hinta on myös toistohinta. Jos toistohintoja on useita, niin voimme tehdä arbitraasia. Nimittäin, jos π^1 on toistostrategia toistohinnalla c^1 ja π^2 toistostrategia toistohinnalla $c^2<c^1$, niin strategia $\pi^2-\pi^1$ toistaa nollan alkuvarallisuudella $c^2-c^1<0$. Arbitraasivapaita toistohintoja ei siis voi olla useita. □

II päälause: täydellisyys

Tarkastelemme täydellisyyttä yleisssä diskreettiaikaisessa dynaamisessa mallissa $(B, S, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$. Hinnoittelumalli on siis täydellinen, jos jokainen ehdollinen vaade voidaan suojata eli toistaa.

Kuten arbitraasivapaus, myös täydellisyys määräytyy täysin yksittäisten ehdollisten aika-askeleiden kautta.

6.14 Apulause. *Arbitraasivapaa hinnoittelumalli* $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ *on täydellinen jos ja vain jos jokainen ehdollinen yhden askeleen malli on täydellinen.*

Todistus. Jos jokainen $\mathcal{F}_{t-1}$-ehdollinen yhden askeleen malli $t-1 \to t$ on täydellinen, niin mikä tahansa $\mathcal{F}_t$-mitallinen (diskontattu) vaade $\bar{F}_t$ voidaan toistaa $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallisella alkuvarallisuudella $\bar{F}_{t-1} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_{t-1}[\bar{F}_t]$ ja $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallisilla osakepainoilla γ^i_t, $i = 1, \ldots, d$. Olkoon sitten F jokin dynaamisen mallin vaade. Asettamalla $\bar{F}_t = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_t[\bar{F}]$ voimme toistaa F:n ketjuttamalla ehdolliset yhden askeleen toistot. Alkuvaraalisuutemme on $\bar{F}_0 = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\bar{F}]$ ja toistostrategiamme on $\pi = (\beta, \gamma)$, missä γ tulee yhden askeleen toistoista ja β tulee omavaraisuusehdosta ja varallisuuksista $V^\pi_t = F_t$, $t \le T$.

Jos taas dynaaminen malli on täydellinen, niin jokainen $\mathcal{F}_t$-mitallinen (diskontattu) vaade $\bar{F}_t$ on suojattavissa jollakin $\pi = (\beta, \gamma)$. Mutta tällöin

$$\bar{F}_t = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_{t-1}\left[\bar{F}_t\right] + \sum_{i=1}^{d} \gamma^i_t \Delta \bar{S}^i_t. \tag{6.15}$$

Tästä seuraa, että jokainen ehdollinen yhden askeleen malli on täydellinen. Tavitsemme vain $\mathcal{F}_{t-1}$-ehdollisen alkuvarallisuuden (diskontatussa maailmassa) $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_{t-1}[\bar{F}_t]$ ja vaade $\bar{F}_t$ suojataan kaavan (6.15) avulla. □

6.16 Väite. *Arbitraasivapaa hinnoittelumalli* $(B, S, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ *on täydellinen jos ja vain jos jokainen rajoitettu ehdollinen vaade voidaan toistaa. Tällöin* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *voidaan jakaa atomeihin, joita on korkeintaan* $(d+1)^T$ *kappaletta.*

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa jälkimmäisestä ja jälkimmäinen väite seuraa apulauseesta 6.14 ja staattisesta II päälauseesta 3.16. □

Väitteen 6.16 nojalla yhden osakkeen hinnoittelumalli on täydellinen jos ja vain jos se on yleistetty binomimalli. Nimittäin vaihtelemalla horisonttia T näemme, että nyt jokaisella ajanhetkellä voi olla vain 2 haarautumista sattumassa. Toisaalta yleistetty binomimalli on aina täydellinen riippumatta siitä, onko se arbitraasivapaa vai ei. Siten näemme (ainakin yhden osakkeen tapauksessa), että apulause 6.14 ja väite 6.16 pätevät myös sellaisille hinnoittelumalleille, jotka mahdollistavat arbitraasin.

Olemme päässeet rahoitusteorian II päälauseeseen.

6.17 Lause. *Arbitraasivapaa hinnoittelumalli* $(B, S, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ *on täydellinen jos ja vain jos sillä on täsmälleen yksi ekvivalentti martingaalimitta* $\mathbf{Q}$.

Todistus. Täydellisyys on riippumatonta numeräärin, siis rahayksikön, valinnasta. Voimme siis olettaa, että hinnoittelumalli on diskontattu.

Jos hinnoittelumalli on täydellinen, niin $\mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{F}$, on toistettava vaade. Olkoon π sen toistostrategia. Koska malli on arbitraasivapaa, niin toistohinta $c(\mathbf{1}_A) = V_0^\pi$ on yksikäsitteinen. Mutta V^π on $\mathbf{Q}$-martingaali, joten

$$c(\mathbf{1}_A) \quad = \quad V_0^\pi \quad = \quad \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[V_T^\pi] \quad = \quad \mathbf{Q}(A).$$

Siispä $\mathbf{Q}$ on yksikäsitteinen.

Jos taas $\mathbf{Q}$ on yksikäsitteinen, niin jokaisen vaateen F arbitraasivapaiden hintojen joukko on yksiö väiteen 6.11 nojalla. Siten väitteen 6.13 kohdan (ii) nojalla vaade F voidaan toistaa. $\square$

6.18 Huomautus. Arbitraasivapaan hinnoittelumallin täydellisyys tarkoittaa itse asiassa sitä, että jokainen $\mathbf{Q}$-martingaali M voidaan esittää muodossa

$$M_t \quad = \quad M_0 + \sum_{s=1}^{t} \sum_{i=1}^{d} m_s^i \Delta \bar{S}_s^i,$$

missä m on ennustettava vektoriarvoinen prosessi. Tämä on niin sanottu *ennustettava esitysominaisuus*. $\diamond$

Harjoitustehtäviä lukuun 6

6.1. Todista perinteinen ketjusääntö (6.4).

6.2. Olkoon satunnaismuuttujapari (X, Y) jakautunut normaalisti odotusarvoilla $\mu = (\mu_X, \mu_Y)$, varianseilla $\sigma^2 = (\sigma_X^2, \sigma_Y^2)$ ja korrelaatiolla ρ_{XY}. Laske ehdollisen satunnaismuuttujan $X|Y$ jakauma eli etsi disintegraatio

$$\mathbf{P}_{X,Y}(X \in \mathrm{d}x\,,\, Y \in \mathrm{d}y) \quad = \quad \mathbf{P}_Y(Y \in \mathrm{d}y)\mathbf{P}_{X|Y}(X \in \mathrm{d}x \,|\, Y = y).$$

6.3. Todista väitteen 6.13 kohta (ii).

6.4. Perustele huomautus 6.18.

"Diskreetti aika" pähkinänkuoressa

- Otaksuma tehokkaista markkinoista $\Longleftarrow$ satunnaiskulkumalli
- Arbitraasivapaus $\Longleftarrow$ satunnaiskulkumalli

Binomimallista

- Ekvivalentti martingaalimitta $\mathbf{Q}$: $q = \frac{r-d}{u-d}$.
- Eurooppalaiset vaateet F: hinta on V_0, missä

$$V_t = \frac{B_t}{B_T} \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}[F].$$

Toistostrategia

$$\gamma_t = \frac{\nabla V_t}{S_{t-1}(u-d)}.$$

- Amerikkalaiset vaateet F: hinta on U_0, missä

$$\begin{aligned} U_T &= F_T, \\ U_t &= \max\left\{ F_t\,, \frac{1}{1+r}\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}[U_{t+1}] \right\}. \end{aligned}$$

Toistostrategia

$$\gamma_t = \frac{\nabla U_t}{S_{t-1}(u-d)}.$$

- Hinnoittelumalli on täydellinen $\Longleftrightarrow$ Hinnoittelumalli on yleistetty binomimalli.

Yleisesti

- Arbitraasivapaus $\Longleftrightarrow$ on olemassa ekvivalentti martingaalimitta $\mathbf{Q}$.
- Eurooppalaisen vaateen F arbitraasivapaa hinta $= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\frac{F}{B_T}\right]$
- Täydellisyys $\Longleftrightarrow$ ekvivalentti martingaali mitta $\mathbf{Q}$ on yksikäsitteinen.
- Arbitraasivapaus (täydellisyys) $\Longleftrightarrow$ ehdollisten askeleiden arbitraasivapaus (täydellisyys).

Osa III

Jatkuva aika

Luku 7

Kohti jatkuvaa aikaa

All exact science is dominated by the idea of approximation.
— Bertrand Russell

Tehokkaat markkinat jatkuvassa ajassa

Diskreetissä ajassa kirjoitimme Faman satunnaiskulkuotaksuman (4.12) differenssiyhtälönä

$$\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} = \mu + \sigma\varepsilon_{t+1}.$$

Tämän differenssiyhtälön ratkaisu oli

$$S_t = S_0 \prod_{s=1}^{t} (1 + \mu + \sigma\varepsilon_t).$$

Jatkuvassa ajassa tarkastelemme vastaavaa differenssiyhtälöä välin $[0, T]$ aikahilalla $\Delta t, 2\Delta t, \ldots, n\Delta t = T$:

$$\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} = \mu\Delta t + \sigma \left(W_{t+\Delta t} - W_t\right), \tag{7.1}$$

missä t on aikahilan $\Delta t, 2\Delta t, \ldots, n\Delta t = T$ piste ja Δt on pieni aikadifferenssi. Valkoinen häly $\varepsilon = (\varepsilon_{s\Delta t})_{s=1}^{T/\Delta t}$ on kirjoitettu yhtälössä (7.1) differenssimuodossa $\left(W_{s\Delta t} - W_{(s-1)\Delta t}\right)_{k=1}^{T/\Delta t}$ (tällä kirjoitustavalla ennakoimme tulevia ongelmia). Kun $\Delta t \to 0+$ yhtälössä (7.1), päädymme differentiaaliyhtälöön

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t. \tag{7.2}$$

Tässä vaiheessa meillä on kolme ongelmaa:

(1) Mikä on prossessi W yhtälössä (7.2)?

(2) Miten stokastinen differentiaaliyhtälö (7.2) tulee ymmärtää?

(3) Mikä on stokastisen differentiaaliyhtälön (7.2) ratkaisu?

Mikäli vastauksemme kohtaan (1) on sellainen, että prosessi W on oikealta derivoituva poluittain eli raja-arvo

$$W_t'(\omega) \quad = \quad \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{W_{t+\Delta t}(\omega) - W_t(\omega)}{\Delta t}$$

on olemassa jokaisella ω, niin kohtien (2) ja (3) ratkaisut ovat selviä. Nimittäin tällöin (7.2) on jokaisella ω tavallinen differentiaaliyhtälö

$$S_t'(\omega) \quad = \quad S_t(\omega) \left(\mu + \sigma W_t'(\omega)\right).$$

Tunnetusti tämän differentiaaliyhtälön yksikäsitteinen ratkaisu on

$$S_t(\omega) \quad = \quad S_0 \exp\left\{\mu t + \sigma W_t(\omega)\right\}.$$

Osoittautuu, että tilanne ei ole näin helppo eli W_t' ei ole olemassa.

Etsimme (erään) vastauksen ongelmaan (1). Koska W:n differenssit ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, niin saamme ehdot

(a) Prosessilla W on *riippumattomat lisäykset* eli kaikilla $t \geq s$ satunnaismuuttuja $W_t - W_s$ on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_s^W = \sigma(W_u : u \leq s)$.

(b) Prosessilla W on *stationaariset lisäykset* eli $W_t - W_s$ ja W_{t-s} ovat samoin jakautuneita kaikilla $s \leq t$.

Oletamme vielä varsin heikon jatkuvuusominaisuuden:

(c') Prosessi W on *stokastisesti jatkuva* eli kaikilla $\varepsilon > 0$ ja $t \in [0, T]$ pätee $\mathbf{P}(|W_t - W_s| \geq \varepsilon) \to 0$, kun $s \to t$.

Karkeasti ottaen ehto (c') sanoo, että kiinteällä ennalta määrätyllä deterministisellä ajan hetkellä prosessi ei hyppää. Esimerkiksi Poisson-prosessi toteuttaa tämän ehdon.

Ehdot (a), (b) ja (c') toteuttavia prosesseja kutsutaan *Lévy-prosesseiksi*.

Jatkuvassa ajassa historia $\mathbb{F}$ on σ-algebraperhe $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$, missä $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, kun $s \leq t$. Jatkuva-aikainen prosessi $Y = (Y_t)_{t \in [0,T]}$ on $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$-martingaali, jos

$$\mathbf{E}_s[Y_t] \quad := \quad \mathbf{E}\left[Y_t | \mathcal{F}_s\right] \quad = \quad Y_s$$

kaikilla $s \leq t$. Ehto on siis sama kuin diskreetissä ajassa, mutta nyt ei riitä tarkastella yhtä aikahyppyä $\mathbf{E}_{t-1}[Y_t]$, koska “edellistä” ajan hetkeä ei ole olemassa. Olkoon $\mathcal{F}_s^Y := \sigma(Y_u : u \leq s)$ eli $\mathbb{F}^Y$ on prosessin Y oma sisäinen historia. Prosessi Y on $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$-*markoviaaninen*, jos

$$\mathbf{P}\left(Y_t \in \mathrm{d}y \,|\, \mathcal{F}_s^Y\right) \quad = \quad p(\mathrm{d}y; t, s, Y_s),$$

missä $p(\mathrm{d}y; t, s, y_s)$ on *siirtymäydin* (*transition kernel*) tai siirtymätodennäköisyys. Markoviaanisuus siis tarkoittaa sitä, että $\mathbb{F}$-ehdollinen $\mathbf{P}$-todennäköisyys riippuu historiasta ainoastaan viimeisen arvon kautta. Toinen tapa luennehtia markoviaanisuus on sanoa, että “menneisyys vaikuttaa tulevaisuuteen ainoastaa nykyhetken kautta”.

7.3 Apulause. *Olkoon Y Lévy-prosessi.*

(i) *Jos $Y \in L^1(\mathbf{P})$, niin $\mathbf{E}[Y_t] = t\mathbf{E}[Y_1]$.*

(ii) *Jos $Y \in L^1(\mathbf{P})$, niin keskitetty prosessi $Y - \mathbf{E}[Y_\cdot]$ on $\mathbb{F}^Y$-martingaali.*

(iii) *Y on markoviaaninen.*

Todistus. Todistamme kohdan (iii). Kohdat (i) ja (ii) jätämme harjoitustehtäviksi. Olkoon B jokin $\mathbb{R}$:n Borel-joukko. Osoitamme itse asiassa vahvemman väitteen

$$\mathbf{P}\left(Y_t - Y_s \in B \,|\, \mathcal{F}_s^Y\right) \quad = \quad \mathbf{P}\left(Y_t - Y_s \in B\right). \tag{7.4}$$

Kaava (7.4) nimittäin sanoo, että

$$\mathbf{P}\left(Y_t \in \mathrm{d}y \,|\, \mathcal{F}_s^Y\right) \quad = \quad \mathbf{P}\left(Y_t - Y_s \in \mathrm{d}y - Y_s \,|\, Y_s\right).$$

Kirjoitamme nyt kaavan (7.4) ehdollisten odotusarvojen avulla:

$$\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_B(Y_t - Y_s) \,|\, \mathcal{F}_s^Y\right] \quad = \quad \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_B(Y_t - Y_s)\right].$$

Mutta tämä kaava seuraa välittömästi prosessin Y riippumattomista lisäyksistä eli siitä, että satunnaismuuttuja $\mathbf{1}_B(Y_t - Y_s)$ on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_s^Y$, kun $s < t$. □

Yhdistämällä ehdon (b) väitteen 7.3 kohdan (iii) todistukseen huomaamme, että itse asiassa Lévy-prosessin siirtymäydin p on muotoa

$$p(\mathrm{d}y; t, s, y_s) \quad = \quad p(\mathrm{d}y + y_s; t - s).$$

Lévy-prosessien muutokset ovat siis homogeenisiä sekä ajassa että tilassa.

Lévy-prosesseja on useita erilaisia. Seuraava kohtalaisen luonnollinen vahvennus oletukseen (c’) tekee prosessistamme W oleellisesti yksikäsitteisen.

(c) Prosessilla W on *jatkuvat polut* eli kaikilla $t \in [0,T]$ ja $\omega \in \Omega$ pätee $\lim_{\Delta t \to 0} W_{t+\Delta t}(\omega) = W_t(\omega)$.

Perustelemme nyt, että ehdoista (a), (b) ja (c) seuraa, että kaikilla $t \in [0,T]$ satunnaismuuttuja W_t on normaalisti jakautunut eli gaussinen. Olkoon

$$Y_k^n \quad := \quad Y_{k,t}^n \quad := \quad W_{\frac{k}{n}t} - W_{\frac{k-1}{n}t}.$$

Ehdoista (a) ja (b) seuraa, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ satunnaismuuttujat Y_k^n, $k \leq n$, ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita. Lisäksi

$$W_t \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} Y_k^n. \tag{7.5}$$

Satunnaismuuttujia, joilla jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on esitys (7.5) riippumattomien samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien summana, kutsutaan *rajatta jaollisiksi* (*infinitely divisible*).

7.6 Apulause. *Olkoon W_t kaavan (7.5) mukainen rajatta jaollinen satunnaismuuttuja. Olkoon*

$$M^n \quad := \quad \max_{k \leq n} |Y_k^n|.$$

Tällöin W_t on normaalisti jakautunut jos ja vain jos $M_n \to 0$ heikosti.

Emme todista apulausetta 7.6. Kiinnostunut lukija voi ottaa yhteyttä luennoitsijaan, esimerkiksi gradun merkeissä.

7.7 Apulause. *Olkoon W prosessi, joka toteuttaa ehdot (a), (b) ja (c). Tällöin $W_t \sim \mathrm{N}(at, b^2 t)$, joillakin $a \in \mathbb{R}$ ja $b^2 \in \mathbb{R}_+$.*

Todistus. Koska W:n polut ovat jatkuvia, niin ne ovat tasaisesti jatkuvia jokaisella välillä $[0,t]$. Tämä tarkoittaa sitä, että jatkuvuusmodulille

$$w^n(\omega) \quad := \quad \max_{k \leq n} \left| W_{\frac{k}{n}t}(\omega) - W_{\frac{k-1}{n}t}(\omega) \right|$$

pätee $w^n \to 0$ kaikilla $\omega \in \Omega$. Mutta w^n on apulauseen 7.6 mukainen M^n. Siten W_t on normaalisti jakautunut. Apulauseen 7.3 kohdan (i) perusteella on nyt selvää, että $\mathbf{E}[W_t] = at$ ja $\mathbf{Var}[W_t] = b^2 t$. □

Jos uskomme (ja miksi emme uskoisi) apulauseen 7.6, niin apulauseen 7.7 nojalla tiedämme, että W_t on gaussinen. Erityisesti siis tiedämme, että W_t:n odotusarvo ja varianssi ovat olemassa. Siten voimme normeerata sen. Normeerausta $\mathbf{E}[\varepsilon_t] = 0$ ja $\mathbf{Var}[\varepsilon_t] = 1$ vastaa valinta

(d) $\mathbf{E}[W_t] = 0$ ja $\mathbf{Var}[W_t] = t$.

7.8 Määritelmä. Prosessi W joka toteuttaa ehdot (a), (b), (c) ja (d) on *Brownin liike* (*Brownian motion*) eli *Wiener-prosessi*.

Yleensä Brownin liikkeen määritelmä annetaan muodossa

(i) $W_t - W_s$ on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_s^W$ kaikilla $t \geq s$,

(ii) $W_t - W_s \quad \sim \quad \mathrm{N}(0, |t-s|)$,

(iii) polut $t \mapsto W_t$ ovat jatkuvia.

Tiedämme kuitenkin nyt, että ehdot (i)–(iii) ja (a)–(d) ovat samoja. Tiedämme myös, että (iii) seuraa ehdoista (i) ja (ii) eli se on turha.

Markov-prosessina Brownin liike voidaan määritellä gaussisen aika- ja tilahomogeenisen siirtymäytimensä kautta:

$$p(\mathrm{d}y; t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{t}\right\} \mathrm{d}y.$$

Nyt todennäköisyys $\mathbf{P}(W_{t_1} \in \mathrm{d}y_1, \ldots, W_{t_m} \in \mathrm{d}y_m)$ voidaan kirjoittaa siirtymäytimen p avulla. Jätämme kaavan keksimisen harjoitustehtäväksi.

Olemme löytäneet vastauksen ongelmaan (1). Ongelman (2) ratkaisu on luvun 8 asia. Luvussa 9 selviää, että ongelman (3) ratkaisu on

$$S_t(\omega) \quad = \quad S_0 \exp\left\{\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t(\omega)\right\}. \tag{7.9}$$

Differentiaaliyhtälön (7.2) ratkaisu ei siis ole se mitä perinteinen differentiaali- ja integraalilaskenta antaisi ymmärtää.

7.10 Huomautus. Diskontattua riskineutraalia prosessia

$$\bar{S}_t \quad = \quad S_0 \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right\}$$

kutsutaan *geometriseksi Brownin liikkeeksi* parametrilla σ. Black–Scholes-mallissa diskontattu osakeprosessi on geometrinen Brownin liike ekvivalentin martingaalimitan suhteen. ◇

Binomimallista geometriseen Brownin liikkeeseen

Edellä päädyimme Brownin liikkeeseen Faman satunnaiskulkuoletuksesta (4.12). Tässä osiossa päädymme Brownin liikkeeseen binomipuun heikkona rajana.

7.11 Määritelmä. Satunnaisvektorit $Y^n = (Y^{1,n}, \ldots, Y^{d,n})$, $n \in \mathbb{N}$, *suppenevat heikosti* eli jakaumamielessä todennäköisyyksien $\mathbf{P}^n$, $n \in \mathbb{N}$, suhteen kohti satunnaisvektoria $Y = (Y^1, \ldots, Y^d)$, jos Y^n:n kertymäfunktiot

$$F^n(y^1, \ldots, y^d) \quad := \quad \mathbf{P}^n(Y^{1,n} \le y^1, \ldots, Y^{d,n} \le y^d)$$

suppenevat kohti Y:n kertymäfunktiota F kaikissa sen jatkuvuuspisteissä. Tällöin merkitsemme $Y^n \xrightarrow{d} Y$.

7.12 Apulause. *Olkoon* $Y^n \xrightarrow{d} Y$.

(i) *Jos* $(a^n)_{n=1}^\infty$ *ja* $(b^n)_{n=1}^\infty$ *ovat suppenevia deterministisiä jonoja raja-arvoinaan* a *ja* b, *niin* $a^n Y^n + b^n \xrightarrow{d} aY + b$.

(ii) *Jos* f *on jatkuva funktio, niin* $f(Y^n) \xrightarrow{d} f(Y)$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Olkoot ε_k, $k \in \mathbb{N}$, riippumattomia satunnaismuuttujia, joille

$$\mathbf{P}(\varepsilon_k = 1) \quad = \quad \frac{1}{2} \quad = \quad \mathbf{P}(\varepsilon_k = -1).$$

Määrittelemme prosessin $W^n = (W_t^n)_{t \in [0,T]}$ asettamalla

$$W_t^n \quad := \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \varepsilon_k,$$

missä $\lfloor \cdot \rfloor$ tarkoittaa kokonaisosan ottamista.

7.13 Apulause. *Olkoot* ε_k, $k \in \mathbb{N}$ *ja* W^n, $n \in \mathbb{N}$, *kuten edellä. Tällöin prosessien* W^n *äärellisulotteiset jakaumat suppenevat heikosti kohti Brownin liikkeen* W *äärellisulotteisia jakaumia. Toisin sanoen*

$$\left(W_{t_1}^n, \ldots, W_{t_m}^n\right) \xrightarrow{d} (W_{t_1}, \ldots, W_{t_m})$$

kaikilla $m \in \mathbb{N}$ *ja* $t_1, \ldots, t_m \in [0, T]$.

Todistus. Koska $\lfloor nt \rfloor / n \to t$, kun $n \to \infty$, niin keskeisen raja-arvolauseen ja apulauseen 7.12 kohdan (i) nojalla kaikille t pätee

$$W_t^n \;=\; \sqrt{\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}} \frac{1}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \varepsilon_k \;\xrightarrow{d}\; W_t.$$

Tismalleen samasta syystä näemme, että kaikille $s \leq t$ pätee

$$W_t^n - W_s^n \;\xrightarrow{d}\; W_t - W_s.$$

Koska prosesseilla W^n, $n \in \mathbb{N}$, ja W on riippumattomat lisäykset, niin järjestämällä $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ ja tulkitsemalla $t_0 = y_0 = 0$ näemme että

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^n\left(W_{t_1}^n \in \mathrm{d}y_1, \ldots, W_{t_m}^n \in \mathrm{d}y_m\right) &= \prod_{i=1}^m \mathbf{P}^n\Big(W_{t_i}^n - W_{t_{i-1}}^n \in \mathrm{d}(y_i - y_{i-1})\Big) \\
&\to \prod_{i=1}^m \mathbf{P}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \in \mathrm{d}(y_i - y_{i-1})\right) \\
&= \mathbf{P}\left(W_{t_1} \in \mathrm{d}y_1, \ldots, W_{t_m} \in \mathrm{d}y_m\right).
\end{aligned}$$

Väite on todistettu. □

Tarkastelemme nyt miten binomipuun käy rajalla. Olkoon

$$\Pi^n \;:=\; \left\{ t_k = \frac{k}{n} T \;:\; k = 1, \ldots, n \right\}$$

välin $[0, T]$ tasavälinen ositus n:ään osaan. Olkoon osakeprosessi S^n määritelty hetkillä $t_k \in \Pi^n$ seuraavan siirtymäkaavion mukaan:

$$\begin{array}{ccccll}
 & & & \nearrow & S_{t_{k-1}}^n(1+u^n) & \text{tn:llä } 1/2 \\
S_{t_{k-1}}^n & \longrightarrow & S_{t_k}^n & & & \\
 & & & \searrow & S_{t_{k-1}}^n(1+d^n) & \text{tn:llä } 1/2,
\end{array}$$

missä

$$u^n \;=\; \frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{ja} \qquad d^n \;=\; \frac{\mu}{n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Näillä parametrien u^n ja d^n valinnoilla

$$\mathbf{E}\left[\frac{S_{t_k}^n - S_{t_{k-1}}^n}{S_{t_{k-1}}^n}\right] \;=\; \mu \qquad \text{ja} \qquad \mathbf{Var}\left[\frac{S_{t_k}^n - S_{t_{k-1}}^n}{S_{t_{k-1}}^n}\right] \;=\; \sigma^2.$$

Satunnaismuuttujien ε_k avulla voimme kirjoittaa differenssiyhtälön (7.1) binomiapproksimaatiossa muodossa

$$\frac{S^n_{t_k} - S^n_{t_{k-1}}}{S^n_{t_{k-1}}} = \frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\varepsilon_k = \mu\Delta t_k + \sigma\varepsilon_k\sqrt{\Delta t_k}.$$

Tämä siis tarkoittaa, että voimme kirjoittaa osakeprosessin muodossa

$$S^n_t = S_0 \prod_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor}\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right), \tag{7.14}$$

kun $S^n_t = S^n_{t_k}$ välillä $t \in [t_k, t_{k+1})$.

7.15 Väite. *Olkoon S^n määritelty kaavan (7.14) ja S kaavan (7.9) mukaan. Tällöin S^n:n äärellisulotteiset jakaumat suppenevat heikosti kohti S:n äärellisulotteisia jakaumia.*

Todistus. Osoitamme aluksi reunajakaumien heikon suppenemisen eli, että $S^n_t \xrightarrow{d} S_t$ kaikilla $t \in [0, T]$. Kirjoitamme S^n_t:n muodossa

$$S^n_t = S_0 \exp\left\{\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \log\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right)\right\}$$

ja osoitamme, että

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \log\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right) \xrightarrow{d} \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t.$$

Tällöin reunajakaumien heikko suppeneminen seuraa apulauseesta 7.12.

Logaritmille pätee Taylorin kehitelmä

$$\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + r(x)x^2,$$

missä $r(x) \to 0$, kun $x \to 0$. Siten

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \log\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right) &= \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor}\left(\frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor}\left(\frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right)^2 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} r\left(\frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right)\left(\frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right)^2 \\
&=: \Sigma^n_1 + \Sigma^n_2 + \Sigma^n_3.
\end{aligned}$$

Keskeisen raja-arvolauseen nojalla

$$\Sigma_1^n \;\xrightarrow{d}\; \mu t + \sigma W_t.$$

Koska $\varepsilon_k^2 = 1$, niin, $\mathbf{P}$:stä riippumatta,

$$\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varepsilon_k \right)^2 \;=\; \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \sigma^2 \;\to\; \sigma^2 t.$$

Jätämme harjoitustehtäväksi nähdä, että termi μ/n ei vaikuta summaan Σ_2^n rajalla. Siten

$$\Sigma_2^n \;\to\; -\frac{1}{2}\sigma^2 t.$$

Enää pitää osoittaa, että $\Sigma_3^n \xrightarrow{d} 0$. Mutta tämä on helppo nähdä. Nimittäin

$$\begin{aligned}
|\Sigma_3^n| \;&\le\; \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \left| r\left(\frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varepsilon_k \right) \right| \left(\frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varepsilon_k \right)^2 \\
&\le\; \max\left\{ \left| r\left(\frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \right|, \left| r\left(\frac{\mu}{n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \right| \right\} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \left(\frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varepsilon_k \right)^2 \\
&=\; -2 \max\left\{ \left| r\left(\frac{\mu}{n} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \right|, \left| r\left(\frac{\mu}{n} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \right| \right\} \Sigma_2^n.
\end{aligned}$$

Koska $r(\mu/n \pm \sigma/\sqrt{n}) \to 0$ ja $\Sigma_2^n \to 0$, kun $n \to \infty$, niin näemme, että $\Sigma_3^n \to 0$, kun $n \to \infty$. Tämäkin suppeneminen oli $\mathbf{P}$:stä riippumatonta.

Lopuksi jätämme harjoitustehtäväksi argumentoida äärellisulotteisen heikon suppenemisen. □

Tarkastelemme sitten heikkoa suppenemista ekvivalenttien martingaalimittojen suhteen. Olkoon korko $r^n = r/n$. Tällöin siis

$$B_t^n \;=\; \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{\lfloor nt \rfloor} \;\to\; e^{rt},$$

kun $n \to \infty$. Lisäksi, kun n on riittävän iso, niin $d^n < r^n < y^n$ eli binomipuu on lopulta arbitraasivapaa. Ekvivalentti martingaalimitta $\mathbf{Q}^n$ approksimaatiolle n määräytyy kaavasta

$$q^n \;=\; \mathbf{Q}^n(\varepsilon_k = 1) \;=\; \frac{r/n - \mu/n + \sigma/\sqrt{n}}{2\sigma/\sqrt{n}}.$$

Mitan $\mathbf{Q}^n$ suhteen ε_k:t ovat edelleen riippumattomia ja samoin jakautuneita, mutta odotusarvo ja varianssi muuttuvat:

$$\text{(7.16)}\quad \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^n}[\varepsilon_k] \;=\; 2q^n - 1 \qquad \text{ja} \qquad \mathbf{Var}^{\mathbf{Q}^n}[\varepsilon_k] \;=\; 4q^n(1-q^n).$$

7.17 Väite. *Olkoon S^n kuten kaavassa (7.14). Tällöin, mittojen $\mathbf{Q}^n$ suhteen, S^n:n äärellisulotteiset jakaumat suppenevat heikosti kohti prosessia*

$$t \mapsto S_0 \exp\left\{rt - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right\}.$$

Todistus. Olkoon U_t^n väitteen 7.15 todistuksen Σ_1^n. Käyttämällä kaavoja (7.16) näemme pienen sievennyksen jälkeen, että

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^n}\left[U_t^n\right] &= \frac{r}{n}\lfloor nt\rfloor \quad\to\quad rt, \\
\mathbf{Var}^{\mathbf{Q}^n}\left[U_t^n\right] &= \left(\frac{\sigma^2}{n} - \frac{(r-\mu)^2}{n^2}\right)\lfloor nt\rfloor \quad\to\quad \sigma^2 t.
\end{aligned}$$

Siten, keskeisen raja-arvolauseen nojalla,

$$U_t^n \quad \xrightarrow{d} rt + \sigma W_t.$$

Tämän huomion jälkeen todistus on sama kuin väitteen 7.15 kohdalla. □

Tarkastelemme lopuksi suojaushinnan approksimointia. Binomipuussa

$$c^n(f(S_T^n)) \quad = \quad \frac{1}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\lfloor nT\rfloor}}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^n}\left[f\left(S_T^n\right)\right].$$

Jos f on "siisti", niin $f(S_T^n) \xrightarrow{d} f(S_T)$ ja $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^n}\left[f(S_T^n)\right] \to \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[f(S_T)\right]$. Koska rajamalli on sellainen, että

$$S_T \quad = \quad S_0 e^{rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma W_T},$$

niin osaamme laskea odotusarvon $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[f(S_T)\right]$ ja rajalla on voimassa

$$v(f(S_T)) \quad = \quad e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(S_0 e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}\,y}\right)\frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}}. \tag{7.18}$$

7.19 Esimerkki. Tarkastelemme eurooppalaista osto-optiota $(S_T - K)^+$. Olkoon Φ standardinormaalijakauman kertymäfunktio eli

$$\Phi(x) \quad := \quad \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}}.$$

Olkoon lisäksi $y_0 = y_0(r, \sigma, T, S_0)$ yhtälön

$$S_0 e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}y} - K \quad = \quad 0$$

ratkaisu y:n suhteen. Tällöin saamme yhtälöstä (7.18)

$$\begin{aligned} c^{\text{call}} &= e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\left(S_0 e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma\sqrt{T}\,y}-K\right)^+ \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}} \\ &= e^{-rT}\int_{y_0}^{\infty}\left(S_0 e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma\sqrt{T}\,y}-K\right) \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(y-\sigma\sqrt{T}\right)^2}\,\mathrm{d}y - Ke^{-rT}\left(1-\Phi(y_0)\right) \\ &= S_0\Big(1-\Phi(y_0-\sigma\sqrt{T})\Big) - Ke^{-rT}\Big(1-\Phi(y_0)\Big). \end{aligned}$$

Lopullisen sievennyksen, jonka jätämme harjoitustehtäväksi, jälkeen saamme

$$c^{\text{call}} = S_0\Phi\left(\frac{\log\frac{S_0}{K}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\frac{S_0}{K}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Tämä on kuuluisa *Black–Scholes-hinnoittelukaava* eurooppalaiselle osto-optiolle. Se approksimoi esimerkin 5.20 Cox–Ross–Rubinstein-hintaa, tai yhtä hyvin päinvastoin. ◇

Harjoitustehtäviä lukuun 7

7.1. Todista apulauseen 7.3 kohdat (i) ja (ii).

7.2. Olkoon W Brownin liike ja

$$p(\mathrm{d}y;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2t}\right\}\mathrm{d}y$$

sen siirtymäydin. Ilmoita todennäköisyys $\mathbf{P}(W_{t_1}\in \mathrm{d}y_1,\ldots,W_{t_m}\in \mathrm{d}y_m)$ siirtymäytimen $p(\mathrm{d}y;t)$ avulla.

7.3. Todista apulauseen 7.12 kohta (i).

7.4. Todista apulauseen 7.12 kohta (ii).

7.5. Paikkaa väitteen 7.15 todistuksen aukko: $\Sigma_2^n \to -\frac{1}{2}\sigma^2 t$.

7.6. Todista kaavat (7.16).

7.7. Todista väitteen 7.17 todistuksen väitteet $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^n}[U_t^n]\to rt$ ja $\mathbf{Var}^{\mathbf{Q}^n}[U_t^n]\to \sigma^2 t$.

7.8. Todista esimerkin 7.19 kaava

$$c^{\text{call}} = S_0\Phi\left(\frac{\log\frac{S_0}{K}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\frac{S_0}{K}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Luku 8

Brownin liike ja stokastiset integraalit

> I got the biggest kick of hearing those options traders routinely talk about differential equations and stochastic differential equations. . . . People had no choice. — Peter Bernstein

Brownin liikkeen perusominaisuuksia

8.1 Apulause. *Olkoon* $(W_t)_{t\in[0,T]}$ *Brownin liike. Tällöin myös prosessit*

(i) $(W_T - W_{T-t})_{t\in[0,T]}$,

(ii) $\left(\sqrt{a}\, W_{t/a}\right)_{t\in[0,Ta]}$, $a > 0$,

ovat Brownin liikkeitä.

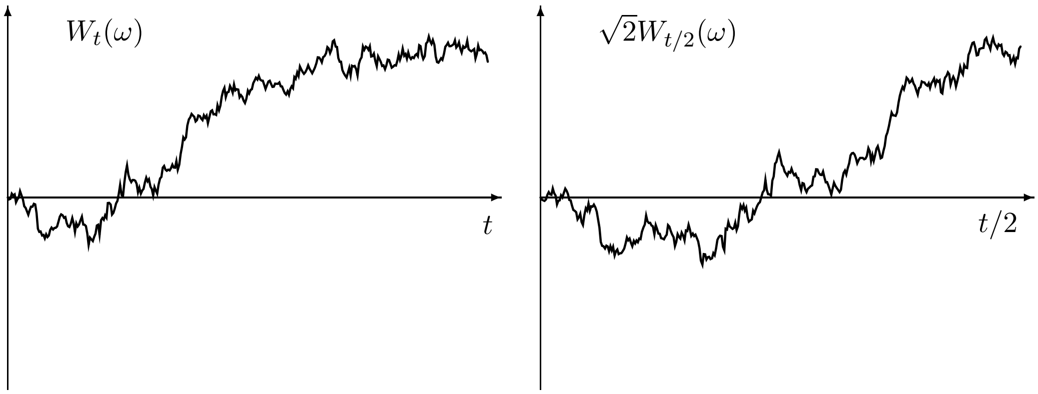
Todistus. Gaussinen prosessi W määräytyy odotusarvonsa $m(t) = \mathbf{E}[W_t]$ ja kovarianssinsa $\Gamma(s,t) = \mathbf{E}\left[(W_s - M(s))(W_t - M(t))\right]$ kautta. Brownin liikkeelle $m(t) = 0$ ja $\Gamma(s,t) = \min\{s,t\}$ (harjoitustehtävä). On helppo tarkistaa, että kohtien (i) ja (ii) prosesseilla on Brownin liikkeen odotusarvo ja kovarianssi. □

Apulauseen 8.1 kohdasta (ii) eli Brownin liikkeen *itsesimilaarisuudesta* seuraa, että integrointi Brownin liikkeen suhteen on haastavaa.

8.2 Apulause. *Brownin liike W ei ole ole missään derivoituvia. Itse asiassa*

$$\limsup_{s\to t} \frac{W_t - W_s}{t-s} = \infty \tag{8.3}$$

kaikilla $t \in [0,T]$ ja melkein kaikilla $\omega \in \Omega$.



Brownin liikkeen polku $W_\cdot(\omega)$ (vasemmalla) ja sen suurennos $\sqrt{2}W_{\cdot/2}(\omega)$ (oikealla).

Todistus. Koska Brownin liikkeellä on stationaariset lisäykset, niin riittää tarkastella pistettä $t = 0$. Olkoon $M > 0$ ja

$$A_n \quad := \quad \left\{ \sup_{s \le 1/n} \left| \frac{W_s}{s} \right| > M \right\}.$$

Selvästi $A_{n+1} \subset A_n$. Siten $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$. Koska

$$\mathbf{P}(A_n) \quad \ge \quad \mathbf{P}\left(\left| \frac{W_{1/n}}{1/n} \right| > M \right) \quad = \quad \mathbf{P}\left(|W_1| > \frac{M}{\sqrt{n}} \right),$$

niin $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} A_n) = 1$. Väite (8.3) seuraa tästä. □

Seuraava tulos sanoo, että gaussiset martingaalit ovat enemmän tai vähemmän Brownin liikkeitä.

8.4 Apulause. *Olkoon M gaussinen martingaali, jolle $M_0 = 0$. Tällöin M on aikamuunnettu Brownin liike eli on olemassa sellainen kasvava deterministinen aikamuunnos $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, että $M_t = W_{\sigma(t)}$.*

Todistus. Olkoon $s \le t$. Koska M on gaussinen martingaali, niin

$$\begin{aligned} \Gamma(t,s) &:= \mathbf{E}\left[M_s M_t\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}_s\left[M_s M_t\right]\right] \\ &= \mathbf{E}\left[M_s \mathbf{E}_s\left[M_t\right]\right] \\ &= \mathbf{E}\left[M_s^2\right] \\ &= K(s,s). \end{aligned}$$

Väite seuraa asettamalla $\sigma(t) := \Gamma(t,t)$. Funktion σ kasvavuus seuraa prosessin M riippumattomista lisäyksistä (harjoitustehtävä). □

Stokastinen integraali

Tiedämme nyt, että Brownin liikkeen polut eivät ole derivoituvia. Tämä oli apulause 8.2. Siten emme voi ymmärtää osakkeen S dynamiikkaa kuvavaa differentiaaliyhtälöä

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t, \qquad S_0 = S_0, \tag{8.5}$$

tavalliseen tapaan. Integraali on kuitenkin periaatteessa yleisempi käsite kuin derivaatta. Voimme siis yrittää ymmärtää differentiaaliyhtälön (8.5) integraaliyhtälönä

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_s\mu\,\mathrm{d}t + \int_0^t S_s\sigma\mathrm{d}W_s.$$

Jatkossa siis miellämme esimerkiksi differentiaaliyhtälön

$$\mathrm{d}y_t = f(t,y_t)\,\mathrm{d}t + g(t,y_t)\,\mathrm{d}x_t$$

ainoastaan lyhennysmerkintänä integraaliyhtälölle

$$y_t - y_s = \int_s^t f(u,y_u)\,\mathrm{d}u + \int_s^t g(u,y_u)\,\mathrm{d}x_u.$$

Tehtävänämme on siis yrittää ymmärtää mitä tarkoittaa integraali Brownin liikkeen W suhteen. Vaikka Brownin liike ei olekaan derivoituva, niin voimme ehkä ymmärtää integraalit Riemann–Stieltjes-mielessä

$$\int_s^t \eta_u\,\mathrm{d}W_u = \lim_{n\to\infty}\sum_{t_k\in\Pi^n}\eta_{t_k^*}\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right),$$

missä Π^n on jokin välin $[s,t]$ ositus, jolle $|\Pi^n| := \max_{k\le n}(t_k - t_{k-1}) \to 0$ ja t_k^* on mielivaltainen piste väliltä $[t_{k-1},t_k]$. Seuraava esimerkki osoittaa, ettei tämäkään lähestymistapa toimi.

8.6 Esimerkki. Tarkastelemme kahta kandidaattia integraaliksi $\int_0^T W_t\mathrm{d}W_t$:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n W_{\frac{k-1}{n}T}\left(W_{\frac{k}{n}T}-W_{\frac{k-1}{n}T}\right),$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n W_{\frac{k}{n}T}\left(W_{\frac{k}{n}T}-W_{\frac{k-1}{n}T}\right).$$

Laskutoimitusten, jotka jätämme harjoitustehtäviksi, jälkeen näemme, että

$$\mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^n W_{\frac{k-1}{n}T}\left(W_{\frac{k}{n}T}-W_{\frac{k-1}{n}T}\right)\right] = 0,$$

mutta

$$\mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^{n} W_{\frac{k}{n}T}\left(W_{\frac{k}{n}T} - W_{\frac{k-1}{n}T}\right)\right] \quad = \quad T.$$

Siten nämä kandidaatit eivät voi antaa samaa tulosta. ◇

Edellisen esimerkin perusteella on selvää, että meidän tulee valita jokin tietty piste $t_k^* \in [t_{k-1}, t_k]$ integraalia approksimoivassa summassa. Differenssiyhtälöstä (7.1) näemme, että rahoitusteorian kannalta oikea valinta on $t_k^* = t_{k-1}$. Tämäkään valinta ei vielä riitä takaamaan integraalin olemassaoloa riittävän yleisesti. Jos vielä oletamme, että approksimoivissa summissa välin $[s, t]$ ositus on *dyadinen* eli

$$\Pi^n \quad = \quad \left\{ t_k = \frac{k}{2^n}(t-s) + s \,:\, k = 0, \ldots, 2^n \right\},$$

niin lähestymistapamme toimii riittävän hyvin.

8.7 Määritelmä. Prosessin η *poluittainen stokastinen integraali* prosessin Y suhteen on melkein varma raja

$$\int_0^T \eta_t \,\mathrm{d}Y_t \quad := \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{t_k \in \Pi^n} \eta_{t_{k-1}} \Delta Y_{t_k},$$

missä $\Delta Y_{t_k} := Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}$ ja Π^n on välin $[0, T]$ dyadinen jako. Integraali yli välin $[s, t] \subset [0, T]$ on

$$\int_s^t \eta_u \,\mathrm{d}Y_u \quad := \quad \int_0^T \eta_u \mathbf{1}_{(s,t]}(u) \,\mathrm{d}Y_u.$$

Poluittainen stokastinen integraali toteuttaa monet tavallisen Riemann–Stieltjes-integraalin ominaisuudet. Se on esimerkiksi bilineaarinen integraattorin ja integrandin suhteen eli

$$\begin{aligned}
\int_0^T \eta_t \,\mathrm{d}(Y_t + X_t) \quad &= \quad \int_0^T \eta_t \,\mathrm{d}Y_t + \int_0^T \eta_t \,\mathrm{d}X_t, \\
\int_0^T (\eta_t + \theta_t) \,\mathrm{d}Y_t \quad &= \quad \int_0^T \eta_t \,\mathrm{d}Y_t + \int_0^T \theta_t \,\mathrm{d}Y_t.
\end{aligned}$$

Samoin se on lineaarinen integroimisalueen suhteen eli

$$\int_0^T \eta_s \,\mathrm{d}Y_s \quad = \quad \int_0^t \eta_s \,\mathrm{d}Y_s + \int_t^T \eta_s \,\mathrm{d}Y_s.$$

Lisäksi, jos Y on jatkuva, niin integraaliprosessi $t \mapsto \int_0^t \eta_s \mathrm{d}Y_s$ on myös jatkuva. Merkittävin ero tavallisen ja stokastisen integraalin välillä lienee se, että tavallinen muuttujanvaihtokaava

$$F(f(T)) - F(f(0)) \quad = \quad \int_0^T F'(f(t))\,\mathrm{d}f(t)$$

ei yleisesti päde stokastiselle integraalille. Sen sijaan, jos integraattori on Brownin liike, niin pätee Itôn kaava, jonka esitämme myöhemmin.

8.8 Huomautus. Yleensä stokastinen eli Itô-integraali määritellään Brownin liikkeen W suhteen seuraavasti: olkoon η yksinkertainen ja ennustettava prosessi eli muotoa

$$\eta_t \quad = \quad \sum_{k=1}^n \eta_{t_{k-1}} \mathbf{1}_{(t_{k-1},t_k]}(t),$$

missä $\eta_{t_{k-1}} \in \mathcal{F}^W_{t_k-1}$ ja $\mathbf{Var}[\eta_{t_{k-1}}] < \infty$. Tällöin on luonnollista määritellä

$$\int_0^T \eta_t \,\mathrm{d}W_t \quad := \quad \sum_{k=1} \eta_{t_{k-1}} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right).$$

Nyt pätee niin sanottu *Itô-isometria*

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T \eta_t \,\mathrm{d}W_t\right)^2\right] \quad = \quad \mathbf{E}\left[\int_0^T \eta_t^2 \,\mathrm{d}t\right].$$

Siten voimme laajentaa integraalin jatkuvasti tämän isometrian avulla prosesseille, jotka ovat yksikertaisten ja ennustettavien prosessien rajaprosesseja avaruudessa $L^2(\mathbf{P} \times \mathrm{d}t)$. Tämä lähestymistapa on kuitenkin ongelmallinen stokastisen integraalin poluittaisen tulkinnan kannalta. Siksi emme lähteneet tälle tielle. $\diamond$

Itô-isometria pätee myös poluittaiselle stokastiselle integraaleille Brownin liikkeen suhteen. Lisäksi stokastiset integraalit ovat tyypillisesti martingaaleja, jos integraattorina on martingaali.

8.9 Apulause. *Olkoon η sellainen $\mathbb{F}^W$-sopiva prosessi, että*

$$\mathbf{E}\left[\int_0^T \eta_t^2 \,\mathrm{d}t\right] \quad < \quad \infty. \tag{8.10}$$

Tällöin integraaliprosessi $t \mapsto \int_0^t \eta_s \,\mathrm{d}W_s$, jos se on olemassa, on neliöintegroituva $(\mathbf{P}, \mathbb{F}^W)$-martingaali. Lisäksi pätee Itô-isometria

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^T \eta_t \,\mathrm{d}W_t\right)^2\right] \quad = \quad \mathbf{E}\left[\int_0^T \eta_t^2 \,\mathrm{d}t\right].$$

Todistus. Tarkastelemme aluksi integraalia approksimoivaa summaa

$$Y_t^n \quad := \quad \sum_{t_k \in \Pi^n, t_k \leq t} \eta_{t_{k-1}} \Delta W_{t_k},$$

missä merkitsimme $\Delta W_{t_k} := W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$. Olkoon $s \leq t$. Tällöin

$$Y_t^n - Y_s^n \quad = \quad \sum_{t_k \in \Pi^n(s,t)} \eta_{t_{k-1}} \Delta W_{t_k},$$

missä $\Pi^n(s,t)$ on Π^n:n rajoittuma välille $[s,t]$. Nyt prosessin W riippumattomista lisäyksistä seuraa, että $\mathbf{E}_s[Y_t^n - Y_s^n] = 0$ eli Y^n on martingaali.

Osoitamme sitten Itô-isometrian prosessille Y^n. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[(Y_T^n)^2\right] &= \mathbf{E}\left[\left(\sum_{t_k \in \Pi^n} \eta_{t_{k-1}} \Delta W_{t_k}\right)^2\right] \\
&= \sum_{t_k, s_k \in \Pi^n} \mathbf{E}\left[\eta_{t_{k-1}} \Delta W_{t_k} \eta_{s_{k-1}} \Delta W_{s_k}\right] \\
&= \sum_{t_k \in \Pi^n} \mathbf{E}\left[\eta_{t_{k-1}}^2 \Delta W_{t_k}^2\right] + 2 \sum_{s_k < t_k \in \Pi^n} \mathbf{E}\left[\eta_{t_{k-1}} \eta_{s_{k-1}} \Delta W_{t_k} \Delta W_{s_k}\right].
\end{aligned}$$

Koska, kun $s_k < t_k$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\eta_{t_{k-1}} \eta_{s_{k-1}} \Delta W_{t_k} \Delta W_{s_k}\right] &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}_{t_{k-1}}\left[\eta_{t_{k-1}} \eta_{s_{k-1}} \Delta W_{t_k} \Delta W_{s_k}\right]\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\eta_{t_{k-1}} \eta_{s_{k-1}} \Delta W_{s_k} \mathbf{E}_{t_{k-1}}\left[\Delta W_{t_k}\right]\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\eta_{t_{k-1}} \eta_{s_{k-1}} \Delta W_{s_k} \mathbf{E}\left[\Delta W_{t_k}\right]\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\eta_{t_{k-1}}^2 \Delta W_{t_k}^2\right] &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}_{t_{k-1}}\left[\eta_{t_{k-1}}^2 \Delta W_{t_k}^2\right]\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\eta_{t_{k-1}}^2 \mathbf{E}_{t_{k-1}}\left[\Delta W_{t_k}^2\right]\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\eta_{t_{k-1}}^2 \Delta t_k\right],
\end{aligned}$$

niin näemme että Itô-isometria pätee approksimoiville prosesseille Y^n.

Lopuksi huomaamme, että Itô-isometriasta ja ehdosta (8.10) seuraa jonon $(Y^n)_{n=1}^\infty$ suppeneminen avaruudessa $L^2(\mathbf{P} \times \mathrm{d}t)$. Tästä seuraa, että voimme vaihtaa rajankäynnin ja odotusarvon järjestystä. Siten Y^∞ on neliöintegroituva martingaali ja sille pätee Itô-isometria. $\square$

Seuraava aputulos on poluittaisen stokastisen integroinnin keskeisin huomio. Se takaa tiettyjen epätriviaalien stokastisten integraalien olemassaolon.

8.11 Apulause. *Jos* Π^n *on välin* $[s,t]$ *dyadinen jako, niin melkein varmasti*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_k\in\Pi^n} (\Delta W_{t_k})^2 \quad = \quad t-s,$$

missä $\Delta W_{t_k} := W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$.

Todistus. Olkoon

$$Y^n \quad := \quad \sum_{t_k\in\Pi^n} (\Delta W_{t_k})^2 \quad = \quad \sum_{k=1}^{2^n} \left(W_{\frac{k}{2^n}(t-s)+s} - W_{\frac{k-1}{2^n}(t-s)+s} \right)^2.$$

Brownin liikkeen itsesimilaarisuudesta seuraa, että

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}\left[Y^n\right] &= \sum_{k=1}^{2^n} \mathbf{Var}\left[(\Delta W_{t_k})^2\right] \\
&= 2^n \mathbf{Var}\left[W_{\Delta t_k}^2\right] \\
&= 2^n \left(\frac{t-s}{2^n}\right)^2 \mathbf{Var}\left[W_1^2\right] \\
&=: (t-s)^2\, 2^{-n}\, c.
\end{aligned}$$

Olkoon sitten $\varepsilon > 0$ ja $A_n := \{|Y^n - (t-s)| > \varepsilon\}$. Koska $\mathbf{E}\left[Y^n\right] \;=\; t-s$, niin Tšebyševin epäyhtälön nojalla

$$\mathbf{P}(A_n) \quad \le \quad \frac{\mathbf{Var}\left[Y^n\right]}{\varepsilon^2} \quad = \quad \frac{(t-s)^2\, c}{\varepsilon^2}\, 2^{-n}.$$

Näemme, että $\sum \mathbf{P}(A_n) < \infty$. Siten, Borel–Cantelli-lemman nojalla,

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \quad = \quad 0.$$

Mutta tämä on juuri se mitä meidän piti todistaa. $\square$

8.12 Apulause. *Olkoon* $\eta : [s,t]\times\Omega \to \mathbb{R}$ *jatkuva prosessi ja* Π^n *välin* $[s,t]$ *dyadinen jako. Tällöin, melkein varmasti,*

$$\int_s^t \eta_u \,\mathrm{d}u \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{t_k\in\Pi^n} \eta_{t_{k-1}} (\Delta W_{t_k})^2.$$

Todistus. Jos prosessin η polku $\eta(\omega)$ on yksinkertainen eli muotoa

$$\eta_u(\omega) \quad = \quad \sum_{i=1}^{m(\omega)} \eta_{u_{i-1}(\omega)}(\omega)\mathbf{1}_{\left(u_i(\omega),u_{i+1}(\omega)\right]}(u),$$

niin väite seuraa apulauseesta 8.11. Yleinen väite seuraa approksimoimalla jatkuvaa polkua $\eta(\omega)$ yksinkertaisilla poluilla avaruudessa $L^1(\mathrm{d}t)$. □

Esitämme nyt stokastisen muuttujanvaihtokaavan eli *Itôn kaavan*. Koska finanssikirjallisuudessa tätä kaavaa kutsutaan usein "Itôn lemmaksi", niin esitämme sen apulauseena.

8.13 Apulause. *Olkoon* $f = f(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. *Tällöin*

$$\mathrm{d}f(t,W_t) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t,W_t)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}(t,W_t)\,\mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,W_t)\,\mathrm{d}t$$

eli integraalimuodossa

$$\begin{aligned} f(t,W_t) - f(s,W_s) \quad &= \quad \int_s^t \frac{\partial f}{\partial t}(u,W_u)\,\mathrm{d}u + \int_s^t \frac{\partial f}{\partial x}(u,W_u)\,\mathrm{d}W_u \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_s^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,W_u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Todistus. Todistus on sotkuisen oloinen, mutta aika suoraviivainen. Se perustuu Taylorin kehitelmään

$$\begin{aligned} \Delta f(t_k,x_k) \quad &= \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t_{k-1},x_{k-1})\Delta t_k + \frac{\partial f}{\partial x}(t_{k-1},x_{k-1})\Delta x_k \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{k-1},x_{k-1})(\Delta x_k)^2 \\ &\quad + r_t(\Delta t_k; x_k, x_{k-1})\Delta t_k + r_x(\Delta x_k; t_k, t_{k-1})(\Delta x_k)^2, \end{aligned}$$

missä $\Delta f(t_k,x_k) := f(t_k,x_k) - f(t_{k-1},x_{k-1})$ ja jäännöstermeille pätee

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t_k \to 0} \sup_{x_k, x_{k-1}} r_t(\Delta t_k; x_k, x_{k-1}) \quad &= \quad 0, \\ \lim_{\Delta x_k \to 0} \sup_{t_k, t_{k-1}} r_x(\Delta x_k; t_k, t_{k-1}) \quad &= \quad 0, \end{aligned}$$

kun supremum otetaan kompaktin joukon yli.

Olkoon Π^n välin $[s,t]$ dyadinen jako. Kirjoitamme satunnaisen lisäyksen Δf teleskooppisarjana:

$$f(t,W_t) - f(s,W_s) \quad = \quad \sum_{t_k \in \Pi^n} \Delta f(t_k, W_{t_k}).$$

Käyttämällä Taylorin kehitelmää jokaiseen teleskooppisarjan termiin saamme yhtälön

$$
\begin{aligned}
f(t,W_t) - f(s,W_s) &= \sum_{t_k\in\Pi^n} \frac{\partial f}{\partial t}(t_{k-1},W_{t_{k-1}})\Delta t_k \\
&\quad + \sum_{t_k\in\Pi^n} \frac{\partial f}{\partial x}(t_{k-1},W_{t_{k-1}})\Delta W_{t_k} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{t_k\in\Pi^n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{k-1},W_{t_{k-1}})\left(\Delta W_{t_k}\right)^2 \\
&\quad + \sum_{t_k\in\Pi^n} R_{t_k,t_{k-1}},
\end{aligned}
$$

missä

$$
R_{t_k,t_{k-1}} = r_t\left(\Delta t_k; W_{t_k}, W_{t_{k-1}}\right)\Delta t_k + r_x\left(\Delta W_{t_k}; t_k, t_{k-1}\right)(\Delta W_{t_k})^2.
$$

Nyt, tavallisen Riemann-integraalin määritelmän nojalla,

$$
\sum_{t_k\in\Pi^n} \frac{\partial f}{\partial t}(t_{k-1},W_{t_{k-1}})\Delta t_k \quad\to\quad \int_s^t \frac{\partial f}{\partial t}(u,W_u)\,\mathrm{d}u
$$

ja apulauseen 8.12 nojalla

$$
\sum_{t_k\in\Pi^n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{k-1},W_{t_{k-1}})\left(\Delta W_{t_k}\right)^2 \quad\to\quad \int_s^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,W_u)\,\mathrm{d}u.
$$

Enää siis pitää osoittaa, että jäännössarja $\sum R_{t_k,t_{k-1}}$ menee nollaan ja väite seuraa. Koska W on jatkuva, niin se on rajoitettu välillä $[s,t]$. Siten

$$
r_t^*(\Delta t_k) \quad:=\quad \sup_{W_{t_k},W_{t_{k-1}}} \left|r_t\left(\Delta t_k; W_{t_k}, W_{t_{k-1}}\right)\right| \quad\to\quad 0,
$$

kun $n\to\infty$. Koska W on tasaisesti jatkuva välillä $[s,t]$, niin

$$
w^n \quad:=\quad \sup_{t_k\in\Pi^n} |\Delta W_{t_k}| \quad\to\quad 0,
$$

kun $n\to\infty$. Siten

$$
r_x^*(w^n) \quad:=\quad \sup_{\Delta W_{t_k}} \sup_{t_k,t_{k-1}} \left|r_x\left(\Delta W_{t_k}; t_k, t_{k-1}\right)\right| \quad\to\quad 0,
$$

kun $n \to \infty$. Saamme siis

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{t_k \in \Pi^n} R_{t_k, t_{k-1}} \right| &\leq \sum_{t_k \in \Pi^n} \left| r_t\left(\Delta t_k; W_{t_k}, W_{t_{k-1}}\right)\right| \Delta t_k \\
&\quad + \sum_{t_k \in \Pi^n} \left| r_x\left(\Delta W_{t_k}; t_k, t_{k-1}\right)\right| (\Delta W_{t_k})^2 \\
&\leq \sum_{t_k \in \Pi^n} r_t^*(\Delta t_k)\Delta t_k + \sum_{t_k \in \Pi^n} r_x^*(w^n)\,(\Delta W_{t_k})^2 \\
&= r_t^*\left(2^{-n}(t-s)\right) \sum_{t_k \in \Pi^n} \Delta t_k + r_x^*\left(w^n\right) \sum_{t_k \in \Pi^n} (\Delta W_{t_k})^2 \\
&= r_t^*\left(2^{-n}(t-s)\right)(t-s) + r_x^*(w^n) \sum_{t_k \in \Pi^n} \left(\Delta W_{t_k}^n\right)^2 .
\end{aligned}$$

Jäännössumman häviäminen rajalla seuraa nyt apulauseesta 8.11. □

8.14 Esimerkki. (i) Tarkastelemme prosessia e^W. Olkoon $f(x) = e^x$. Tällöin $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = f$ ja Itôn kaavan nojalla

$$\mathrm{d}e^{W_t} = e^{W_t}\,\mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}e^{W_t}\,\mathrm{d}t.$$

Huomaamme, että eksponentti e^W on stokastisen differentiaaliyhtälön

$$\frac{\mathrm{d}Z_t}{Z_t} = \mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t, \qquad Z_0 = 1,$$

ratkaisu.

(ii) Renormalisoimalla kohdan (i) oikein huomaamme, että stokastisen differentiaaliyhtälön

$$\frac{\mathrm{d}Z_t}{Z_t} = \sigma\,\mathrm{d}W_t, \qquad Z_0 = 1,$$

ratkaisu on

$$Z_t = e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t}.$$

Ratkaisua kutsutaan *stokastiseksi eksponentiksi* $\mathcal{E}(\sigma W)$.

(iii) Laskemme, tai pikemminkin sievennämme, integraalin

$$\int_s^t u^q W_u^p\,\mathrm{d}W_u.$$

Käytämme Itôn kaavaa, joten etsimme sellaisen $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, että

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = t^q x^p.$$

Integroimalla x:n suhteen saamme

$$f(t,x) \;=\; \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)\,\mathrm{d}y \;=\; \frac{1}{p+1}t^q x^{p+1}.$$

Tällöin

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \;=\; \frac{q}{p+1}t^{q-1}x^{p+1} \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}f(t,x) \;=\; pt^q x^{p-1}.$$

Siten, Itôn kaavan nojalla,

$$\begin{aligned}\int_s^t u^q W_u^p\,\mathrm{d}W_u \;&=\; \frac{1}{p+1}\left(t^q W_t^{p+1} - s^q W_s^{p+1}\right)\\ &\quad -\frac{q}{p+1}\int_s^t u^{q-1}W_u^{p+1}\,\mathrm{d}u\\ &\quad -\frac{p}{2}\int_s^t u^q W_u^{p-1}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Yleisesti vastaus ei enää sievene tästä. Huomattavaa kuitenkin on, että sievennetyssä muodossa ei esiinny stokastista integraalia.
(iv) Jos valitsemme kohdassa (iii) $q=0$ ja $p=1$, niin saamme kaavan

$$W_t^2 - W_s^2 \;=\; 2\int_s^t W_u\,\mathrm{d}W_u + (t-s)$$

eli differentiaalimuodossa

$$\mathrm{d}W_t^2 \;=\; 2W_t\,\mathrm{d}W_t + \mathrm{d}t.$$

Tämä kaava on osittaisintegrointikaavan itiö. ◇

Itôn kaava voidaan ketjuttaa ja vektoroida.

8.15 Apulause. *Olkoot W^k, $k=1,\ldots,n$ riippumattomia Brownin liikkeitä ja prosessit X^i, $i=1,\ldots,m$ annettu differentiaalikaavoilla*

$$\mathrm{d}X_t^i \;=\; a^i(t,W_t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^n b^{ik}(t,W_t^k)\,\mathrm{d}W_t^k,$$

missä $a^i \in C^1(\mathbb{R})$ ja $b^{ij} \in C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. Olkoon $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^{1+m})$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(t,X_t) \;&=\; \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X_t)\,\mathrm{d}X_t^i\\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t,X_t)\sum_{k=1}^n b^{ik}(t,W_t^k)b^{jk}(t,W_t^k)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ketjutettu vektoroitu Itôn kaava voidaan todistaa kuten ketjuttamaton Itôn kaava eli apulause 8.13, todistus on vain sotkuisempi. Itse asiassa Itôn kaava voidaan ymmärtää heuristisesti toisen asteen Taylorin differentiaalikaavana

$$\mathrm{d}f \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}W + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(\mathrm{d}W)^2,$$

missä $(\mathrm{d}W)^2 = \mathrm{d}t$. Vastaavasti ketjutettu muoto voidaan ymmärtää samalla tavalla heuristisesti

$$\mathrm{d}f \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}X + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(\mathrm{d}X)^2,$$

missä differentiaalin neliö $(\mathrm{d}X)^2$ lasketaan formaalisti käyttäen kaavoja $(\mathrm{d}t)^2 = 0$, $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}W = 0$ ja $(\mathrm{d}W)^2 = \mathrm{d}t$ ja tulot ymmärretään tarvittaessa matriisituloina.

Seuraava *osittaisintegrointikaava* on apulauseen 4.26 jatkuva muoto.

8.16 Apulause. *Olkoon prosessit X ja Y annettu kaavoilla*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t &= a_X(t,W_t)\,\mathrm{d}t + b_X(t,W_t)\,\mathrm{d}W_t,\\ \mathrm{d}Y_t &= a_Y(t,W_t)\,\mathrm{d}t + b_Y(t,W_t)\,\mathrm{d}W_t,\end{aligned}$$

missä a_X, a_Y, b_X ja b_Y toteuttavat väitteen 8.15 ehdot. Tällöin

$$\mathrm{d}\,(X_tY_t) \quad = \quad X_t\,\mathrm{d}Y_t + Y_t\,\mathrm{d}X_t + b_X(t,W_t)\,b_Y(t,W_t)\,\mathrm{d}t.$$

Todistus. Tulos seuraa väiteestä 8.15. Jätämme yksityiskohdat harjoitustehtäväksi. □

Ennustettava esitys ja mitanvaihto

Brownin liikeeseen perustuvan jatkuva-aikaisen hinnoittelumallin täydellisyys seuraa Brownin liikkeen generoiman historian ennustettavasta esityksestä eli *Clark–Ocone-esityslauseesta*. Esitämme sen apulauseena.

8.17 Apulause. *Olkoon W Brownin liike ja F neliöintegroituva $\mathcal{F}_T^W$-mitallinen satunnaismuuttuja. Tällöin se voidaan esittää muodossa*

$$F \quad = \quad \mathbf{E}\,[F] + \int_0^T m_s\,\mathrm{d}W_s,$$

missä m on yksikäsitteinen neliöintegroituva $\mathbb{F}^W$-sopiva prosessi.

Emme todista apulausetta 8.17. Kiinnostunut lukija voi etsiä todistuksen esimerkiksi Malliavin-laskennan luennoista

`mathstat.helsinki.fi/~tsottine/malliavin-laskenta`

ja huomata, että meillä on pienoinen ongelma poluittaisen tulkinnan kanssa. Luennoija on kuitenkin kohtalaisen vakuuttunut, että ongelma voidaan ratkaista.

Itse asiassa Malliavin-laskennan avulla voidaan, ainakin periaatteessa, laskea prosessi m satunnaismuuttujasta F. Nimittäin $m_t = \mathbf{E}_t[D_t F]$, missä prosessi DF on satunnaismuuttujan F *Malliavin-derivaatta*.

Clark–Ocone-esityslause yleistyy neliöintegroituville martingaaleille.

8.18 Apulause. *Olkoon W Brownin liike ja M neliöintegroituva $\mathbb{F}^W$-martingaali. Tällöin M on jatkuva ja sillä on esitys*

$$M_t = M_0 + \int_0^t m_s \, \mathrm{d}W_s,$$

missä m on yksikäsitteinen neliöintegroituva $\mathbb{F}$-sopiva prosessi.

Todistus. Koska M_T on neliöintegroituva ja $\mathcal{F}_T^W$-mitallinen, niin apulauseen 8.17 nojalla on olemassa sellainen $\mathbb{F}^W$-sopiva prosessi m, että

$$M_T = \mathbf{E}[M_T] + \int_0^T m_s \, \mathrm{d}W_s.$$

Koska M on martingaali, niin $\mathbf{E}[M_T] = M_0$ ja $M_t = \mathbf{E}_t[M_T]$. Lisäksi, koska stokastinen integraali on martingaali, niin

$$\begin{aligned} M_t &= \mathbf{E}_t\left[\mathbf{E}[M_T] + \int_0^T m_s \, \mathrm{d}W_s\right] \\ &= M_0 + \int_0^t m_s \, \mathrm{d}W_s. \end{aligned}$$

Lopuksi huomaamme, että prosessin M jatkuvuus seuraa integraaliesityksestä, koska stokastiset integraalit ovat jatkuvia. $\square$

Brownin liikkeeseen perustuvan hinnoittelumallin täydellisyys seuraa siis Clark–Ocone-esityslauseesta. Mallin arbitraasivapaus puolestaan seuraa *Girsanovin lauseesta*, joka kertoo meille, miten Brownin liikkeen vietteestä päästään eroon.

Sanomme, että W on $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$-Brownin liike, jos $W_t - W_s$ on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_s$, kun $s \leq t$ ja todennäköisyyden $\mathbf{P}$ suhteen $W_t - W_s \sim \mathrm{N}(0, t-s)$.

8.19 Apulause. *Olkoon W $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$-Brownin liike, $\mu \in \mathbb{R}$ ja Z^μ eksponentiaalinen martingaali*

$$(t, \omega) \quad \mapsto \quad Z_t^\mu(\omega) := \exp\left\{-\mu W_t(\omega) - \frac{\mu^2}{2}t\right\}.$$

Olkoon

$$\mathbf{Q}_t^\mu(\mathrm{d}\omega) \quad := \quad Z_t(\omega)\mathbf{P}_t(\mathrm{d}\omega),$$

missä $\mathbf{Q}_t^\mu$ ja $\mathbf{P}_t$ ovat mittojen $\mathbf{Q}^\mu$ ja $\mathbf{P}$ rajoittumat σ-algebraan $\mathcal{F}_t$. Tällöin $\mathbf{Q}^\mu \sim \mathbf{P}$ ja prosessi

$$(t, \omega) \quad \mapsto \quad W_t^\mu(\omega) := W_t(\omega) + \mu t$$

on $(\mathbf{Q}, \mathbb{F})$-Brownin liike.

Girsanovin apulauseen 8.19 todistus perustuu seuraavaan apulauseeseen, jonka todistamisen jätämme harjoitustehtäväksi.

8.20 Apulause. *Olkoon Xsatunnaismuuttuja ja $\mathcal{G}$ jokin σ-algebra, jolle*

$$\mathbf{E}\left[e^{iuX} \,|\, \mathcal{G}\right] \quad = \quad e^{-\frac{\sigma^2}{2}u^2}.$$

Tällöin X on $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$-jakautunut ja riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{G}$.

Girsanovin apulauseen 8.19 todistus. Huomaamme aluksi, että Z^μ on todellakin martingaali. Itse asiassa Z^μ on stokastinen eksponentti $\mathcal{E}(\mu W)$.

Väite $\mathbf{Q}^\mu \sim \mathbf{P}$ seuraa siitä, että $Z_T^\mu = \mathrm{d}\mathbf{Q}^\mu/\mathrm{d}\mathbf{P}$ on positiivinen. Pitää siis enää osoittaa, että W^μ on $(\mathbf{Q}^\mu, \mathbb{F})$-Brownin liike eli, että $W_t^\mu - W_s^\mu$ on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_s$ kaikilla $s \leq t$ ja että mitan $\mathbf{Q}^\mu$ suhteen $W_t^\mu - W_s^\mu \sim \mathrm{N}(0, t-s)$. Tämä taas seuraa apulauseesta 8.20, jos

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^\mu}\left[e^{iu(W_t^\mu - W_s^\mu)}\mathbf{1}_A\right] \quad = \quad \mathbf{Q}^\mu(A)e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}$$

kaikilla $s \leq t$ ja $A \in \mathcal{F}_s$. Suoralla laskulla saamme

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^\mu}\left[\mathbf{1}_A e^{iu(W_t^\mu - W_s^\mu)}\right] &= \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A e^{iu(W_t^\mu - W_s^\mu)} Z_t^\mu\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A e^{iu(W_t - W_s) + iu\mu(t-s) - \mu(W_t - W_s) - \frac{\mu^2}{2}(t-s)} Z_s^\mu\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A Z_s^\mu\right] \mathbf{E}\left[e^{(iu-\mu)(W_t - W_s)}\right] e^{iu\mu(t-s) - \frac{\mu^2}{2}(t-s)} \\
&= \mathbf{Q}^\mu(A)e^{\frac{(iu-\mu)^2}{2}(t-s) + iu\mu(t-s) - \frac{\mu^2}{2}(t-s)} \\
&= \mathbf{Q}^\mu(A)e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)},
\end{aligned}$$

mikä pitikin osoittaa. □

Harjoitustehtäviä lukuun 8

8.1. Olkoon W Brownin liike. Osoita, että sen kovarianssi on

$$K(s,t) \quad := \quad \mathbf{E}\left[\Big(W_s - \mathbf{E}[W_s]\Big)\Big(W_t - \mathbf{E}[W_t]\Big)\right] \quad = \quad \min\{s,t\}.$$

8.2. Täydennä apulauseen 8.4 todistus osoittamalla, että jos M neliöintegroituva gaussinen martingaali, niin (a) M:llä on riippumattomat lisäykset ja (b) kuvaus $t \mapsto \mathbf{Var}[M_t]$ on kasvava.

8.3. Olkoon x derivoituva (tai rajoitetusti heilahteleva) funktio ja w mikä tahansa funktio. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$\mathrm{d}y_t \quad = \quad \theta y_t \, \mathrm{d}x_t + \mathrm{d}w_t.$$

Ratkaisu tarkoittaa sellaista funktiota y, joka toteuttaa Riemann–Stieltjes-integraaliyhtälön

$$\int_0^t \mathrm{d}y_s \quad = \quad \int_0^t \theta y_s \, \mathrm{d}x_s + \int_0^t \mathrm{d}w_s.$$

eli

$$y_t \quad = \quad y_0 + \theta \int_0^t y_s \, \mathrm{d}x_s + w_t - w_0.$$

8.4. Osoita esimerkin 8.6 väitteet

$$\mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^n W_{\frac{k-1}{n}T}\left(W_{\frac{k}{n}T} - W_{\frac{k-1}{n}T}\right)\right] \quad = \quad 0,$$

$$\mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^n W_{\frac{k}{n}T}\left(W_{\frac{k}{n}T} - W_{\frac{k-1}{n}T}\right)\right] \quad = \quad T.$$

8.5. Todista *Borel–Cantelli-lemma*: olkoot A_1, A_2, ... sellaisia tapahtumia, että

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}(A_n) \quad < \quad \infty.$$

Tällöin

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \quad = \quad 0.$$

8.6. Olkoon W Brownin liike ja $\mathrm{sgn}(x) = -\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x) + \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$. Osoita, että prosessi

$$\int_0^\cdot \mathrm{sgn}(W_t) \, \mathrm{d}W_t$$

on myös Brownin liike.

8.7. Todista apulause 8.16.

8.8. Todista apulause 8.20.

8.9. Olkoot $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,T]}$ ja $\sigma = (\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ "riittävän siistejä" $\mathbb{F}^W$-sopivia prosesseja. Ratkaise stokastinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu_t \,\mathrm{d}t + \sigma_t \,\mathrm{d}W_t.$$

8.10. Etsi sellainen $\mathbb{F}^W$-sopiva prosessi $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$, että S/B on $(\mathbf{P}, \mathbb{F}^W)$-martingaali. Tässä S on edellisen tehtävän ratkaisu.

Luku 9

Black–Scholes-malli

Every science begins as philosophy and ends as art. — Will Durant

Wiener-avaruus

Black–Scholes-hinnoittelumallissa pankkitalletus on deterministinen ja osakekurssia "ajaa" Brownin liike.

Binomimalli rakennettiin satunnaiskulkuun liittyvän kolikkoavaruuden kautta. Brownin liike on eräänlainen jatkuva-aikainen satunnaiskulku ja sitä vastaava "jatkuva kolikkoavaruus" on Wiener-avaruus.

9.1 Määritelmä. Historiallinen todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ on *Wiener-avaruus*, jos

(i) $\Omega = C([0,T])$ eli $\omega \in \Omega$ on reaaliarvoinen jatkuva funktio väliltä $[0,T]$,

(ii) $\mathcal{F}_t$ on koordinaattikuvausten $s \mapsto \omega(s)$, $s \leq t$, virittämä σ-algebra,

(iii) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$,

(iv) $\mathbf{P}$ on sellainen todennäköisyysmitta, että kanoninen prosessi eli koordinaattikuvaus $(\omega, t) \mapsto \omega(t) =: W_t(\omega)$ on Brownin liike.

Määritelmän 9.1 ehdoista (ii) ja (iv) seuraa, että $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$. Erityisesti Wiener-avaruudessa kaikki satunnaisuus tulee Brownin liikkeestä. Toisin sanoen Wiener-avaruus on pienin historiallinen todennäköisyysavaruus, jossa Brownin liike voi "elää".

Black–Scholes-hinnoittelumalli saadaan liittämällä Wiener-avaruuteen pankkitili ja osakekurssi. Tarkastelemme vain yhden osakkeen klassista mallia, missä osake on *geometrinen Brownin liike* ja pankkitili on vakiokorkoinen.

9.2 Määritelmä. Yhden osakkeen *Black–Scholes-hinnoittelumalli* on kokoelma $(B, S, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, missä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ on Wiener-avaruus ja B ja S ovat (stokastisten) differentiaaliyhtälöiden

$$\frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} = r\,\mathrm{d}t, \qquad B_0 = 1, \tag{9.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t, \qquad S_0 = S_0, \tag{9.4}$$

ratkaisut. Mallin parametrit ovat r, μ ja σ^2.

9.5 Huomautus. Korkotaso r on tiedossa. Sitä ei tarvitse estimoida. Parametrit μ ja σ^2 taas voidaan estimoida datasta $S_{t_1}, \ldots, S_{t_{N+1}}$ seuraavasti. Tuotto-odotuksen μ estimaatti $\hat{\mu}$ saadaan havaittujen tuottojen $R_{t_i} = (S_{t_i} - S_{t_{i-1}})/S_{t_{i-1}}$ otoskeskiarvosta

$$\hat{\mu} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} R_{t_i}.$$

Volatiliteetin neliön σ^2 estimaattori $\hat{\sigma}^2$ saadaan tuottojen otosvarianssista

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} \left(\hat{\mu} - R_{t_i}\right)^2.$$

Jos $\Delta t_i = \Delta t$ eli vakio, niin saamme seuraavat kaavat estimaattoriemme variansseille:

$$\mathbf{Var}\left[\hat{\mu}\right] = \frac{\sigma^2 \Delta t}{N}, \tag{9.6}$$

$$\mathbf{Var}\left[\hat{\sigma}^2\right] = \frac{2\sigma^2(\Delta t)^2}{N-1}. \tag{9.7}$$

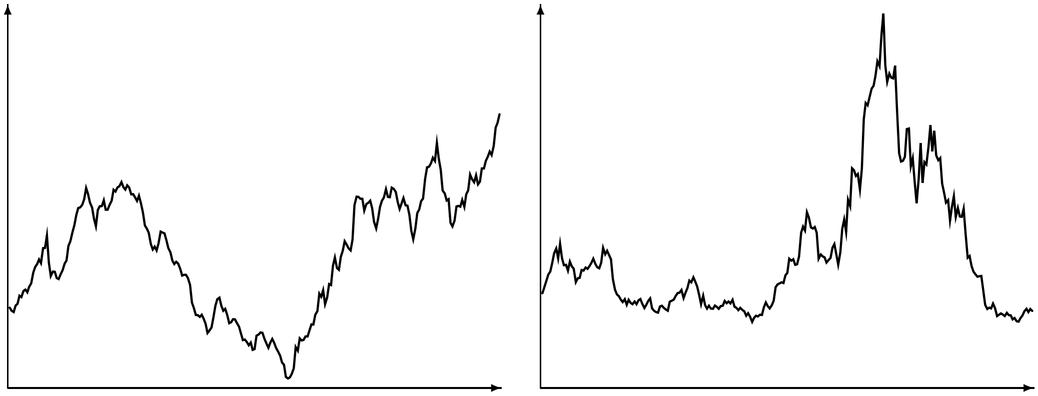
Jätämme kaavojen (9.6) ja (9.7) johtamisen harjoitustehtäväksi. $\diamond$

Klassisesta differentiaaliyhtälöiden teoriasta tiedämme, että tavallisen differentiaaliyhtälön (9.3) yksikäsitteinen ratkaisu on tavallinen eksponentti

$$B_t = e^{rt}.$$

Vastaavasti Itôn kaavan avulla näemme, että stokastisen differentiaaliyhtälön (9.4) yksikäsitteinen ratkaisu on painotettu stokastinen eksponentti

$$S_t = S_0 e^{\mu t}\mathcal{E}(\sigma W)_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t}.$$



HEX-indeksi 1.2.1987 – 30.12.1996 (vasemmalla) ja geometrisella Brownin liikkeellä simuloitu indeksi (oikealla).

Määritelmässä 9.2 on pienoinen kauneusvirhe. Historiamme $\mathbb{F}$ on nimittäin Brownin liikkeen W generoima eli $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$. Luonnollisempaa olisi tietysti, että historia olisi osakekurssin S generoima eli $\mathbb{F} = \mathbb{F}^S$. Toisaalta, koska S on rakennettu Brownin liikkeestä W, niin $\mathbb{F}^S \subset \mathbb{F}^W$. Lisäksi voimme ratkaista yhtälön

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$$

Brownin liikkeen W suhteen. Nimittäin

$$W_t = \frac{1}{\sigma} \log \frac{S_t}{S_0} + \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\mu}{\sigma} \right) t.$$

Näemme, että itse asiassa $\mathbb{F}^S = \mathbb{F}^W$.

Arbitraasivapaus ja täydellisyys

Diskreetissä ajassa vaadittiin, että sijoitusstrategia π oli ennustettava eli π_t on $\mathcal{F}_{t-1}$-mitallinen kaikilla ajan hetkillä t. Jatkuvassa ajassa ei ole edellistä ajan hetkeä "$t-1$", joten ennustettavuus on hieman vaikeampi käsite. Seuraava tulkinta riittää tarkoituksiimme.

9.8 Määritelmä. Prosessi $\pi = (\pi_t)_{t\in[0,1]}$ Wiener-avaruudelta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ on *ennustettava*, jos sen polut ovat vasemmalta jatkuvia.

Diskreetissä ajassa strategia $\pi = (\beta, \gamma)$ oli omavarainen, jos sen varallisuus $V^\pi = \beta B + \gamma S$ toteutti differenssiyhtälön

$$\Delta V_t^\pi = \beta_t \Delta B_t + \gamma_t \Delta S_t.$$

Jatkuvassa ajassa tätä vastaa tietysti differentiaaliyhtälö, tai oikeammin integraaliyhtälö.

9.9 Määritelmä. Ennustettava strategia $\pi = (\beta, \gamma)$ on *omavarainen*, jos sen varallisuus $V_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\mathrm{d}V_t^\pi \quad = \quad \beta_t \,\mathrm{d}B_t + \gamma_t \,\mathrm{d}S_t.$$

Määritelmän 9.9 differentiaaliyhtälö tulee ymmärtää integraaliyhtälönä

$$\begin{aligned} V_t^\pi &= V_0^\pi + \int_0^t \beta_s \,\mathrm{d}B_s + \int_0^t \gamma_s \,\mathrm{d}S_s \\ &= V_0^\pi + \int_0^t \beta_s B_s \,\mathrm{d}s + \int_0^t \gamma_s S_s \left(\mu \,\mathrm{d}s + \sigma \,\mathrm{d}W_s\right) \\ &= V_0^\pi + \int_0^t \beta_s e^{rs} \,\mathrm{d}s + \int_0^t \gamma_s S_s \mu \,\mathrm{d}s + \int_0^t \gamma_s S_s \sigma \,\mathrm{d}W_s. \end{aligned}$$

Tässä siis käytimme formaalia sijoitusta $\mathrm{d}S_s = S_s\mu \mathrm{d}s + S_s\sigma \mathrm{d}W_s$ eli palautimme integraalin osakeprosessin S suhteen integraaliksi Brownin liikkeen W suhteen. Toisin sanoen otimme määritelmäksi

$$\int_0^T \eta_t \,\mathrm{d}S_t \quad := \quad \int_0^T \eta_t S_s \mu \,\mathrm{d}t + \int_0^T \eta_t S_t \sigma \,\mathrm{d}W_t.$$

Tämä määritelmä on sopusoinnussa suoran määritelmän 8.7 kanssa. Lisäksi, koska valitsimme poluittaisessa stokastisessa integraalissa välin alkupisteen, on jatkuva-aikainen differentiaaliyhtälöehto luonnollinen diskreettiaikaisen differenssiyhtälöehdon jatkuva analogia.

9.10 Apulause. *Strategia $\pi = (\beta, \gamma)$ on omavarainen jos ja vain jos diskontatuille prosesseille $\bar{V}^\pi = V^\pi / B$ ja $\bar{S} = S/B$ pätee*

$$\mathrm{d}\bar{V}_t^\pi \quad = \quad \gamma_t \,\mathrm{d}\bar{S}_t.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Osakeprosessin S suhteen Itôn kaava saa seuraavan muodon.

9.11 Väite. *Olkoon $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. Tällöin*

$$\mathrm{d}f(t, S_t) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t)\,\mathrm{d}S_t + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, S_t)\,\mathrm{d}t.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

9.12 Huomautus. Jos osakeprosessi S on sileä, niin tällöin pätee tietenkin klassinen muuttujanvaihtokaava

$$\mathrm{d}f(t,S_t) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t,S_t)\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)\,\mathrm{d}S_t,$$

missä $\mathrm{d}S_t = \frac{\mathrm{d}S_t}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$. Tällainen malli ei voi vastata kuitenkaan hyvin todellisuutta, sillä siinä on helppo tehdä arbitraasia. Eräs tapa on ostaa osakkeita, kun $\frac{\mathrm{d}S_t}{\mathrm{d}t} > 0$ ja myydä, kun $\frac{\mathrm{d}S_t}{\mathrm{d}t} < 0$. Jätämme arbitraasistrategian yksityiskohtaisen konstruoimisen harjoitustehtäväksi. ◇

Diskreetissä ajassa hinnoittelumallin arbitraasivapaus seurasi ekvivalentin martingaalimitan olemassaolosta. Jatkuvassa ajassa tilanne on samankaltainen. Joudumme kuitenkin olettamaan strategialta integroituvuusehtoja. Seuraava ehto soveltuu tarkoituksiimme.

9.13 Määritelmä. Omavarainen ennustettava strategia $\pi = (\beta,\gamma)$ on *hyväksyttävä* (*admissible*), jos

(i) $\int_0^T |\beta_t|\,\mathrm{d}t < \infty$,

(ii) $\mathbf{E}\left[\int_0^T \gamma_t^2 S_t^2\,\mathrm{d}t\right] < \infty$.

9.14 Huomautus. Kaikki rajoitetut ennustettavat strategiat ovat hyväksyttäviä. Jätämme perustelun harjoitustehtäväksi. ◇

Määritelmän 9.13 ehto (i) on varsin luonnollinen. Nimittäin muuten omavaraisuusehdossa esiintyvä integraali $\int_0^t \beta_s\,\mathrm{d}B_s$ olisi varsin huonosti määritelty. Ehto (ii) on kohtalaisen rajoittavia. Itse asiassa tulisimme toimeen vähemmälläkin. Emme halua kuitenkaan mennä teknisiin yksityiskohtiin. Keskeistä ehdossa (ii) on se, että nyt prosessi

$$\int_0^{\cdot} \gamma_t S_t \sigma\,\mathrm{d}W_t$$

on martingaali. Tämä ominaisuus takaa arbitraasivapauden.

9.15 Lause. *Hyväksyttävillä omavaraisilla ennustettavilla strategioilla ei voi tehdä arbitraasia Black–Scholes-hinnoittelumallissa.*

Perustelemme lauseen 9.15 hieman myöhemmin. Sitä ennen käsittelemme hyväksyttävyyden roolia.

Seuraava esimerkki näyttää, että pelkkä omavaraisuus ei riitä arbitraasivapauteen, vaikkakin myöhemmin näemme, että Black–Scholes-hinnoittelumallilla on aina ekvivalentti martingaalimitta.

9.16 Esimerkki. Tarkastelemme Black–Scholes-mallia parametreilla $r = \mu = 0$ ja $\sigma = 1$. Tällöin siis korko on diskontattu pois ja ottamalla osakkeen rahayksiköksi voimme valita

$$S_t \quad = \quad e^{W_t - \frac{1}{2}t}.$$

Näemme, että osakekurssi S on stokastisena eksponenttina valmiiksi martingaali mitan $\mathbf{P}$ suhteen. Etsimme nyt sellaisen arbitraasistrategian $\pi = (\beta, \gamma)$, että

$$V_T^\pi \quad = \quad 0 + \int_0^T \gamma_t \,\mathrm{d}S_t \quad = \quad a \quad > \quad 0.$$

Teemme tämän rakentamalla eräänlaisen tuplausstrategian äärelliselle välille. Venytämme välin $[0, T]$ koko positiiviselle reaaliakselille määrittelemällä apuprosessin

$$J_t \quad := \quad \int_0^t \frac{\mathrm{d}W_s}{\sqrt{T - s}}.$$

Jos $t < T$, niin Itô-isometrian nojalla

$$\mathbf{E}\left[J_t^2\right] \quad = \quad \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{T - s} \quad = \quad \log \frac{T}{T - t} \quad < \quad \infty.$$

Kun $t \to T$, tapahtuu ikäviä. Tekemällä aikamuunnoksen

$$\tilde{t} \quad := \quad \sigma(t) \quad := \quad \log \frac{T}{T - t}$$

näemme, että prosessi $(\tilde{J}_{\tilde{t}})_{\tilde{t} \in [0,\infty)} := (J_{\sigma^{-1}(t)})_{t \in [0,\infty)}$ on Brownin liike. Siten tiedämme, että

$$\limsup_{t \to T} J_t \quad = \quad \limsup_{\tilde{t} \to \infty} \tilde{J}_{\tilde{t}} \quad = \quad \limsup_{t \to \infty} W_t \quad = \quad \infty$$

melkein varmasti. Olkoon sitten a mielivaltainen positiivinen varallisuus, jonka haluamme saada riskittömästi ilman alkupääomaa. Määrittelemme pysäytyshetken

$$\tau_a \quad := \quad \inf\{t \,:\, J_t = a\}.$$

Koska $\limsup_{t \to T} J_t = \infty$, niin $\mathbf{P}(\tau_a < T) = 1$. Määrittelemme strategian $\pi = (\beta, \gamma)$ asettamalla

$$\gamma_t \quad := \quad \frac{1}{S_t \sqrt{T - t}} \mathbf{1}_{(0, \tau_a]}(t)$$

ja β määräytyy omavaraisuusehdosta. Koska γ on vasemmalta jatkuva, niin se on ennustettava. Nyt, pysäytyshetken τ_a määritelmän nojalla,

$$\begin{aligned} V_T^\pi &= 0 + \int_0^T \gamma_t \,\mathrm{d}S_t \\ &= \int_0^T \frac{1}{S_t\sqrt{T-t}} \mathbf{1}_{(0,\tau_a]}(t)\,\mathrm{d}S_t \\ &= \int_0^{\tau_a} \frac{1}{\sqrt{T-t}} \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} \\ &= \int_0^{\tau_a} \frac{\mathrm{d}W_t}{\sqrt{T-t}} \\ &= J_{\tau_a} \\ &= a. \end{aligned}$$

Näemme siis, että on olemassa omavaraisia strategioita, jotka mahdollistavat arbitraasin. Konstruoimamme strategia ei kuitenkaan toteuta integroituvuusehtoa (eikä sitä kautta Itô-isometriaa)

$$\mathbf{E}\left[\int_0^T \gamma_t^2 S_t^2 \,\mathrm{d}t\right] \quad = \quad \mathbf{E}\left[\left(\int_0^T \gamma_t \,\mathrm{d}S_t\right)^2\right] \quad < \quad \infty$$

eli se ei ole hyväksyttävä. $\diamond$

Siirrymme nyt tarkastelemaan hyväksyttäviä strategioita ja ekvivalentteja martingaalimittoja. Reaalimaailman todennäköisyysmitan $\mathbf{P}$ suhteen diskontatulle osakekurssille $\bar{S} = S/B$ pätee

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{S}_t &= \mathrm{d}\frac{S_t}{B_t} \\ &= \frac{1}{B_t}\mathrm{d}S_t + S_t \mathrm{d}\frac{1}{B_t} \\ &= e^{-rt}\mathrm{d}S_t - rS_t e^{-rt}\mathrm{d}t \\ &= e^{-rt}\left(\mathrm{d}S_t - rS_t\mathrm{d}t\right) \\ &= e^{-rt}\left(S_t\mu\mathrm{d}t + S_t\sigma\mathrm{d}W_t - rS_t\mathrm{d}t\right) \\ &= e^{-rt}\left(S_t(\mu-r)\mathrm{d}t + S_t\sigma\mathrm{d}W_t\right) \\ &= \bar{S}_t(\mu-r)\mathrm{d}t + \bar{S}_t\sigma\mathrm{d}W_t. \end{aligned}$$

Näemme, että diskontattu prosessi tottelee dynamiikkaa

$$\frac{\mathrm{d}\bar{S}_t}{\bar{S}_t} \quad = \quad (\mu - r)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t. \tag{9.17}$$

Kirjoitamme nyt väkisin yhtälön (9.17) niin, että sen ratkaisu on stokastinen eksponentti ja siten martingaali. Määrittelemme prosessin $W^{\mathbf{Q}}$ lisäämällä alkuperäiseen prosessiin riskin markkinahinnan vietteeksi:

$$W_t^{\mathbf{Q}} \quad := \quad W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t.$$

Tällöin $\bar{S}$ on stokastinen eksponentti $\mathcal{E}(\sigma W^{\mathbf{Q}})$. Nimittäin

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\bar{S}_t}{\bar{S}_t} &= (\mu - r)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t \\
&= (\mu - r)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}\left(W_t^{\mathbf{Q}} - \frac{\mu - r}{\sigma} t\right) \\
&= (\mu - r)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t^{\mathbf{Q}} - \sigma \frac{\mu - r}{\sigma}\,\mathrm{d}t \\
&= \sigma\,\mathrm{d}W_t^{\mathbf{Q}}.
\end{aligned}$$

Siten, jos mitan $\mathbf{Q}$ suhteen $W^{\mathbf{Q}}$ on $(\mathbf{Q}, \mathbb{F})$-Brownin liike, niin diskontattu osakekurssi $\bar{S}$ on $(\mathbf{Q}, \mathbb{F})$-martingaali. Mutta mitan $\mathbf{Q}$ saamme Girsanovin lauseesta 8.19. Näin olemme osoittaneet seuraavan väitteen.

9.18 Väite. *Määrittelemme mitan* $\mathbf{Q}$ *asettamalla*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}(\omega) \quad := \quad Z_T^{\frac{\mu - r}{\sigma}}(\omega) \quad := \quad \exp\left\{ -\frac{\mu - r}{\sigma} W_T(\omega) - \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T \right\}.$$

Tällöin $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ *ja diskontattu osakekurssi* $\bar{S}$ *on* $(\mathbf{Q}, \mathbb{F})$*-martingaali.*

9.19 Huomautus. Itse asissa Black–Scholes-hinnoittelumallissa ei ole muita ekvivalentteja martingaalimittoja kuin edellä tiheyden $Z_T^{(\mu - r)/\sigma}$ avulla rakennettu $\mathbf{Q}$. Jätämme tämän perustelemisen harjoitustehtäväksi. Vihjeenä toteamme, että kannattaa käyttää Clark–Ocone-esityslausetta. ◇

Black–Scholes-mallin arbitraasivapaus, lause 9.15, seuraa nyt samoista martingaaliargumenteista kuin diskreetissäkin ajassa. Keskeinen huomio on seuraava.

9.20 Väite. *Olkoon* π *hyväksyttävä strategia. Tällöin diskontattu varallisuusprosessi* $\bar{V}^{\pi}$ *on* $(\mathbf{Q}, \mathbb{F})$*-martingaali.*

Todistus. Apulauseen 9.10 nojalla diskontattu varallisuus prosessi on stokastinen integraali

$$\bar{V}_t^{\pi} \quad = \quad V_0^{\pi} + \int_0^t \gamma_s \,\mathrm{d}\bar{S}_s.$$

Koska π on hyväksyttävä, niin stokastinen integraali on martingaali. □

Lauseen 9.15 todistus. Käyttämällä väitettä 9.20 tämä todistus on täsmälleen sama, kuin diskreetin ajan I päälauseen 6.9 todistus. □

9.21 Huomautus. Tarkastelemme miten hyväksyttävyysehto 9.13 (ii) liittyy loppuvarallisuuden V_T^π varianssiin. Jos malli on diskontattu ja $V_0^\pi = 0$, niin Itô-isometrian nojalla

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[(V_T^\pi)^2\right] &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\left(\int_0^T \gamma_t \,\mathrm{d}S_t\right)^2\right] \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[\left(\int_0^T \gamma_t S_t \sigma \,\mathrm{d}W_t^{\mathbf{Q}}\right)^2\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\int_0^T \gamma_t^2 S_t^2 \,\mathrm{d}t\right].
\end{aligned}$$

Karkeasti ottaen siis ehto 9.13 (ii) tarkoittaa, että varallisuusprosessin on oltava neliöintegroituva. ◇

Tarkastelemme nyt Black–Scholes-mallin täydellisyyttä. Tämä seuraa lähes välittömästi ennustettavasta esitysominaisuudesta 8.17.

9.22 Lause. *Black–Scholes-hinnoittelumallin jokainen vaade $F \in L^2(\mathbf{Q})$ voidaan toistaa. Lisäksi vaateen F tasapuolinen arbitraasivapaa hinta hetkellä $t \in [0, T]$ on*

$$c_t(F) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}[F].$$

Todistus. Täydellisyys ei riipu numeräärin valinnasta. Siten oletamme, että hinnoittelumalli on diskontattu eli $r = 0$ ja siten $\bar{S} = S$. Meidän pitää siis osoittaa, että jokaiselle $F \in L^2(\mathbf{Q})$ löytyy sellainen ennustettava prosessi γ, että

$$F = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[F] + \int_0^T \gamma_t \,\mathrm{d}S_t.$$

Mitan $\mathbf{Q}$ suhteen S on stokastinen eksponentti $\mathcal{E}(\sigma W^{\mathbf{Q}})$ eli

$$\mathrm{d}S_t = S_t \sigma \mathrm{d}W_t^{\mathbf{Q}}.$$

Siten tehtävänämme on etsiä sellainen γ, että

$$F = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[F] + \int_0^T \gamma_t S_t \sigma \,\mathrm{d}W_t^{\mathbf{Q}}.$$

Mutta ennustettava esityslause 8.17 sanoo, että on olemassa sellainen yksikäsitteinen neliöintegroituva prosessi m, että

$$F \quad = \quad \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[F] + \int_0^T m_t \, \mathrm{d}W_t^{\mathbf{Q}}.$$

Asettamalla

$$\gamma_t \quad = \quad \frac{m_t}{\sigma S_t}$$

olemme löytäneet strategiamme. Kaava tasapuoliselle hinnalle $c_t(F)$ seuraa nyt siitä, että strategiamme diskontattu varallisuus on martingaali alkupääomalla $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\bar{F}]$. □

Suojausstrategia siis "löydettiin" ennustettavan esityslauseen 8.17 avulla. Siispä emme ole varsinaisesti löytäneet sitä. Tiedämme vain, että suojaus on olemassa ja että se on yksikäsitteinen. Tämä on tietysti aika vaatimaton tulos. Lisäksi ehdollisen odotusarvon $\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}[F]$ laskeminen voi käytännössä olla viheliäisen hankalaa.

Eurooppalaiset optiot

Tarkastelemme yksinkertaisia eurooppalaisia optioita $F = f(S_T)$. Oletamme lisäksi, että $f(S_T) \in L^2(\mathbf{Q})$, missä $\mathbf{Q}$ on mallimme yksikäsitteinen ekvivalentti martingaalimitta. Edellisen osion lauseen 9.22 perusteella tiedämme, että diskontattu varallisuusprosessi $\bar{V}^\pi$ on $(\mathbf{Q}, \mathbb{F})$-martingaali ja

$$V_t^\pi \quad = \quad e^{-r(T-t)} \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}} \left[f(S_T) \right].$$

Koska W on markoviaaninen prosessi, niin on syytä olettaa, että myös S on markoviaaninen. Tämä siis tarkoittaisi sitä, että

$$V_t^\pi \quad = \quad e^{-r(T-t)} \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}} \left[f(S_T) \right] \quad = \quad v(t, S_t)$$

jollekin f:stä riippuvalle funktiolle v. Näin todellakin on ja funktio v löytyy suoralla laskulla. Käytämme laskuissa seuraava aputulosta.

9.23 Apulause. *Olkoon $\mathcal{G}$ jokin σ-algebra. Olkoon X mitallinen σ-algebran $\mathcal{G}$ suhteen ja olkoon Y riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{G}$. Olkoon $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ riittävän rajoitettu. Merkitsemme*

$$\psi(x) \quad := \quad \mathbf{E} \left[\Psi(x, Y) \right]$$

Tällöin

$$\mathbf{E} \left[\Psi(X, Y) \,|\, \mathcal{G} \right] \quad = \quad \psi(X).$$

Todistus. Tämä väite perustuu Fubinin kaavaan eli integrointijärjestyksen vaihtamiseen. Panemme aluksi merkille, että

$$\psi(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \Psi(x,y)\,\mathbf{P}(Y\in \mathrm{d}y).$$

Olkoon Z jokin rajoitettu $\mathcal{G}$-mitallinen apusatunnaismuuttuja. Koska Y on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{G}$, niin

$$\mathbf{P}(X\in \mathrm{d}x, Z\in \mathrm{d}z, Y\in \mathrm{d}y) \;=\; \mathbf{P}(X\in \mathrm{d}x, Z\in \mathrm{d}z)\mathbf{P}(Y\in \mathrm{d}y).$$

Siten Fubinoimalla saamme

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\Psi(X,Y)Z\right] &= \int_{\mathbb{R}^3} \Psi(x,y)z\;\mathbf{P}(X\in \mathrm{d}x, Z\in \mathrm{d}z, Y\in \mathrm{d}y) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^2} \Psi(x,y)z\;\mathbf{P}(X\in \mathrm{d}x, Z\in \mathrm{d}z)\mathbf{P}(Y\in \mathrm{d}y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}} \psi(x,y)\,\mathbf{P}(Y\in \mathrm{d}y)\right) z\;\mathbf{P}(X\in \mathrm{d}x, Z\in \mathrm{d}z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x)z\,\mathbf{P}(X\in \mathrm{d}x, Z\in \mathrm{d}z) \\
&= \mathbf{E}\left[\psi(X)Z\right].
\end{aligned}$$

Valitsemalla nyt $Z := \mathbf{1}_A,\ A\in\mathcal{G}$, saamme

$$\mathbf{E}\left[\Psi(X,Y)\mathbf{1}_A\right] \;=\; \mathbf{E}\left[\psi(X)\mathbf{1}_A\right].$$

Mutta koska $\psi(X)$ on $\mathcal{G}$-mitallinen, niin tämä yhtälö tarkoittaa sitä, että $\mathbf{E}[\Psi(X,Y)|\mathcal{G}] = \psi(X)$. $\square$

Etsimme sitten arvofunktion v. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[f(S_T)\right] &= \mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[f\left(S_0 e^{\mu T+\sigma W_T-\frac{\sigma^2}{2}T}\right)\right] \\
&= \mathbf{E}_t\left[f\left(S_0 e^{rT+\sigma W_T-\frac{\sigma^2}{2}T}\right)\right] \\
&= \mathbf{E}_t\left[f\left(S_t e^{r(T-t)+\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\right] \\
&= \mathbf{E}\left[f\left(x e^{r(T-t)+\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\right]_{x=S_t} \\
&= \mathbf{E}\left[f\left(x e^{r(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}W_1-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\right]_{x=S_t} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(S_t e^{r(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}$$

Olemme löytäneet funktion v:

$$(9.24)\quad v(t,x) \;=\; e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(xe^{r(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}}.$$

9.25 Huomautus. Vaihtelemalla muuttujia kaavassa (9.24) löydämme markoviaanisen prosessin S (diskontatun) siirtymätiheyden ja voimme kirjoittaa kaavan (9.24) muodossa

$$(9.26)\qquad v(t,x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(z)k(z;x,T-t)\,\mathrm{d}z.$$

Nimittäin merkitsemällä $\theta := T-t$ ja valitsemalla

$$z \;=\; xe^{r\theta+\sigma\sqrt{\theta}y-\frac{\sigma^2}{2}\theta}$$

saamme

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\theta}}\left(\log\frac{z}{x} - r\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta\right), \\ \mathrm{d}y &= \frac{\mathrm{d}z}{\sigma z\sqrt{\theta}}. \end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä muunnokset kaavaan (9.24) näemme pienoisen pyörittelyn jälkeen, että

$$k(z;x,\theta) \;=\; \frac{e^{-r\theta}}{\sigma z\sqrt{2\pi\theta}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2\theta}\left(\log\frac{z}{x} - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\theta\right)^2\right\}.$$

Tämä siis tarkoittaa sitä, että

$$\mathbf{P}\left(S_T \in \mathrm{d}z \,|\, \mathcal{F}_t\right) \;=\; e^{r(T-t)}k(z\,;\,S_t,T-t)\,\mathrm{d}z$$

eli S on $(\mathbf{Q},\mathbb{F})$-markoviaaninen prosessi. Se ei kutenkaan ole Lévy-prosessi, sillä se ei ole homogeeninen tilassa. $\diamond$

Kaavassa (9.26) esiintyvä S:n diskontattu siirtymätiheys k on sileä parametrien x ja t suhteen. Siten, jos f on riittävän rajoitettu, voimme vaihtaa integroinnin ja derivoinnin järjestystä ja esimerkiksi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(z\,;\,x,T-t)\,\mathrm{d}z.$$

Erityisesti siis arvofunktiot v ovat tyypillisesti derivoituvia parametriensa suhteen.

Seuraava lause kertoo, miten suojaus lasketaan kun arvoprosessi v on riittävän sileä.

9.27 Lause. *Olkoon vaade* $f(S_T) \in L^2(\mathbf{Q})$ *ja*

$$\begin{aligned} v(t,x) &= e^{-r(T-t)}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[f(S_T)\,|\,S_t = x\right] \\ &= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(xe^{r(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Jos $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, *niin option* $f(S_T)$ *suojaus* $\pi = (\beta,\gamma)$ *saadaan kaavoista*

$$\begin{aligned} \gamma_t &= g(t,S_t) &= \frac{\partial v}{\partial x}(t,S_t), \\ \beta_t &= b(t,S_t) &= e^{-rt}\left(v(t,S_t) - \frac{\partial v}{\partial x}(t,S_t)S_t\right). \end{aligned}$$

Todistus. Osoitamme kaavan osakepainoille γ. Pankkipainojen β kaava seuraa tällöin välittömästi. Oletamme, että malli on diskontattu eli $r = 0$. Korollisen version todistamisen jätämme harjoitustehtäväksi.

Tiedämme, että nyt $V = v(\cdot, S_\cdot)$ on martingaali ja

$$\mathrm{d}v(t,S_t) = \gamma_t \mathrm{d}S_t.$$

Toisaalta Itôn kaava sanoo, että

$$\mathrm{d}v(t,S_t) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,S_t)\,\mathrm{d}S_t + \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t,S_t) + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,S_t)\right)\mathrm{d}t.$$

Koska v on kuitenkin martingaali, niin dt-termin tulee olla nolla. Nimittäin, jos dt-termi ei ole nolla, niin martingaalien v ja $\int_0^\cdot \partial v/\partial x(t,S_t)\mathrm{d}S_t$ erotuksena myös prosessi

$$M := \int_0^\cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t,S_t) + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,S_t)\right)\mathrm{d}t$$

on martingaali. Mutta tämä prosessi on derivoituva. Siten sille on poluittain voimassa kaava

$$M_t^2 = 2\int_0^t M_s\,\mathrm{d}M_s.$$

Toisaalta $M_0 = 0$ ja stokastisen integraalin odotusarvo on nolla. Siten

$$\mathbf{Var}\left[M_t\right] = \mathbf{E}\left[M_t^2\right] = 2\mathbf{E}\left[\int_0^t M_s\,\mathrm{d}M_s\right] = 0.$$

Näemme, että $M_t = 0$ identtisesti. Kaava $\gamma = \partial v/\partial x$ seuraa tästä. □

9.28 Huomautus. Olkoon $f(S_T) \in L^2(\mathbf{Q})$ eurooppalainen optio. Oletamme, että sen arvoprosessi $v = v(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. Omavaraisuusehto sanoo, että

$$\mathrm{d}v \;=\; \beta e^{rt}\,\mathrm{d}t + \gamma\,\mathrm{d}S.$$

Toisaalta Itôn kaava sanoo, että

$$\mathrm{d}v \;=\; \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}S.$$

Koska differentiaaliesitys on aina yksikäsitteinen, niin näemme pienen pyörityksen jälkeen (harjoitustehtävä), että funktion v on toteutettava takaperoinen (ei-stokastinen) osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rx\frac{\partial v}{\partial x} - rv &= 0,\\ v(T,\cdot) &= f.\end{aligned} \tag{9.29}$$

Lisäksi näemme, edelleen käyttämällä Itôn kaavaa (harjoitustehtävä), että jos arvoprosessi toteuttaa yhtälön (9.29), niin $\partial v/\partial x$ on vaateen $f(S_T)$ suojaus. Takaperoista osittaisdifferentiaaliyhtälöä (9.29) kutsutaan *Black–Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälöksi*. Se tarjoaa toisen tavan suojauksen löytämiseksi. Nimittäin nyt meillä on kaksi vaihtoehtoa. Voimme joko laskea integraalin (9.24) tai ratkaista osittaisdifferentiaaliyhtälön (9.29). Käytännössä joudumme usein, lähestymistavasta riippumatta, turvautumaan numeerisiin menetelmiin.

Itse asiassa Black ja Scholes eivät johtaneet osittaisdifferentiaaliyhtälöään martingaalitekniikoilla kuten me. He käyttivät arbitraasivapausargumenttia ja olettivat *a priori*, että arvoprosessi on markoviaaninen ja riittävän sileä. Me sen sijaan todistimme, että arvoprosessi on markoviaaninen. ◇

9.30 Esimerkki. Tarkastelemme jo tutuksi tullutta eurooppalaista osto-optiota $f(S_T) = (S_T - K)^+$. Otamme käyttöön apumuuttujat

$$\begin{aligned}d_1(t,x) &:= \frac{\log\frac{x}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\\ d_2(t,x) &:= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.\end{aligned}$$

ja Φ on vanha tuttu standardinormaalijakauman kertymäfunktio

$$\Phi(x) \;:=\; \int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}}.$$

Laskemme arvoprosessin. Apumuuttujat d_1 ja d_2 tulevat vastaan integrointirajoja laskettaessa.

$$\begin{aligned}
v(t,S_t) &= V_t^\pi \\
&= e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[(S_T-K)^+\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\left(xe^{\sigma\sqrt{T-t}W_1-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}-Ke^{-r(T-t)}\right)^+\right]_{x=S_t} \\
&= \int_{-d_2(t,S_t)}^{\infty}\left(S_te^{\sigma\sqrt{T-t}y-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}-Ke^{-r(T-t)}\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int_{-\infty}^{d_2(t,S_t)}\left(S_te^{-\sigma\sqrt{T-t}y-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}-Ke^{-r(T-t)}\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}} \\
&= S_t\Phi\Big(d_1(t,S_t)\Big)-Ke^{-r(T-t)}\Phi\Big(d_2(t,S_t)\Big).
\end{aligned}$$

Suojauksen γ saamme nyt derivoimalla. Huomaamme aluksi, että

$$\frac{\partial d_2}{\partial x}(t,x) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big\{d_1(t,x)-\sigma\sqrt{T-t}\Big\} \quad = \quad \frac{\partial d_1}{\partial x}(t,x)$$

ja

$$\begin{aligned}
\Phi'(d_2(t,x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{d_2(t,x)^2}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(d_1(t,x)-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2\right\} \\
&= \exp\left\{d_1(t,x)\sigma\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right\}\Phi'(d_1(t,x)) \\
&= \exp\left\{\log\frac{x}{K}+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right\}\Phi'(d_1(t,x)) \\
&= \frac{xe^{r(T-t)}}{K}\Phi'(d_1(t,x)).
\end{aligned}$$

Siten

$$\begin{aligned}
\gamma_t &= \frac{\partial v}{\partial x}(t,S_t) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{S_t\Phi\Big(d_1(t,S_t)\Big)-Ke^{-r(T-t)}\Phi\Big(d_2(t,S_t)\Big)\right\} \\
&= \Phi\Big(d_1(t,S_t)\Big)+S_t\Phi'\Big(d_1(t,S_t)\Big)\frac{\partial d_1}{\partial x}(t,S_t) \\
&\quad -Ke^{-r(T-t)}\Phi'\Big(d_2(t,S_t)\Big)\frac{\partial d_2}{\partial x}(t,S_t) \\
&= \Phi\Big(d_1(t,S_t)\Big).
\end{aligned}$$

◇

9.31 Esimerkki. Myyntioption $(K-S_T)^+$ suojaus voidaan laskea kuten osto-optionkin suojaus laskettiin esimerkissä 9.30. Toisaalta voimme myös käyttää osto–myynti-pariteettia. Nimittäin, koska

$$(S_t-K)^+-(K-S_t)^+ \quad = \quad S_t-K,$$

niin

$$\begin{aligned}
c^{\mathrm{call}}(t,S_t)+c^{\mathrm{put}}(t,S_t) &= e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[S_T-K\right] \\
&= e^{-r(T-t)}\Big(e^{rT}\mathbf{E}_t^{\mathbf{Q}}\left[\bar{S}_T\right]-K\Big) \\
&= e^{-r(T-t)}\left(e^{rT}\bar{S}_t-K\right) \\
&= S_t-e^{-r(T-t)}K.
\end{aligned}$$

Tällöin on kohtalaisen helppo nähdä, että myyntioptiolle

$$v(t,x) \quad = \quad Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2(t,x))-x\Phi(-d_1(t,x))$$

ja

$$\gamma_t \quad = \quad \frac{\partial v}{\partial x}(t,S_t) \quad = \quad -\Phi\Big(-d_1(t,S_t)\Big).$$

Jätämme yksityiskohdat harjoitustehtäväksi. ◇

Herkkyysparametrit

Tarkastelemme lopuksi eurooppalaisen option $F=f(S_T)$ hinnan

$$v(t,S_t) \quad = \quad e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(S_t e^{r(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}}$$

herkkyyttä mallin suureiden r, σ, S_t ja t suhteen.

9.32 Määritelmä. Option $F=f(S_T)$ hinnan $v=v(t,x)$ herkkyysparametrit eli *kreikkalaiset* ovat

(i) delta $\Delta=\frac{\partial v}{\partial x}$,

(ii) gamma $\Gamma=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$,

(iii) korkoherkkyys rhoo $\rho=\frac{\partial v}{\partial r}$,

(iv) aikaherkkyys theeta $\Theta=\frac{\partial v}{\partial t}$,

(v) riskiherkkyys vega $\mathcal{V} = \frac{\partial v}{\partial \sigma}$.

Vega ei muuten ole kreikkalainen kirjain.

Kreikkalaisten avulla voimme kirjoittaa Black–Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälön (9.29) muodossa

$$\Theta + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \Gamma - rx\Delta - rv \quad = \quad 0.$$

9.33 Esimerkki. Osto-optiolle $(S_T - K)^+$ pätee

$$\begin{aligned}
\Delta &= \Phi(d_1), \\
\Gamma &= \frac{\phi(d_1)}{x\sigma\sqrt{T-t}}, \\
\Theta &= -\frac{x\sigma\phi(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \\
\rho &= K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(d_1), \\
\mathcal{V} &= x\phi(d_2)\sqrt{T-t}.
\end{aligned}$$

Näiden kaavojen johtaminen voi olla melko työlästä, joten jätämme johtamisen harjoitustehtäväksi. ◇

Yleisesti pätee seuraava väite.

9.34 Väite. *Olkoon $F = f(S_T)$ [rajoitettu] eurooppalainen optio ja $v = v(t, S_t)$ sen arvo hetkellä t.*

(i) *Jos f on vähenevä, niin $\Delta \leq 0$.*

(ii) *Jos f on kasvava, niin $\Delta \geq 0$.*

(iii) *Jos f on konveksi, niin $\Gamma \geq 0$ ja $\mathcal{V} \geq 0$.*

(iv) *Jos f on konkaavi, niin $\Gamma \leq 0$ ja $\mathcal{V} \leq 0$.*

Todistus. Näytämme kohdan (i). Muut kohdat jätämme harjoitustehtäväksi.

Olkoon f vähenevä. Koska $f(S_T)$ on [rajotettu], niin voimme vaihtaa derivoinnin ja integroinnin järjestystä. Tällöin

$$\begin{aligned}
\Delta(t,x) &= \frac{\partial v}{\partial x}(t,x) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{ e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(xe^{r(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}} \right\} \\
&= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\left(xe^{r(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}}. \qquad (9.35)
\end{aligned}$$

Koska f on vähenevä, niin $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x \leq 0$. Siten integraali (9.35) on ei-positiivinen. Väite seuraa. $\square$

9.36 Esimerkki. Oletamme, että herra K. on myynyt sopimuksen, jonka arvo hetkellä t on $v(t, S_t)$. Herra K. haluaa suojata velvoitteensa toisella sopimuksella, jonka arvo hetkellä t on $w(t, S_t)$. Oletamme, että $v, w \in C^{1,2}(\mathbb{R})$. Herra K. omistaa nyt salkun

$$V_t = -v(t, S_t) + \theta_t w(t, S_t),$$

missä θ_t on herra K:n valitsema suojauspaino hetkellä t. Oletamme luonnollisesti, että salkku on omavarainen:

$$\mathrm{d}V_t = -\mathrm{d}v(t, S_t) + \theta_t \mathrm{d}w(t, S_t).$$

Herra K. haluaa, että varallisuus V on *Delta-neutraali* eli

$$\Delta = -\frac{\partial v}{\partial x} + \theta \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Tällöin nimittäin $V_T = v(T, S_T)$ eli herra K. on rakentanut suojauksen. Delta-neutraalius johtaa valintaan

$$\theta = \frac{\partial v/\partial x}{\partial w/\partial x}.$$

Jos siis herra K. suojaa sopimuksen v osakkeella, eli $w(t, S_t) = S_t$, niin $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$. Tämä selittää, miksi valintaa $\gamma = \frac{\partial v}{\partial x}$ kutsutaan *Delta-suojaukseksi.*

Lisäämällä sijoitusinstrumentteja herra K. voi suojata vieläkin vakaammin. Herra K. rakentaa salkun

$$V_t = -v(t, S_t) + \theta_t^1 w^1(t, S_t) + \theta_t^2 w^2(t, S_t),$$

missä painot θ^1 ja θ^2 ovat sellaisia, että

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} + \theta^1 \frac{\partial w^1}{\partial x} + \theta^2 \frac{\partial w^2}{\partial x} &= 0, \\ -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \theta^1 \frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2} + \theta^2 \frac{\partial^2 w^2}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned}$$

Tällöin salkulle V pätee: $\Delta = \Gamma = 0$. Tällaista salkkua kutsutaan *Gamma-neutraaliksi* tai Gamma/Delta-neutraaliksi. $\diamond$

Harjoitustehtäviä lukuun 9

9.1. Johda huomautuksen 9.5 kaavat (9.6) ja (9.7).

9.2. Todista apulause 9.10.

9.3. Todista väite 9.11.

9.4. Rakenna arbitraasistrategia jatkuva-aikaisessa mallissa, jossa osakekurssi S on derivoituva (kts. huomautus 9.12).

9.5. Osoita, että ennustettavat ja rajoitetut strategiat ovat hyväksyttäviä.

9.6. Rakenna Black–Scholes-malliin omavarainen arbitraasistrategia, jossa positioita β ja γ päivitetään vain äärellisen monta kertaa. (Vihje: tuplaus)

9.7. Osoita, että Black–Scholes-mallissa on vain yksi ekvivalentti martingaalimitta.

9.8. Tarkastelemme diskonttaamatonta Black–Scholes-mallia. Etsi vaateen F suojaus $\pi = (\beta, \gamma)$ Clark–Ocone-esityslauseen

$$F \quad = \quad \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[F] + \int_0^T m_t \,\mathrm{d}W_t^{\mathbf{Q}}$$

avulla. Toisin sanoen esitä β ja γ prosessin m avulla.

9.9. Todista lause 9.27 diskonttaamattomassa mallissa.

9.10. Laske osakepainoprosessi γ myyntioptiolle $(K - S_T)^+$.

9.11. Johda Black–Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälö (9.29)

9.12. Olkoon $L < K$. Laske rajoitetun osto-option $(S_T - L)^+ \mathbf{1}_{\{S_T \le K\}}$ hinta Black–Scholes-mallissa.

9.13. Laske edellisen tehtävän rajoitetun osto-option suojaus.

9.14. Johda esimerkin 9.33 kaavat.

9.15. Todista väite 9.34.

9.16. Etsi näistä muistiinpanoista virhe.

9.17. Vastaa kurssikyselyyn osoitteessa
`http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/kysely/`,
sitten kun lomake sinne ilmestyy.

"Jatkuva aika" pähkinänkuoressa

- Satunnaiskulkumalli $\Longrightarrow$ Lévy-prosessi.
- Jatkuva satunnaiskulkumalli $\Longrightarrow$ Brownin liike.

Black–Scholes-mallista

- Täydellinen ja arbitraasivapaa.
- Ekvivalentin martingaalimitan $\mathbf{Q}$ suhteen

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \sigma\,\mathrm{d}W_t^{\mathbf{Q}},$$

  missä $W^{\mathbf{Q}}$ on Brownin liike.

- Eurooppalaisen vaateen F arbitraasivapaa hinta $= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\frac{F}{B_T}]$.
- Vaateen $F = f(S_T)$ hinta

$$v(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(S_t e^{r(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}y-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}}.$$

  Toisto:

$$\gamma_t = \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t).$$

- Hinta v ja toisto $\frac{\partial v}{\partial x}$ saadaan myös ratkaisemalla v Black–Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälöstä

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rx\frac{\partial v}{\partial x} - rv &= 0, \\ v(T, \cdot) &= f. \end{aligned}$$

∽ Finis opus ∼

Kirjallisuutta

[1] Alvarez, L. ja Koskinen, L. *Rahoituksen teoriaa ja sovelluksia aktuaareille.* Vakuutusvalvontavirasto, 2004.

[2] Föllmer, H. ja Schied, A. *Stochastic finance. An introduction in discrete time.* de Gruyter Studies in Mathematics, 27. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2002.

[3] Lamberton, D. ja Lapeyre, B. *Introduction to stochastic calculus applied to finance.* Chapman & Hall, London, 1996.

[4] Shiryaev, A. *Essentials of stochastic finance. Facts, models, theory.* Advanced Series on Statistical Science Applied Probability, 3. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999.

[5] Shreve, S. *Stochastic calculus for finance. I. The binomial asset pricing model.* Springer Finance. Springer-Verlag, New York, 2004.

[6] Shreve, S. *Stochastic calculus for finance. II. Continuous-time models.* Springer Finance. Springer-Verlag, New York, 2004.

[7] Shreve, S. *Lectures on Stochastic Calculus and Finance.* Luentomuistiinpanot, 1996. `www-2.cs.cmu.edu/~chal/Shreve/shreve.html`

[8] Valkeila, E. *Rahoitusteoria.* Luentomuistiinpanot, 2004. `math.tkk.fi/opetus/rahoitus`

Hakemisto