ORMS 2020
Päätöksenteko epävarmuuden vallitessa

Tommi Sottinen

Sisältö

Esipuhe 5

Luku 1. Todennäköisyys 7
Todennäköisyyskäsitteet 7
Todennäköisyyden laskusäännöt 11
Satunnaismuuttujat 21
Harjoitustehtäviä lukuun 1 25

Luku 2. Päätösmatriisit 29
Ei-stokastisia sääntöjä 30
Stokastisia sääntöjä 32
Yhdistettyjä sääntöjä 34
Harjoitustehtäviä lukuun 2 39

Luku 3. Päätöspuut 43
Päätöspuun rakentaminen 43
Riskineutraali päätössääntö 45
Bayesin kaava päätöspuissa 49
Informaation arvo 52
Harjoitustehtäviä lukuun 3 56

Luku 4. Todennäköisyyksien estimointi 61
Suhteellisten frekvenssien menetelmä 61
Teoreettisen mallin sovittaminen 65
Pearson–Tukey-menetelmä 71
Harjoitustehtäviä lukuun 4 73

Luku 5. Hyötyteoriaa 77
Arpajaiset, preferenssit ja hyödyt 78
Von Neumann–Morgerstern -aksioomat 84
Hyötyfunktion estimointi 85
Hyöytyfunktion käyttö päätöspuissa 88
Harjoitustehtäviä lukuun 5 90

Luku 6. Hyötyteorian kritiikki 93
Prospektiteoria 93
Ankkurointiefekti 96
Suhtautuminen kritiikkiin 96
Harjoitustehtäviä lukuun 6 97

Kirjallisuutta 99

Hakemisto 101

Esipuhe

Nämä ovat luentomuistiinpanot syksyn 2009 ja kurssille *ORMS2020 Päätöksenteko epävarmuuden vallitessa* Vaasan yliopistossa. Joitakin muistiinpanojen virheitä on korjattu syksyn 2010 kurssin aikana. Kurssi on 5 op laajuinen sisältäen jotakuinkin 36 tuntia luentoja ja 12 tuntia harjoituksia.

Kurssin tarkoitus on antaa eväitä ratkaista päätösongelmia, kuten:

Erään päätösongelman kuvaus. Eräänä aamuna herättyään levottomista unistaan opiskelija O. päätti hakea kesätöitä [2]. Tarjolla on kolme vaihtoehtoa:

- Kewlin myyntiedustaja,
- Siperian Walinnan kassa,
- Boren myyntiedustaja.

Kewl on tosi trendikäs mainostoimisto, Siperian Walinta on tyypillinen lähikauppa, ja Bore on perinteinen tylsähkö tilintarkastusyritys. Tietysti opiskelija O. voi myös päättää olla hakematta kesätöitä ja muuttua esimerkiksi suunnattomaksi syöpäläiseksi.

Opiskelija O.:n päätökseen vaikuttavat ainakin seuraavat kysymykset:

- Mitä O. arvostaa — palkkaa, työn mukavuutta, työn pysyvyyttä, työn hakemisen helppoutta, ...?
- Miten eri tavoitteet eli arvotukset yhdistetään — miten esimerkiksi palkka ja työn mukavuus suhteutuvat toisiinsa?
- Mikä on epävarmaa — palkka lienee selvä, mutta palkkakehitys voi ollakin jo epäselvää?
- Miten epävarmuus hallitaan — miten sattuma mallinnetaan, onko dataa parametrien estimoinniksi?
- Miten riskiin suhtaudutaan — rakastaako O. riskiä vai kaihtaako hän sitä?

Mitä opiskelija O.:n tulisi tehdä?

Sisällöstä. Luvussa 1 esitämme varsin pikaisen johdannon todennäköisyyslaskentaan. Enemmän todennäköisyyslaskennasta ja -teoriasta kiinnostunut löytää lisätietoa esimerkiksi lähteistä [5] ja [8]. Luvussa 2 tarkastelemme päätöksentekoa "pysäytetyssä ajassa", jolloin päätöksillä ei ole pitkän aikavälin syitä eikä seurauksia. Luvussa 3 tarkastelemme päätöksentekoa "ajassa", jolloin aikaisemmat päätökset ja tapahtumat vaikuttavat myöhempiin päätöksiin ja tapahtumien todennäköisyyksiin. Luku 4 palaa todennäköisyysteemaan ja todennäköisyyksien arviointiin. Luku 5 käsittelee järkevää päätöksentekoa ja luku 6 sen kritiikkiä! Luvussa 7 käsittelisimme monen eri tavoitteen yhteensovittamista, ja antaisimme

"Erään päätösongelman ratkaisun". Valitettavasti ainakaan vuonna 2009 emme sinne asti ehtineet (lukua ei ole vielä kirjoitettu).

Henkisestä omaisuudesta. Tämä kurssikirja on pitkälti koottu kirjallisuusluettelossa mainituista lähteistä — ja monista muista lähteistä, jotka kirjoittaja on unohtanut. Kirjoittaja ei ole jaksanut tai muistanut mainita, mistä mikäkin esimerkki, määritemä tmv. on poimittu. Kirjoittaja toivoo, ettei hän ole rikkonut pyhiä ©-lakeja liiaksi, ja pyytää varmuuden vuoksi anteeksi kaikilta, joiden kiltaprivilegioita hän on tullut loukanneeksi!

Tämä kirja on julkaistu cc-lisenssillä — sikäli kun se on mahdollista.

Vaasassa 15. joulukuuta 2010 T.S.

LUKU 1

Todennäköisyys

Todennäköisyyskäsitteet

Klassinen todennäköisyys. Klassinen todennäköisyys perustuu "yhtä todennäköisen" periaatteelle. Tilannetta jossa esiintyy satunnaisuutta, kutsutaan satunnaiskokeeksi. Satunnaiskokeen eri tulosmahdollisuuksia kutsutaan alkeistapauksiksi. Klassisessa todennäköisyydessä alkeistapauksia on äärellinen määrä ja ne kaikki ovat yhtä mahdollisia eli yhtä todennäköisiä. Tämä olettamus lausutaan sanomalla, että alkeistapaukset ovat symmetrisiä. Esimerkiksi kolikonheitossa on kaksi symmetristä alkeistapausta, kruuna ja klaava, ja nopanheitossa on kuusi symmetristä alkeistapausta, pisteluvut $1, 2, \ldots, 6$.

Tapahtuma on alkeistapausten joukko, erityisesti se voi olla tyhjä ($\varnothing$) tai kaikkien alkeistapausten joukko (Ω). Tapahtumia merkitään kirjaimilla A, B, C, jne., ja alkeistapauksia kirjaimella ω. Esimerkiksi nopanheitossa tapahtuma A voisi olla "nopanheiton tulos on vähintään neljä", siis $A = \{4, 5, 6\}$. Tapahtuma on varma, jos se sattuu välttämättä jokaisessa satunnaiskokeessa, ja mahdoton, jos se ei voi sattua yhdessäkään kokeessa. Nopanheitossa tapahtuma $B =$ "pisteluku on vähintään yksi" $= \Omega$ on varma, ja tapahtuma $C =$ "pisteluvuksi ei tule mitään" $= \varnothing$ on mahdoton.

Olkoon n kaikkien alkeistapausten lukumäärä ja $n(A)$ joukon A alkioiden lukumäärä, jota kutsutaan A:lle suotuisien alkeistapausten lukumääräksi. Tapahtuman A *klassinen todennäköisyys* on

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n}.$$

Siten tapahtuman $A =$ "nopanheiton tulos on vähintään neljä" todennäköisyys on

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Alkeistapausten symmetrisyyttä ei voi perustella matemaattisesti, vaan tarvitaan epämääräinen käsite "umpimähkäinen valinta". Alkeistapausten symmetrisyyden voisi yrittää johtaa fysikaalisesta symmetriasta. Esimerkiksi kolikonheitossa kruuna ja klaava ovat symmetrisiä alkeistapauksia, jos kolikkoa ei ole painotettu. Symmetriaa ei voi kuitenkaan perustella sillä, että kolikko olisi fysikaalisesti täysin symmetrinen — silloinhan kruunaa ja klaavaa ei voisi erottaa toisistaan.

Geometrinen todennäköisyys. Symmetrisiin yhtä todennäköisiin tapahtumiin perustuva todennäköisyyden klassinen määritelmä on riittämätön. Yksi tapa laajentaa määritelmää on geometrisen todennäköisyyden idea. Tässäkin lähestymistavassa yhtä todennäköisen käsite on keskeisessä roolissa, mutta geometrista todennäköisyyttä voidaan kuitenkin hyvällä syyllä pitää klassisen todennäköisyyden yleistyksenä — esimerkiksi alkeistapauksia geometrisessa todennäköisyydessä on ääretön määrä.

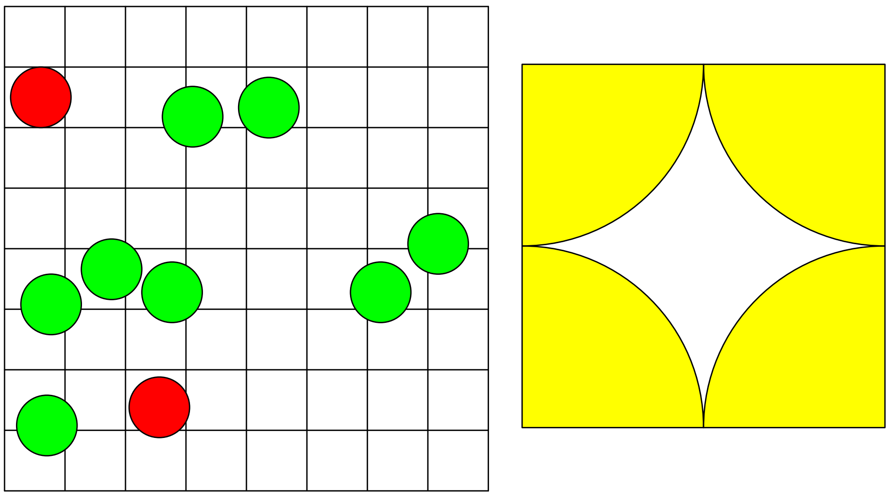
Geometrista todennäköisyyttä voi soveltaa tilanteissa, joissa satunnaiskokeen tulos voidaan havainnollistaa geometrisella kuviolla ja kiinnostuksen kohteena oleva tapahtuma A tämän osakuviona. Tällaisia kuvioita ja niiden osakuvioita voivat olla esimerkiksi yksiulotteinen jana, kaksiulotteinen tasoalue tai kolmiulotteinen kappale. Tilanteen on oltava siinä mielessä symmetrinen, että A:n mahdollisuus esiintyä riippuu vain A:n geometrisesta mitasta (janalla pituus, tasoalueella pinta-ala ja kappaleella tilavuus), eikä lainkaan A:n muodosta tai sijainnista. Tällöin voimme määritellä A:n *geometrisen todennäköisyyden* lukuna

$$\mathrm{P}(A) = \frac{m(A)}{m},$$

missä $m(A)$ on osakuvion A ja m koko kuvion geometrinen mitta.

1.1. Esimerkki. [1] Lattialla on neliöruudukko, jossa neliön sivu = kolikon halkaisija = $2r$. Millä todennäköisyydellä lattialle heitetty kolikko peittää neliön kärjen?

Tutkimme kysytyn geometrisen todennäköisyyden selvittämiseksi kolikon keskipisteen sijaintia neliöruudukossa. Koska eri neliöt ovat toisiinsa nähden samassa asemassa, voimme tarkastella yhtä neliötä. Sen pinta-ala on $m = (2r)^2 = 4r^2$. Tarkastelemme tapahtumaa A = "lattialle heitetty kolikko peittää neliön kärjen", jota mallissamme edustaa kolikon keskipisteen sijainti neliössä. Suotuisissa tapauksissa kolikon keskipisteen etäisyys neliön kärjestä on pienempi kuin r



Näin ollen A:n pinta-ala on $m(A) = 4 \cdot \frac{\pi r^2}{4} = \pi r^2$, ja siten

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785.$$

[1] Tämä esimerkki — yhdistettynä suurten lukujen lakiin ja seuraavaksi esitettävään todennäköisyyden frekvenssitulkintaan — on kuuluisa *Buffonin neulakoe*, jolla voidaan laskea π tilastollisesti.

Geometrisen todennäköisyyden määrittelyyn liittyy samoja periaatteellisia ongelmia kuin klassisenkin todennäköisyyden määrittelyyn. Vakavin puute kummassakin määritelmässä on, että ne kattavat vain hyvin suppean osan niistä satunnaiskokeista, joista olemme kiinnostuneet. Kummankaan määritelmän pohjalta on mahdotonta rakentaa alkeistapauksia, joiden avulla voisimme johtaa todennäköisyyden, että syntyvä lapsi on tyttö (0,487) tai että radioaktiivisen hiiliatomin ^{14}C elinikä on yli 1.000 vuotta (0,883).

Frekventistinen todennäköisyys. Perinteinen tilastollisen todennäköisyyden käsite perustuu frekvenssitulkintaan, joka puolestaan perustuu suurten lukujen lakiin. Tarkastelemme satunnaiskoetta, jota voidaan toistaa samanlaisissa olosuhteissa rajattomasti. Olkoon A tähän kokeeseen liittyvä tapahtuma ja $F_n(A)$ tapahtuman A esiintymiskertojen lukumäärä n:ssä toistossa. Tapahtuma A:n *suhteellisen frekvenssi* on

$$f_n(A) = \frac{F_n(A)}{n}.$$

Suurten lukujen lain nojalla toistojen lukumäärän n kasvaessa suhteellinen frekvenssi $f_n(A)$ keskittyy tietyn luvun läheisyyteen. Tapahtuman A *frekventistinen todennäköisyys* on juuri kyseinen luku:

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A).$$

Esimerkiksi tytön syntymän todennäköisyys 0,487 on saatu siitä, että historiallisesti jokaisesta tuhannesta syntyneestä lapsesta keskimäärin 487 on ollut tyttöjä. Radioaktiivisia hiiliatomeja tarkasteltaessa taas havaittiin, että keskimäärin 833 hiiliatomia tuhannesta saavutti kunnioitettavan tuhannen vuoden iän ☺.

Bayesläinen todennäköisyys. Bayesläinen todennäköisyystulkinta on nykyään varmaankin suosituin eri todennäköisyystulkinnoista — tosin aikanaan sitä pidettiin yleisesti epäilyttävänä. *Bayesläisessä tulkinnassa* todennäköisyys on "uskomuksen aste" ja se koskee väitteitä. Toisin sanoen väitteen todennäköisyys on sitä lähempänä ykköstä, mitä uskottavampana sitä pidetään.

Bayesläisyydestä esiintyy monia muotoja riippuen siitä, kuka on uskomisen subjekti. Esimerkiksi subjektiivisessa muodossa bayesläinen todennäköisyys on jokaiselle uskojalle omansa: kaksi eri henkilöä voi päätyä samoilla tiedoilla eri todennäköisyyksiin. Objektiivisen tulkinnan mukaan "rationaalisten uskojien" tulee samalla informaatiolla päätyä samoihin todennäköisyyksiin.

Käytännössä bayesläinen todennäköisyyslaskenta perustuu *priorin*, *uskottavuuden* ja *posteriorin*[2] yhdistämiseen *Bayesin kaavalla*: henkilöllä on priorinäkemys $\mathrm{P}(A)$ tapahtuman A todennäköisyydestä. Sitten sattuu tapahtuma E (evidenssi). Tällöin henkilön on päivitettävä priorinäkemyksensä $\mathrm{P}(A)$ posteriorinäkemykseksi $\mathrm{P}(A|E)$, missä tapahtuman E sattuminen on otettava huomioon. Päivittäminen onnistuu, jos henkilö pystyy määrittämään tapahtuman E uskottavuuden $\mathrm{P}(E|A)$

[2] 'Priori' tarkoittaa 'ennen', ja 'posteriori' tarkoittaa 'jälkeen'.

priorinäkemyksensä $\mathrm{P}(A)$ valossa. Nimittäin tällöin Bayesin kaava sanoo, että

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A|E) &= \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)}{\mathrm{P}(E)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(\mathrm{ei}A)\mathrm{P}(E|\mathrm{ei}A)}.\end{aligned}$$

Perustelemme bayesin kaavan myöhemmin tässä luvussa, ja annamme esimerkin kuinka sitä käytetään.

1.2. Esimerkki. Mitkä todennäköisyyskäsitteistä *klassinen*, *geometrinen*, *frekventistinen* tai *bayesläinen* (sen eri muodoissaan) sopivat seuraaviin todennäköisyyttä koskeviin väitteisiin?

(a) Todennäköisyys että nopanheitossa saadaan silmäluku 5 on $1/6$.
(b) Todennäköisyys että nopanheitossa saadaan silmäluku 5 on $1/5$.
(c) Dinosaurukset kuolivat sukupuuttoon todennäköisesti meteorin törmättyä maahan.
(d) Todennäköisyys että Kokoomus on Suomen suurin puolue vuoden 2008 kuntavaaleissa on $99{,}9\%$.
(e) Kolikkoa on heitetty 7 kertaa ja joka kerralla saatiin klaava. Todennäköisyys saada klaava seuraavallakin heitolla on $8/9$.
(f) Kolikkoa on heitetty 7 kertaa ja joka kerralla saatiin klaava. Todennäköisyys saada klaava seuraavallakin heitolla on 1.
(g) Kolikkoa on heitetty 7 kertaa ja joka kerralla saatiin klaava. Todennäköisyys saada klaava seuraavallakin heitolla on $1/2$.
(h) Todennäköisyys sille, että tikanheittäjä N.N. osuu täsmälleen napakymppiin seuraavalla heitolla on 0.

Kohtaan (a) soveltuu mitä ilmeisimmin symmetriaan perustuva *klassinen* tulkinta: nopassa on kuusi sivua ja noppa on symmetrinen. Siten jokainen sivu on yhtä todennäköinen, ja silmäluku 5 vastaa yhtä sivua. Siten kysytty todennäköisyys on $1/6$. Kohtaan (a) sopii kyllä myös bayesläinenkin tulkinta. Bayesläisen ajatus voisi mennä vaikka näin: “Minulla ei ole mitään muuta tietoa nopasta, kun että siinä on kuusi tahkoa. Otanpa käyttöön — ilman parempaa tietoa tulosmahdollisuuksien mahdollisista eroista — *tasaisen priorin*, eli ajattelen että jokainen tulosmahdollisuus on yhtä todennäköinen.”

Kohtaan (b) klassinen tulkinta ei oikein sovi, ellei kyseessä ole symmetrinen viisisivuinen noppa (onko sellaisia). Sen sijaan *frekventistinen* ja *bayesläinen* tulkinta tulevat kysymykseen. Frekventistinen tulkinta voi nousta esimerkiksi tapauksessa, jossa ko. noppaa on heitetty 15 kertaa ja 3 kertaa on saatu silmäluku 5. Vaikka saatu tulos on täysin mahdollinen — eikä edes tavattoman harvinainen — symmetrisen nopan tapauksessa antaa saatu tulos frekventistille pienen epäilyksen siitä, että noppa on painotettu. Bayesläinen tulkinta on voi nousta esimerkiksi yksinkertaisesti siitä syystä että valitaan erilainen priori kuin kohdassa (a). Itse asiassa bayesläinen tulkinta, varsinkin sen subjektiivinen muoto, on niin yleinen, että se sopii käytännössä kaikkiin mahdollisiin tapauksiin.

Kohtaan (c) on vaikea kuvitella muuta kuin *bayesläistä* tulkintaa, joka sopii kaikkiin tilanteisiin.

Kohta (d) ei juurikaan kaipaisi tulkintaa, jos väitetty todennäköisyys olisi 100%. Kyseessähän on mennyt tapahtuma, jonka tiedämme varmasti sattuneeksi. Ainoa tapa selittää todennäköisyys 99,9% on subjektiivinen *bayesläinen* tapa. Bayesläinen voi esimerkiksi ajatella seuraavasti: "On 0,1% todennäköisyys että Kokoomus ei oikeasti ollutkaan vaalien suurin puolue, vaan että me kaikki elämme jonkinlaisessa harhassa."

Kohtaan (e) sopii *bayesläinen* tulkinta. Itse asiassa esitetty luku 8/9 tulee nimenomaan bayesläisestä tavasta, kun käytetään "tasaista prioria" (luennoija selittää laskut pyynnöstä).

Kohtaan (f) sopii (ääri)*frekventistinen* tulkinta. Frekventisti on nähnyt 7 toiston toistokokeen, jossa jokaisessa on tullut klaava. Siis tapahtuma "seuraavallakin heitollatulee klaava" on frekventistin mielestä varma. Toki frekventisti ymmärtää, että 7 toistoa on vielä kohtalaisen pieni määrä — erityisesti se on paljon pienempi kuin $+\infty$, jonka frekventisti tarvitsee voidakseen täydellä varmuudella määrätä todennäköisyydet. Siispä frekventistin mielestä tapahtuma "seuraavallakin heitolla tulee klaava" on varma, mutta frekventisti ei ole kovin varma siitä.

Kohtaan (g) sopii *klassinen* tulkinta. Klassisisti ajattelee, että kolikko on symmetrinen ja siten todennäköisyys saada klaava on aina $1/2$. Saatu data — 7 klaavaa, eikä yhtään kruunaa — ei horjuttanut klassisistin uskoa kolikon symmetrisyyteen. Ehkä hän ajattelee seuraavasti: "Jos kolikko on reilu, eli klaavan todennäköisyys on $1/2$, niin todennäköisyys saada 7 klaavaa putkeen on $(1/2)^7 = 0{,}78\%$. Tämä on toki harvinaista, mutta ei erityisen epäuskottavaa."

Kohtaan (h) sopii *geometrinen* tulkinta sekä — kuten aina — *bayesläinen* tulkinta.

Todennäköisyyden laskusäännöt

Todennäköisyyden aksioomat. Oli todennäköisyyden tulkinta sitten mikä tahansa, sen on toteutettava seuraavat *Kolmogorovin aksioomat*:

Jos P on todennäköisyys, niin

Positiivisuus: jokaisen tapahtuman A todennäköisyys on ei-negatiivinen: $\mathrm{P}(A) \geq 0$,

Äärellisyys: varman tapahtuman todennäköisyys on yksi: $\mathrm{P}(\Omega) = 1$,

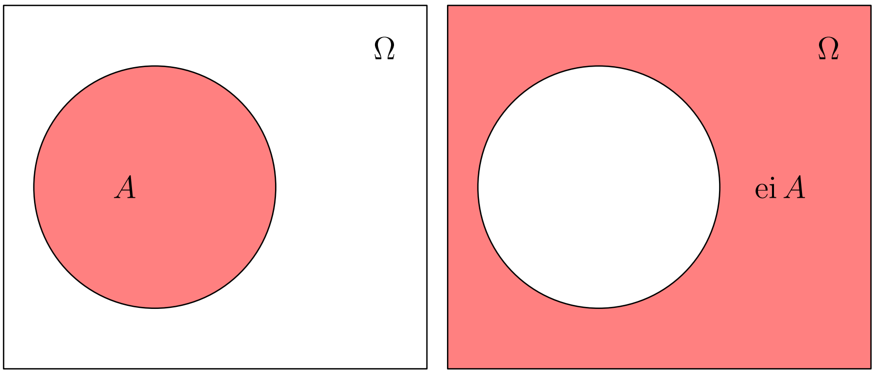
Täysadditiivisuus: todennäköisyydet summaantuvat, eli jos vain yksi tapahtumista $A_1, A_2, \ldots$ voi sattua, niin

$$\mathrm{P}(A_1 \text{ tai } A_2 \text{ tai } \cdots) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \cdots .$$

Esitämme seuraavaksi muutamia todennäköisyyden laskusääntöjä, jotka seuraavat loogisesti Kolmogorovin aksioomista ja havainnollistamme niitä *Venn-diagrammien* avulla.

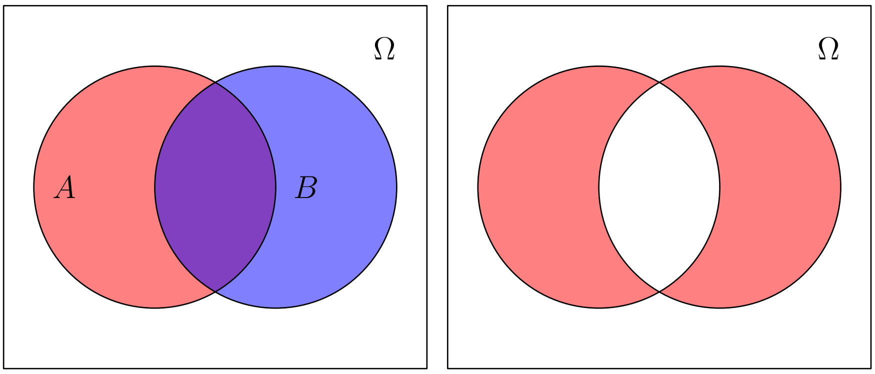
Komplementtikaava. Tapahtuman A *komplementille* ei$A$ pätee

$$\mathrm{P}(\mathrm{ei}A) = 1 - \mathrm{P}(A). \tag{1.3}$$



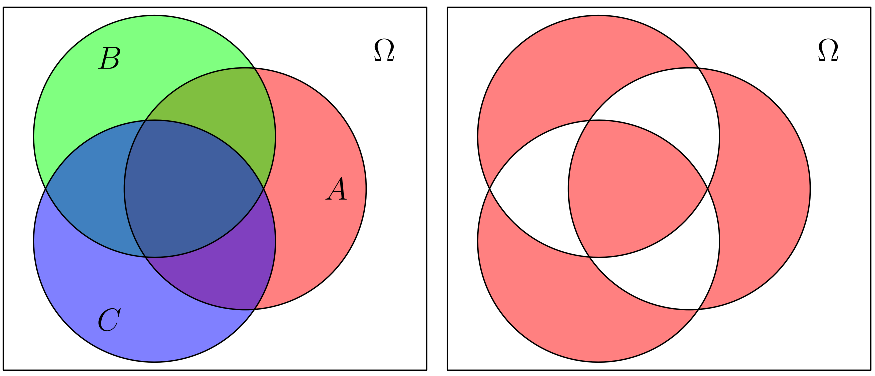
Summakavoja. Kahdelle tapahtumalle A ja B pätee *summakaava*

$$\mathrm{P}(A \text{ tai } B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \text{ ja } B). \tag{1.4}$$



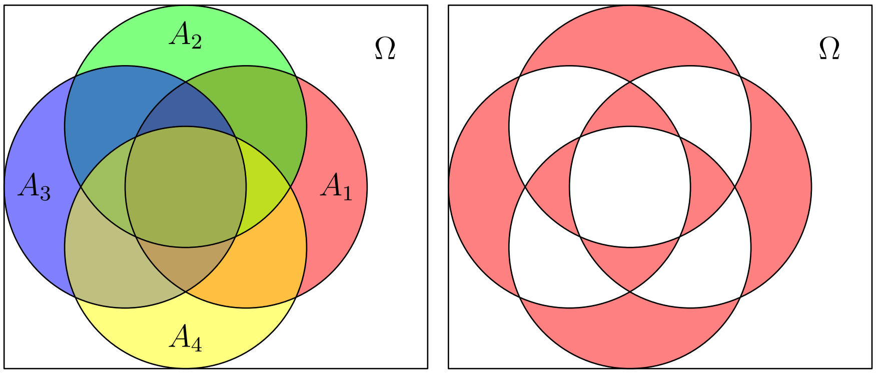
Kolmelle tapahtumalle A, B ja C pätee *summakaava*

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \text{ tai } B \text{ tai } C) &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) \\ &\quad - \mathrm{P}(A \text{ ja } B) - \mathrm{P}(A \text{ ja } C) - \mathrm{P}(B \text{ ja } C) \\ &\quad + \mathrm{P}(A \text{ ja } B \text{ ja } C). \end{aligned} \tag{1.5}$$



Neljälle tapahtumalle A_1, A_2, A_3 ja A_4 pätee *summakaava*

$$
\begin{aligned}
(1.6)\qquad & \mathrm{P}(A_1 \text{ tai } A_2 \text{ tai } A_3 \text{ tai } A_4) \\
= \;& \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) + \mathrm{P}(A_4) \\
& -\mathrm{P}(A_1 \text{ ja } A_2) - \mathrm{P}(A_1 \text{ ja } A_3) - \mathrm{P}(A_1 \text{ ja } A_4) \\
& \quad -\mathrm{P}(A_2 \text{ ja } A_3) - \mathrm{P}(A_2 \text{ ja } A_4) - \mathrm{P}(A_3 \text{ ja } A_4) \\
& +\mathrm{P}(A_1 \text{ ja } A_2 \text{ ja } A_3) + \mathrm{P}(A_1 \text{ ja } A_2 \text{ ja } A_4) \\
& \quad +\mathrm{P}(A_1 \text{ ja } A_3 \text{ ja } A_4) + \mathrm{P}(A_2 \text{ ja } A_3 \text{ ja } A_4) \\
& -\mathrm{P}(A_1 \text{ ja } A_2 \text{ ja } A_3 \text{ ja } A_4).
\end{aligned}
$$



Yleinen summakaava on nyt helppo arvata (mutta vaikea kirjoittaa):

$$
\begin{aligned}
(1.7)\qquad & \mathrm{P}(A_1 \text{ tai } \cdots \text{ tai } A_n) \\
= \;& \sum_i \mathrm{P}(A_i) - \sum_{i<j}\sum \mathrm{P}(A_i \text{ ja } A_j) \\
& + \sum\sum_{i<j<k}\sum \mathrm{P}(A_i \text{ ja } A_j \text{ ja } A_k) \\
& - \sum\sum_{i<j<k<\ell}\sum\sum \mathrm{P}(A_i \text{ ja } A_j \text{ ja } A_k \text{ ja } A_\ell) \\
& \qquad \vdots \\
& +(-1)^{n-1}\mathrm{P}(A_1 \text{ ja } \cdots \text{ ja } A_n).
\end{aligned}
$$

1.8. Esimerkki. Uurnassa on 3 valkoista palloa ja 7 mustaa palloa. Uurnasta nostetaan 2 palloa. Mikä on todennäköisyys, että molemmat nostetut pallot ovat valkoisia, kun

(a) pallot nostetaan samanaikaisesti,
(b) ensin nostetaan yksi pallo, tarkistetaan sen väri, palautetaan pallo uurnaan, ja sitten nostetaan toinen pallo.

Ratkaisemme esimerkin 1.8 ensin viittaamatta yleiseen (kombinatoriseen) teoriaan, ja sitten kerromme yleisestä kombinatorisesta viitekehyksestä.

Kohdassa (a) symmetriset alkeistapaukset ovat kaikki 2 pallon nostot $3+7=10$ pallon joukosta. Tulkitsemme jokaisen noston yhtä todennäköiseksi. Eri tapoja nostaa 2 palloa 10 pallon joukosta on 45 kappaletta. Nimittäin voimme *kuvitella* nostot kahdessa vaiheessa. Ensiksi nostamme yhden pallon. Meillä on 10 eri tapaa tehdä tämä, sillä palloja on 10. Sitten nostamme toisen pallon. Meillä on 9 eri tapaa tehdä tämä, sillä uurnassa on enää jäljellä 9 palloa. Siis jokaista 10 ensimmäistä nostoa kohden meillä on 9 toista nostoa. Yhteensä tämä tekee $10 \cdot 9 = 90$ erilaista nostoa. Koska kuitenkin perättäiset nostot olivat kuviteltuja, emme voi erottaa ensimmäistä ja toista nostoa toisistaan. Siten nosto "ensin a ja sitten b" näyttää samalta kuin nosto "ensin b ja sitten a". Näinollen eri nostoja on oikeasti vain $90/2 = 45$ kappaletta. Entä sitten suotuisat nostot? Kuinka monella tavalla voimme nostaa 2 valkoista palloa? *Kuvittelemalla* tilanne toistokokeeksi näemme, että ensimmäisellä nostolla uurnassa on 3 valkoista palloa. Voimme siis nostaa valkoisen pallon kolmella eri tavalla. Seuraavalla nostolla uurnassa on kaksi valkoista palloa jäljellä, sillä olemme jo nostaneet toisen valkoisen pallon sieltä. Siten toisella nostolla on siis kaksi nostaa valkoinen pallo. Yhteensä tämä tekee $3 \cdot 2 = 6$ tapaa nostaa kaksi valkoista palloa toistokokeessa. Koska kyseessä ei kuitenkaan ollut toistokoe joudumme jakamaan tuloksen samalta näyttävien toistojen lukumäärällä. Saamme $6/2 = 3$ tapaa. Siten kysytty todennäköisyys on

$$\frac{3}{45} \quad = \quad \frac{1}{15} \quad = \quad 6{,}667\%$$

Kohdassa (b) voimme ajatella tilannetta toistokokeena. Nimittäin koska nostettu pallo palautetaan takaisin uurnaan, pysyy uurna samanlaisena toiston jälkeen. Nyt ensimmäisellä nostolla todennäköisyys saada valkoinen pallo on $3/10$, sillä tapoja nostaa valkoinen pallo on 3 ja tapoja nostaa jokin pallo on $3+7=10$. Klassisen tulkinnan mukaan jokainen nosto on yhtä todennäköinen. Toisella nostolla tilanne on sama. Nyt ainoa tapa nostaa kaksi valkoista palloa on, että molemmilla nostoilla nostetaan valkoinen pallo. Siten kysytty todennäköisyys on, riippumattomien toistojen periaatteen nojalla,

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \quad = \quad \frac{9}{100} \quad = \quad 9\%.$$

Tarkastelemme sitten kohtia (a) ja (b) seuraavassa yleistetyssä viitekehyksessä: uurnassa on v valkoista palloa ja m mustaa palloa, nostamme n palloa, ja kysytty todennäköisyys on

> "Mikä on todennäköisyys, että nostamme k valkoista palloa?"

On selvää, että jos $k > v$, niin kysytty todennäköisyys on nolla. Siten jatkossa oletamme, että k on joko $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ v-1$ tai v.

Kohdan (a) yleinen tarkastelu: Ensiksi meidän on laskettava kaikkien mahdollisten alkeistapausten lukumäärä. Eli kuinka monta tapaa on nostaa n palloa joukosta, jossa on $m+v$ palloa? Tälle kombinatoriselle suureelle käytetään merkintää

$$\binom{m+v}{n}$$

ja se lausutaan "$m + v$ yli n:n". Tämä ei tietysti kerro paljoakaan siitä, miten ko. lukumäärä *lasketaan*. Kerromme nyt miten laskeminen onnistuu *kuvittelemalla*, että nostot tehdään peräkkäin toistokokeena. Aluksi voimme nostaa pallon $(m + v)$:llä eri tavalla. Seuraavaksi, nostolla nro 2, voimme nostaa pallon $(m+v-1)$:llä eri tavalla, sillä uurnassa on nyt $m+v-1$ palloa jäljellä. Nostolla nro 3 voimme nostaa pallon $(m+v-2)$:lla eri tavalla, jne. Siten n:llä nostolla voimme nostaa palloja

$$(v+m)(v+m - 1)(v+m - 2)\cdots(v+m - (n-1))$$

eri tavalla. Nyt kuitenkin pitää muistaa, että toistokoe oli puhtaasti kuviteltu. Emme näe n:n pituista jonoa nostoja, vaan n nostettua palloa. Siten jokainen saatu n:n pallon kokoelma voi vastata mitä tahansa tapaa laittaa n palloa jonoon. Eri tapoja laittaa n palloa jonoon on

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

kappaletta. Nimittäin ensimmäiseksi palloksi jonoon voidaan valita mikä tahansa n:stä eri pallosta. Toiseksi palloksi voidaan valita mikä tahansa $(n-1)$:stä jäljellä olevasta pallosta, jne. Tämä siis tarkoittaa, että[3]

$$\binom{m+v}{n} = \frac{(v+m)(v+m-1)(v+m-2)\cdots(v+m-n+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}. \tag{1.9}$$

Nyt tiedämme, miten $\binom{m+v}{n}$, joita myös *binomikertoimiksi* kutsutaan, lasketaan. Nyt siis tiedämme miten monta alkeistapausta on. Entäpä sitten suotuisat alkeistapaukset? Kuinka monta tapaa on valita k valkoista palloa, kun nostoja on n kappaletta, valkoisia palloja on v kappaletta, ja kaikkiaan palloja on $m + v$ kappalatta? Vastaus kysymykseen saadaan kuvittelemalla toisto: kuvittelemme, että ensiksi nostamme k valkoista palloa, ja sitten nostamme $n - k$ mustaa palloa. Koska jo tiedämme, kuinka monella eri tavalla nämä kaksi nostoa voidaan tehdä, voimme laskea kuinka monella tavalla nämä kaksi perättäistä nostoa voidaan tehdä:

$$\binom{v}{k}\binom{m}{n-k}.$$

Siispä vastaus kysymykseen

> "Mikä on todennäköisyys, että nostamme k valkoista palloa?"

on

$$\binom{v}{k}\binom{m}{n-k}\bigg/\binom{m+v}{n}. \tag{1.10}$$

Todennäköisyyksiä (1.10) kutsutaan *hypergeometriseksi jakaumaksi* parametrein $m+v$, v ja n ja se liittyy *otantaan ilman takaisinpanoa.*

---

[3]Usein näkee kaavaa

$$\binom{m+v}{n} = \frac{(m+v)!}{(m+v-n)!\,n!},$$

missä $n!$ on n:n *kertoma*:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

Tämä on vain toinen tapa esittää kaava (1.9).

Kohdan (b) yleinen tarkastelu: Tarkastelemme sitten tilannetta, jossa nostettu pallo palautetaan uurnaan noston jälkeen. Nyt tilanne on aito toistokoe. Jokaisella toistolla on symmetrian perusteella todennäköisyys $v/(m+v)$ nostaa valkoinen pallo. Siten todennäköisyys nostaa täsmälleen k valkoista palloa on

$$\binom{n}{k}\left(\frac{v}{m+v}\right)^k\left(\frac{m}{m+v}\right)^{n-k}. \tag{1.11}$$

Nimittäin joka ikisen n:n mittaisen jonon, jossa on täsmälleen k valkoista palloa todennäköisyys on

$$\left(\frac{v}{m+v}\right)^k\left(\frac{m}{m+v}\right)^{n-k},$$

ja erilaisia n:n mittaisia jonoja, joissa on täsmälleen k valkoista palloa on $\binom{n}{k}$ kappaletta.

Todennäköisyyksiä (1.11) kutsutaan *binomijakaumaksi* parametrilla $v/(m+v)$ ja se liittyy *otantaan takaisinpanolla.*

1.12. Esimerkki. [4] Marilyn vos Savant osallistuu seuraavaan peliin: Pelissä on kolme ovea A, B ja C. Yhden oven takana on 10.000 euroa, jonka Marilyn saa, jos arvaa oven oikein. Kahden muun oven takana ei ole mitään.

Marilyn valitsee oven A. Nyt peluuttaja Monty Hall avaa oven B, jonka takana ei ollut mitään. Monty Hall antaa Marilynille mahdollisuuden vaihtaa valitsemansa oven A oveksi C.

Kannattaako Marilynin vaihtaa ovea?

Entä kannattaako Marilynin vaihtaa siinä tapauksessa, että ovia on 29 kappaletta: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, Å, Ä, Ö, ja Monty Hall on avannut kaikki muut ovat paitsi oven C (ja tietysti oven A)?

Tarkastelemme aluksi kolmen oven tapausta. Käytämme oville nimiä 1, 2 ja 3, ja oletamme, että voitto-ovi on ovi 3. Marilyn ei luonnollisestikaan tiedä mitkä ovista A, B ja C ovat ovia 1, 2, ja 3. Mahdollisia tilanteita on nyt kolme:

1 Marilyn on alun perin valinnut tyhjän oven numero 1. Hänelle avataan tyhjä ovi numero 2.
2 Marilyn on alun perin valinnut tyhjän oven numero 2. Hänelle avataan tyhjä ovi numero 1.
3 Marilyn on valinnut voitto-oven numero 3, ja hänelle avataan jompikumpi tyhjistä ovista 1 tai 2.

Jokainen näistä kolmesta tilanteesta on symmetrian perusteella yhtä todennäköinen. Jos Marilyn päättää vaihtaa ovensa, hän ei valitse tietämäänsä tyhjää ovea, jolloin tilanne 1 ja tilanne 2 johtavat molemmat siihen että hän voittaa. Tilanteessa 3 hän kuitenkin menettää voittonsa. Ilman vaihtoa Marilynin voittomahdollisuus on siksi $1/3$ ja vaihdon jälkeen $2/3$.

[4] Tämä on kuuluisa Monty Hall -ongelma. Sen värikkäästä historiasta löytyy tietoa sivulta `www.marilynvossavant.com/articles/gameshow.html`.

Tarkastelemme sitten 29 oven tapausta. Tilanne on olennaisesti sama, kuin 3 oven tapauksessa, mutta radikaalimpi. Nimittäin nyt symmetrisiä tilanteita on 29 kappaletta

1 Marilyn on alun perin valinnut tyhjän oven numero 1. Hänelle avataan tyhjät ovet $2 \ldots 28$.

2 Marilyn on alun perin valinnut tyhjän oven numero 2. Hänelle avataan tyhjät ovet 1, $3 \ldots 28$.

n $(n = 3, \ldots, 28)$ Marilyn on alun perin valinnut tyhjän oven numero n. Hänelle avataan tyhjät ovet $2 \ldots (n-1)$, $(n+1) \ldots 28$.

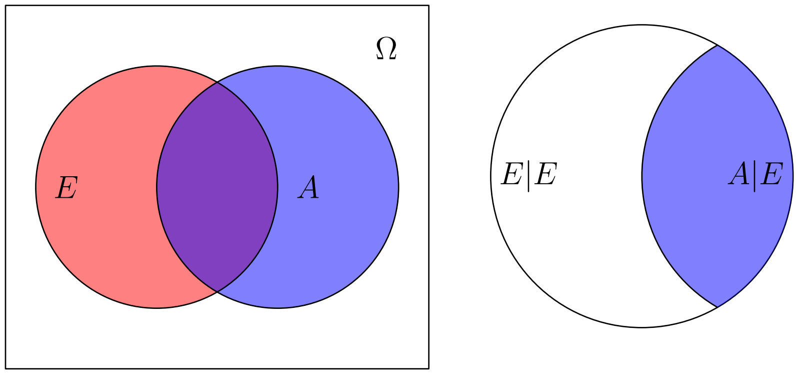
29 Marilyn on valinnut voitto-oven numero 29, ja hänelle näytetään joku 27 oven kokoelma tyhjistä 28 ovesta.

Siten Marilynin kannattaa vaihtaa, sillä vain tapauksessa numero 29 hän häviää, eli todennäköisyys että palkinto on vaihdetun oven takana on $28/29$.

Ehdollinen todennäköisyys. Tapahtuman A *ehdollinen todennäköisyys*, on todennäköisyys tapahtumalle A sillä ehdolla, että tapahtuman E *tiedetään* tapahtuneen (tai tapahtuvan). Ehdollinen todennäköisyys merkitään $\mathrm{P}(A|E)$, ja luetaan: "tapahtuman A todennäköisyys ehdolla E". Se määritellään kaavalla

$$\mathrm{P}(A \mid E) = \frac{\mathrm{P}(A \text{ ja } E)}{\mathrm{P}(E)}. \tag{1.13}$$

Jos ehtotapahtuman E todennäköisyys on 0, eli $\mathrm{P}(E) = 0$, niin $P(A|E)$ pitää määritellä tapauskohtaisesti.



Ehdollisen todennäköisyyden kaava (1.13) on yhtäpitävä *tulokaavan*

$$\mathrm{P}(A \text{ ja } B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A) \tag{1.14}$$

kanssa. Kaavan (1.14) havaitsee todeksi tulkitsemalla

$$\begin{aligned} & A \text{ ja } B \\ &= A \text{ sattuu ja } B \text{ sattuu} \\ &= \text{ensin sattuu } A \text{ ja sitten sattuu } B \\ &= \text{ensin sattuu } A \text{ ja sitten sattuu } B, \text{ kun tiedetään } A\text{:n sattuneen} \\ &= A \text{ ja } B|A. \end{aligned}$$

Ketjuttamalla tätä ajatusta näemme *yleisen tulokaavan*

$$
\begin{aligned}
(1.15)\qquad & \mathrm{P}(A_1 \text{ ja } \cdots \text{ ja } A_n) \\
&= \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2|A_1)\cdots\mathrm{P}(A_n|A_1 \text{ ja } \cdots \text{ ja } A_{n-1}).
\end{aligned}
$$

1.16. Esimerkki. Pekka ja Jukka päättävät pelata perjantai-illan ratoksi venäläistä rulettia. Yhteisen sopimuksen mukaan Pekka aloittaa, eli Pekka vetää liipaisimesta ensin. Rulettia pelataan kunnes peli päättyy luonnollisella traagisella tavallaan.

Onko peli reilu, kun

(a) rullaa pyöräytetään ennen jokaista liipaisimenvetoa,
(b) rullaa pyöräytetään ainoastaan ennen ensimmäistä liipaisimenvetoa?

Kohdassa (a) pitää ajatella loputonta laukausten sarjaa, sillä peli voi kestää periaatteessa loputtomasti — joskaan ei kannata laskea sen varaan, että kuolee vanhuuteen. Olkoot

$$
\begin{aligned}
A &= \text{“Pekka häviää”}, \\
A_n &= \text{“Pekka häviää kierroksella nro } n\text{”}.
\end{aligned}
$$

Tällöin

$$
\mathrm{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n).
$$

Ratkaistaan sitten todennäköisyys $\mathrm{P}(A_n)$. Selvästi $\mathrm{P}(A_1) = 1/6$. Entä $\mathrm{P}(A_2)$? Olkoon

$$
B_n = \text{“Jukka häviää kierroksella nro } n\text{”}.
$$

Nyt A_2 sattuu, jos ensiksi sattuu eiA_1, sitten sattuu eiB_1, ja sitten sattuu A_2. Siten

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_2) &= \mathrm{P}(\mathrm{ei}A_1 \text{ ja } \mathrm{ei}B_1 \text{ ja } A_2) \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{ei}A_1)\mathrm{P}(\mathrm{ei}B_1|\mathrm{ei}A_1)\mathrm{P}(A_2|\mathrm{ei}A_1 \text{ ja } \mathrm{ei}B_1) \\
&= 5/6 \cdot 5/6 \cdot 1/6.
\end{aligned}
$$

Samalla tavalla näemme, että

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_3) &= \mathrm{P}(\mathrm{ei}A_1 \text{ ja } \mathrm{ei}B_1 \text{ ja } \mathrm{ei}A_2 \text{ ja } \mathrm{ei}B_2 \text{ ja } A_3) \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{ei}A_1)\mathrm{P}(\mathrm{ei}B_1|\mathrm{ei}A_1)\mathrm{P}(\mathrm{ei}A_2|\mathrm{ei}A_1 \text{ ja } \mathrm{ei}B_1) \cdot \\
&\quad \mathrm{P}(\mathrm{ei}B_2|\mathrm{ei}A_1 \text{ ja } \mathrm{ei}B_1 \text{ ja } \mathrm{ei}A_2) \cdot \\
&\quad \mathrm{P}(A_3|\mathrm{ei}A_1 \text{ ja } \mathrm{ei}B_1 \text{ ja } \mathrm{ei}A_2 \text{ ja } \mathrm{ei}B_2) \\
&= 5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 \cdot 5/6 \cdot 1/6.
\end{aligned}
$$

Jatkamalla samalla tavalla näemme yleisen kuvion:

$$
\mathrm{P}(A_n) = (5/6)^{2(n-1)} \cdot 1/6.
$$

Siten käyttämällä *geometrisen sarjan* laskusääntöä

$$
\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad \text{kun } |q| < 1,
$$

saamme

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (5/6)^{2(n-1)} \cdot 1/6 \\
&= 1/6 \sum_{n=0}^{\infty} (5/6)^{2n} \\
&= 1/6 \sum_{n=0}^{\infty} (25/36)^{n} \\
&= 1/6 \cdot 1/(1-25/36) \\
&= 1/6 \cdot 36/11 \\
&= 6/11 \\
&> 1/2.
\end{aligned}$$

Siten peli ei ole reilu.

Kohdassa (b) kannattaa ajatella kuutta laukausta (enempää ei tarvita pelin loppuunsaattamiseksi). Mikäli luoti on pesässä laukauksella 1, 3, tai 5, kuolee Pekka. Mikäli luoti on pesässä laukauksella 2, 4 tai 6 kuolee Jukka. Koska luoti on rullan pyöräyttämisen jälkeen pesässä yhtä hyvin millä tahansaa laukauksista $1, 2, 3, 4, 5$ tai 6, peli on reilu.

Riippumattomuus. Tapahtumat $A_1, \ldots, A_n$ ovat *riippumattomia*, jos päätee *yksinkertainen tulokaava*

$$\mathrm{P}(A_{i_1} \text{ ja } \cdots \text{ ja } A_{i_m}) = \mathrm{P}(A_{i_1}) \cdots \mathrm{P}(A_{i_m}), \tag{1.17}$$

missä $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ on mikä tahansa osakokoelma joukoista $A_1, \ldots, A_n$.

Yleisen tulokaavan (1.15) nojalla näemme, että tapahtumien $A_1, \ldots, A_n$ riippumattomuus tarkoittaa sitä, että

$$\mathrm{P}(A_k | A_{i_1} \text{ ja } \cdots \text{ ja } A_{i_m}) = \mathrm{P}(A_k)$$

mille tahansa kokoelmalle $A_{i_1}, \ldots A_{i_m}$, joka ei tietenkään sisällä itse tapahtumaa A_k.

1.18. Esimerkki. Kolikkoa heitetään kaksi kertaa. Olkoot

$$\begin{aligned}
A &= \text{ensimäinen heitto antaa klaavan,} \\
B &= \text{toinen heitto antaa klaavan,} \\
C &= \text{heitot menevät eri päin.}
\end{aligned}$$

Esimerkin 1.18 tapahtumat A, B, C ovat pareittain riippumattomat:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \text{ ja } B) &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) &= 1/4, \\
\mathrm{P}(A \text{ ja } C) &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C) &= 1/4, \\
\mathrm{P}(B \text{ ja } C) &= \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C) &= 1/4.
\end{aligned}$$

Kolmikko A, B, C ei kuitenkaan ole riippumaton, sillä

$$1/8 \quad = \quad \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C) \quad \neq \quad \mathrm{P}(A \text{ ja } B \text{ ja } C) \quad = \quad 0.$$

Bayesin kaava. *Bayesin kaava* saadaan tulokaavoista

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_k \text{ ja } E) &= \mathrm{P}(A_k)\mathrm{P}(E|A_k),\\ \mathrm{P}(E \text{ ja } A_k) &= \mathrm{P}(E)\mathrm{P}(A_k|E)\end{aligned}$$

jakamalla oikeat puolet todennäköisyydellä $\mathrm{P}(E)$:

$$\mathrm{P}(A_k|E) = \frac{\mathrm{P}(A_k)\mathrm{P}(E|A_k)}{\mathrm{P}(E)}. \tag{1.19}$$

Kaavan (1.19) tekijöille on seuraavat tulkinnat

- $\mathrm{P}(A_k)$ on tapahtuman A_k *prioritodennäköisyys*,
- $\mathrm{P}(E|A_k)$ on tapahtuman E *uskottavuus* priorin $\mathrm{P}(A_k)$ vallitessa,
- $\mathrm{P}(A_k|E)$ on tapahtuman A_k *posterioritodennäköisyys* evidenssin E valossa.

Kokonaistodennäköisyyden kaava. Joskus todennäköisyys $\mathrm{P}(E)$ on vaikea laskea suoraan. Tällöin voidaan käyttää *kokonaistodennäköisyyden kaavaa*

$$\mathrm{P}(E) = \sum_j \mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(E|A_j), \tag{1.20}$$

missä A_j:t ovat sellaisia tapahtumia, että täsmälleen yksi niistä sattuu. Yhdistämällä kokonaistodennäköisyyden kaavan (1.20) Bayesin kaavaan (1.19) saamme kaavan

$$\mathrm{P}(A_k|E) = \frac{\mathrm{P}(A_k)\mathrm{P}(E|A_k)}{\sum_j \mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(E|A_j)}, \tag{1.21}$$

jota myös kutsutaan *Bayesin kaavaksi.*

1.22. Esimerkki. Työpaikalla järjestetään huumetesti. Testi on 99% varma. Toisin sanoen vain 1% huumeenkäyttäjistä jää paljastumatta ja vain 1% niistä, jotka eivät käytä huumeita antavat väärän positiivisen. Oletamme, että noin yksi kymmenestä tuhannesta ihmisestä käyttää huumeita.

Työntekijä Pekka menee huumetestiin ja saa positiivisen tuloksen (ja mitä todennäköisimmin potkut). Mikä on todennäköisyys, että Pekka on huumeidenkäyttäjä?

Olkoot

$$\begin{aligned}A &= \text{“Pekka on huumeidenkäyttäjä”},\\ E &= \text{“huumetestistä tuli positiivinen tulos Pekalle”}.\end{aligned}$$

Kysytty todennäköisyys on $\mathrm{P}(A|E)$. Tyypillinen ajatusvirhe tässä ongelmassa on vastata todennäköisyydellä $\mathrm{P}(E|A) = 99\%$. Tätä ei kuitenkaan kysytty! Todennäköisyys $\mathrm{P}(A|E)$ voidaan laskea käyttämällä Bayesin kaavaa

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A|E) &= \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)}{\mathrm{P}(E)}\\ &= \frac{0{,}0001 \cdot 0{,}99}{\mathrm{P}(E)}\\ &= \frac{0{,}000099}{\mathrm{P}(E)}. \qquad (1.23)\end{aligned}$$

Jotta kaavaa (1.23) voitaisiin käyttää tulee meidän määrätä todennäköisyys $\mathrm{P}(E)$. Kokonaistodennäköisyyden kaavan nojalla

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E) &= \mathrm{P}(E \text{ ja } A) + \mathrm{P}(E \text{ ja ei} A) \\ &= \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A) + \mathrm{P}(\text{ei}A)\mathrm{P}(E|\text{ei}A) \\ &= 0{,}0001 \cdot 0{,}99 + 0{,}9999 \cdot 0{,}01 \\ &= 0{,}010098.\end{aligned}$$

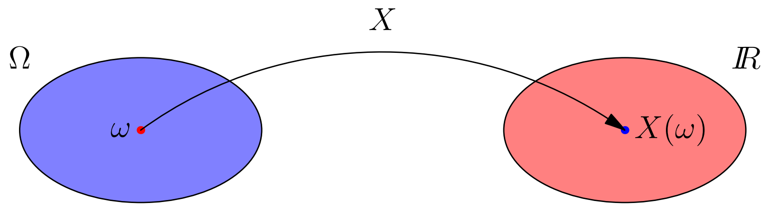
Sijoittamalla tämä kaavaan (1.23) saamme

$$\mathrm{P}(A|E) \quad = \quad 0{,}0098039 \quad = \quad 0{,}1\%.$$

Siis vaikka testi on 99% varma, niin Pekka mitä luultavimmin ei ole huumeidenkäyttäjä! Syy pieneen todennäköisyyteen olla huumeidenkäyttäjä positiivisella testituloksella on huumeidenkäyttäjien pieni osuus populaatiosta. Siten suurin osa positiivistista testituloksista (yli 99%) on vääriä positiivisia.

Satunnaismuuttujat

Satunnaismuuttuja X on satunnaiskokeen tulos. Satunnaismuuttuja on siis funktio otosavaruudelta Ω.



Tarkastelemme ainoastaan diskreettejä satunnaismuuttujia. Satunnaismuuttuja on diskreetti, jos sen maalijoukko, eli mahdollisten arvojen joukko, on numeroituva joukko $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Toinen tapa määritellä diskreetti satunnaismuuttuja on vaatia, että se saa jokaisen mahdollisen arvonsa (aidosti) positiivisella todennäköisyydellä.

Jakauma. Satunnaismuuttujan X *jakauma* $\mathrm{P}_X(x)$ kertoo sen tulosmahdollisuuksien todennäköisyydet:

$$\mathrm{P}_X(x) = \mathrm{P}(X = x).$$

1.24. Esimerkki. Kahta (kuusisivuista ja symmetristä) noppaa heitetään. Olkoon $X =$ "silmälukujen summa".

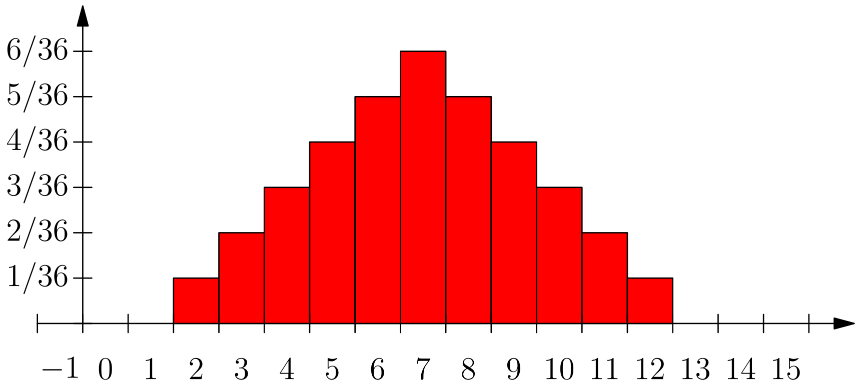
Esimerkin 1.24 X on satunnaismuuttuja. Voimme esimerkiksi mallittaa $\Omega = \{(i,j); i,j = 1,2,3,4,5,6\}$ ja $X(i,j) = i + j$. Satunnaismuuttuja X jakauma on

$$\mathrm{P}_X(2) = 1/36,\ \mathrm{P}_X(3) = 2/36,\ \mathrm{P}_X(4) = 3/36,\ \mathrm{P}_X(5) = 4/36,$$

$$\mathrm{P}_X(6) = 5/36,\ \mathrm{P}_X(7) = 6/36,\ \mathrm{P}_X(8) = 5/36,\ \mathrm{P}_X(9) = 4/36,$$

$$\mathrm{P}_X(10) = 3/36,\ \mathrm{P}_X(11) = 2/36,\ \mathrm{P}_X(12) = 1/36,$$

ja $\mathrm{P}_X(x) = 0$ kaikilla muilla x. Esimerkin 1.24 jakauma voidaan esittää kuvana



Usein satunnaismuuttuja X on — kuten esimerkin 1.24 tapauksessa — $\mathbb{N}$-arvoinen. Tällöin (ja usein muulloinkin) merkitsemme lyhyesti

$$p_n \quad = \quad \mathrm{P}_X(n) \quad = \quad \mathrm{P}(X = n).$$

Odotusarvo. Satunnaismuuttujan X *odotusarvo* $\mathrm{E}(X)$ on sen todennäköisyyksin painotettu keskiarvo

$$\mathrm{E}(X) = \sum_x x\,\mathrm{P}_X(x).$$

Mediaani. Karkeasti ottaen mediaani jakaa jakauma kahteen yhtä suureen osaan siten, että puolet jakaumasta on mediaania pienempää ja puolet mediaania suurempaa.

Satunnaismuuttujan X *mediaani*, eli keskiverto, m on

$$m = \max\{x \;;\; \mathrm{P}(X \le x) \le 1/2\}.$$

Fraktiilit. Fraktiilit muodostavat satunnaismuuttujan todennäköisyyksien kertymäfunktion käänteisfunktion.

Satunnaismuuttujan X q*-fraktiili* x_q on

$$x_q = \max\{x \;;\; \mathrm{P}(X \le x) \le q\}.$$

Mediaani on siis $1/2$-fraktiili.

Moodi. Satunnaismuuttujan X *moodi*, eli tyyppiarvo, mikä tahansa luku m, jolle $\mathrm{P}_X(m)$ maksimoituu. Moodi on siis satunnaiskokeen X todennäköisin — eli tyypillisin — arvo.[5]

Varianssi. Varianssi kuvastaa jakauman hajontaa sen odotusarvo ympärillä: mitä enemmän varianssia sitä enemmän hajontaa, eli satunnaisuutta.

[5] Sivumennen sanoen, moodi lienee hyödyttömin kaikista jakaumien tunnusluvuista.

Satunnaismuuttujan X *varianssi* $\mathrm{Var}(X)$ on

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}\left(\left(X-\mathrm{E}(X)\right)^2\right) \\ &= \sum_x \left(x - \sum_y y \mathrm{P}_X(y)\right)^2 \mathrm{P}_X(x) \\ &= \sum_x x^2\,\mathrm{P}_X(x) - \left(\sum_x x - \mathrm{P}_X(x)\right)^2 \\ &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2.\end{aligned}$$

Esimerkin 1.24 satunnaismuuttujan odotusarvo on

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} + 6\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} \\ &\quad +8\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36} + 10\cdot\frac{3}{36} + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} \\ &= 7.\end{aligned}$$

Esimerkin 1.24 satunnaismuutujan X mediaani ja moodi ovat myös 7. Varianssiksi saamme

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= (2-7)^2\cdot\frac{1}{36} + (3-7)^2\cdot\frac{2}{36} + (4-7)^2\cdot\frac{3}{36} \\ &\quad + (5-7)^2\cdot\frac{4}{36} + (6-7)^2\frac{5}{36} + (7-7)^2\cdot\frac{6}{36} \\ &\quad + (8-7)^8\frac{5}{36} + (9-7)^2\cdot\frac{4}{36} + (10-7)^2\cdot\frac{3}{36} \\ &\quad + (11-7)^2\cdot\frac{2}{36} + (12-7)^2\cdot\frac{1}{36} \\ &= 2{,}9167.\end{aligned}$$

1.25. Esimerkki. 80% suomalaisista uskoo olevansa keskimääräistä suomalaista köyhempiä. Miten tämä on mahdollista?

Suurin osa suomalaisista uskoo olevansa keskimääräistä parempia autoilijoita. Miten tämä on mahdollista?[6]

Esimerkin 1.25 keskeinen ajatus on *mediaanin*, ja *keskiarvon* (sekä *moodin*) erot.

Tarkastelemme aluksi ensimmäistä uskomusta. Väite

> "80% suomalaisista uskoo olevansa keskimääräistä suomalaista köyhempiä."

saattaa olla totta tai saattaa olla olematta: mikäänhän ei sinänsä rajoita ihmisten uskomuksia. Mielenkiintoisemmaksi tilanne muuttuu, kun tarkastelemme uskomusten sijasta väitettä

[6] Esimerkissä 1.25 ei esiinny satunnaismuuttujia. Esimerkki voidaan kuitenkin tulkita satunnaismuuttujan X = "umpimähkään valittu suomalainen" avulla. Tällöin väitteet ovat: todennäköisyydellä 80% umpimähkään valittu suomalainen uskoo olevansa keskimääräistä umpimähkään valittua suomalaista köyhempi ja todennäköisyydellä, joka on suurempi kuin 50% umpimähkään valittu suomalainen uskoo olevansa keskimääräistä umpimähkään valittua suomalaista parempi autoilija.

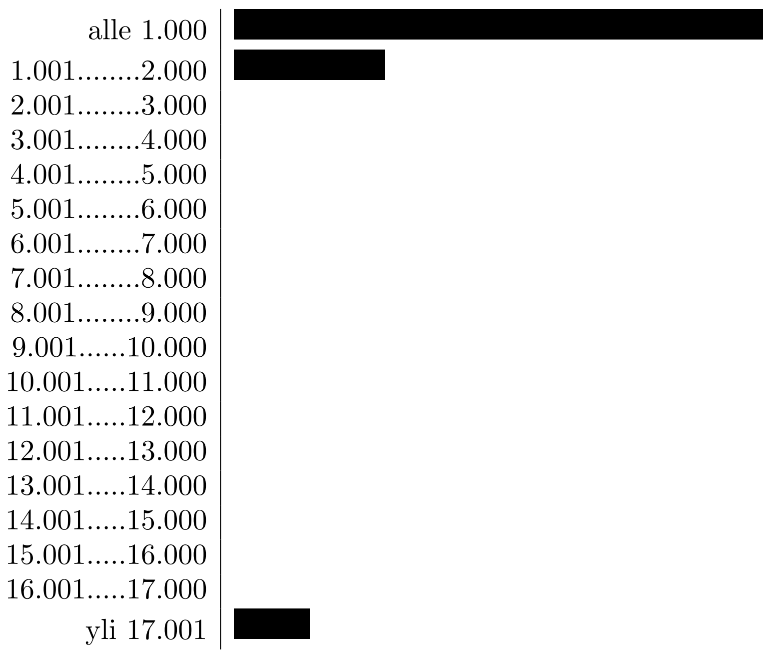
> “80% suomalaisista *ovat* keskimääräistä suomalaista köyhempiä.”

Aluksi tämä väite saattaa tuntua ristiriitaiselta, mutta se saattaa itse asiassa olla totta! Ainakaan siinä ei ole mitään loogista ristiriitaa. Perustelemme nyt miksi em. väite saattaa olla totta.

Tilastokeskuksen mukaan vuonna 2006 kotitalouksien luokitellut keskimääräiset omaisuustulot[7] olivat

Luokka	Omaisuustulot	Graafinen esitys
I	144	
II	214	
III	318	
IV	426	
V	508	
VI	611	
VII	779	
VIII	1.049	
IX	1.759	
X	17.283	

Eli arvio itse jakaumasta (luokiteltu jakauma) on



[7]Omaisuustulojen samaistaminen rikkauteen tai henkilöiden samaistaminen kotitalouksiin ei ole täysin perusteltua, mutta tarkoitus on vain antaa esimerkki — ei tehdä luotettava katsaus Suomen varallisuuden jakautumasta.

Luokkataulukosta arvioimme, että suomalaisten kotitalouksien omaisuustulojen keskiarvo on

$$\begin{aligned} &\frac{144+214+318+426+508+611+779+1.049+1.759+17.283}{10} \\ &= 2.309 \end{aligned}$$

Siten tämän aineiston valossa 80% (itse asiassa 90%) suomalaisista todellakin ovat keskimääräistä köyhempiä.

Mitä autoilijoihin tulee, niin ei ole mitään loogista ristiriitaa siinä, että suurin osa suomalaisista on keskimääräistä suomalaista parempia autoilijoita. Sen sijaan väite ei todennäköisesti pidä paikkaansa, sillä muutamat ammattiautoilijat ovat luultavasti niin paljon parempia kuin suurin osa autoilijoista, että tyypillinen suomalainen autoilija on luultavasti paljon keskimääräistä autoilijaa huonompi. Tässä siis tarkasteltiin väitettä

> "Suurin osa suomalaisista *autoilijoista* on keskimääräistä suomalaista autoilijaa parempi autoilija",

ja argumentoitiin, että ko. väite saattaa hyvinkin olla epätotta. Sen sijaan väite

> "Suurin osa suomalaisista on keskimääräistä suomalaista parempia autoilijoita"

saattaa hyvinkin olla totta. Nimittäin Suomessa on merkittävä — mutta silti riittävän pieni — joukko ihmisiä, jotka ovat todella älyttömän huonoja autoilijoita (lapset ja imeväiset).

Harjoitustehtäviä lukuun 1

1.1. Harjoitustehtävä. Mitkä todennäköisyystulkinnat sopivat seuraaviin väitteisiin?

(a) Todennäköisyys että kolikonheitossa saadaan lopulta klaava on 1.
(b) Pokerikäsi "3 ässää" on todennäköisempi kuin pokerikäsi "4 ässää".
(c) Maija on todennäköisesti Mattia parempi tekemään päätöksiä epävarmuuden vallitessa.
(d) Todennäköisyys että isä on poikaa pidempi on $0{,}39$.
(e) Ruotsi on todennäköisesti Suomea parempi jääkiekossa.
(f) Todennäköisyys että Vaasan Sport voittaa SM-liigan vuonna 2025 on $0{,}08$.

1.2. Harjoitustehtävä. Sadistinen miljonääri tarjoaa arpalippuja (ilmaiseksi). Arpajaisista on neljä versiota:

(i) Arpalippuja on 1.000.000 kappaletta. Arpalipuista 999.999 on sellaisia, että sadistinen miljonääri antaa lipun haltijalle 1.000 euroa, mutta yksi lipuista on sellainen, että lipun haltija joutuu kokemaan tuskallisen kuoleman sadistisen miljonäärin käsissä (kidutus kestää kaksi tuntia).
(ii) Sadistinen miljonääri muuttaa panoksia: arpalippuja on 100.000 kappaletta, joista 1 johtaa tuskalliseen kidutuskuolemaan kuten

kohdassa (i), mutta 99.999 arpalippua antaa haltijalleen 10.000 euroa.

(iii) Sadistisen miljonäärin panokset vaan kovenee: nyt on jaossa 10.000 arpalippua, joista 1 johtaa tuskalliseen kidutuskuolemaan kuten kohdassa (i), mutta 9.999 arpalippua antaa haltijalleen 100.000 euroa.

(iv) Nyt sadistisella miljonäärillä on tosi kovat panokset: jaossa on vain 1.000 arpalippua, joista 1 johtaa tuskalliseen kidutuskuolemaan kuten kohdassa (i), mutta loput 999 arpalippua antaa haltijalleen 1.000.000 euroa.

Kysymme:

(a) Antti Ahnas haluaa voittaa 1.000.000 euroa. Mihinkä sadistisen miljonäärin arpajaisista (i), (ii), (iii) tai (iv) kannattaa Antti Ahnaan osallistua?
(b) Mihin arpajaisiin itse osallistuisit ja kuinka monella lipulla? Jos et mihinkään, niin miksi et? Kuinka suurena pidät sadistisen miljonäärin tarjoamaa kidutuskuoleman riskiä verrattuna riskiin kuolla tuskallisesti tänä vuonna?

1.3. Harjoitustehtävä. [8] n avioparia osallistuu parinvaihtopippaloihin, jossa uudet parit arvotaan umpimähkään. Mikä on todennäköisyys, että vähintään yksi arvottu pari on aviopari, kun

(a) $n = 2$,
(b) $n = 3$,
(c) $n = 4$,
(d) $n = 40$,
(e) $n = 400$,
(f) $n = 400.000$?

1.4. Harjoitustehtävä. Anna esimerkki satunnaismuuttujasta, jolla

(a) mediaani on pienempi kuin odotusarvo,
(b) mediaani on suurempi kuin odotusarvo,
(c) on useita moodeja,
(d) sekä moodi, mediaani että odotusarvo ovat eri kohdissa,
(e) varianssi on nolla.

Voit antaa esimerkit puhtaasti matemaattisina, mutta mieti myös luonnollisia esimerkkejä.

1.5. Harjoitustehtävä. Pörssissä on käsitteet *karhu* (bear) ja *sonni* (bull). Sanotaan, että on karhumarkkinat, jos uskotaan osakkeiden hintojen laskevan. Jos taas uskotaan, että osakkeiden hinnat nousevat, sanotaan että on sonnimarkkinat.

Pörssisijoittaja N. N. Taleb on juuri ostanut suuren määrän osakkeita. Hänen kollegansa uskovat, että N. N. Taleb uskoo markkinoiden olevan sonnivaiheessa. Kysyttäessä N. N. Taleb kuitenkin vastaa, että hän uskoo

[8] Tämä on kuuluisa *Recontre-ongelma*.

että on 80% todennäköisyys, että osakkeiden hinnat laskevat tulevaisuudessa. "Olet siis muuttanut mielesi!", kommentoivat kollegat. "Uskot siis karhumarkkinoihin. Nyt kai myyt osakkeesi nopeasti". "En suinkaan", sanoo N. N. Taleb, "Uskon karhumarkkinoihin, mutta silti katson että osakkeita kannattaa ostaa." N. N. Taleb katsoo olevansa rationaalinen. Kuinka tämä on mahdollista?

1.6. Harjoitustehtävä. Kurssin *ORMS2020: Päätöksenteko epävarmuuden vallitessa* loppukoe koostuu monivalintatehtävistä. Kokeen suunnittelija, professori S., ei halua päästää kurssista läpi hannuhanhia, jotka eivät oikeasti osaa päätöksentekoa epävarmuuden vallitessa. Kuinka professori S.:n tulee laatia monivalintakoe?

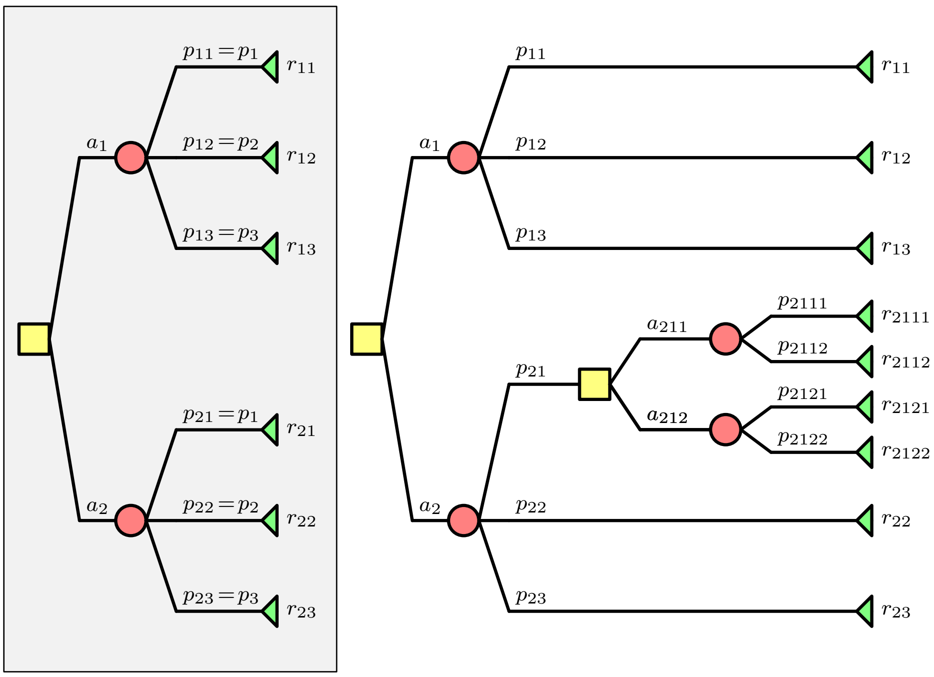
1.7. Harjoitustehtävä. Dosentti K.:lle on tarjottu Nikolaigradin ylpistöstä kahta professuuria: talousmatematiikan proessuuria sekä estetiikan ja vertailevan erotiikan professuuria. Dosentti K. haluaa jossain vaiheessa uraansa päätyä Nikolaigradin ylpistön rehtoriksi. Nikolaigradin ylpistössä rehtori valitaan professorien keskuudesta. Ylpistön historian aikana on ollut yhdeksän rehtoria, joista kaksi on ollut talousmatematiikan professoreja. Estetiikan ja vertailevan erotiikan professoria ole koskaan valittu rehtoriksi. Professoreja Nikolaigradin ylpistössä on viisikymmentä. Jos urakehitystä ei oteta huomioon, niin Dosentti K. olisi mieluummin estetiikan ja vertailevan erotiikan professori kuin talousmatematiikan professori. Kumman tarjotuista professuureista dosentti K.:n kannattaa ottaa vastaan?

Päätösmatriisit

Tarkastelemme päätösongelmia, jotka ovat *staattisia* siinä mielessä, että päätös tehdään vain kerran, ja sen jälkeen katsotaan seuraukset. Päätöksenteossa ei siis ole aikaulottuvuutta eli *dynamiikkaa*.

Päätöksentekija valitsee päätöksen joukosta $A = \{a_i\,;\, i = 1, \dots, k\}$. Sitten jokin maailmantila joukosta, eli otosavaruudesta, $\Omega = \{\omega_j\,;\, j = 1, \dots, n\}$ tapahtuu. Päätöksen a_i seuraukseen liittyy siis satunnaisuutta. Se on siis satunnaiskokeen tulos — eli satunnaismuuttuja. Jos päätös oli a_i ja tapahtui ω_j, niin saadaan palkkio r_{ij}. Toisin sanoen päätöksen a_i tulos on — kun samaistamme päätöksen siitä seuraavaan palkkioon — $a_i(\omega_j) = r_{ij}$. Matriisi $R = [r_{ij}]$ on *palkkio- eli päätösmatriisi*. Maailmantila eli alkeistapaus ω_j tapahtuu todennäköisyydellä p_j, eli $p_j = \mathrm{P}(\omega_j) = \mathrm{P}(a_i = r_{ij})$.

Kuvallisesti tämä staattinen päätösasetelma tarkoittaa seuraavan kuvan vasemman puolen puun kaltaista tilannetta (neliö tarkoittaa päätöstä ja ympyrä tarkoittaa sattumaa; kylkikolmio tarkoittaa tarkastelun loppua).



Yllä siis vasemmanpuoleinen puu kuvastaa staattista tilannetta, jossa tehdään yksi päätös — a_1 tai a_2 — ja sitten katsotaan, mikä palkkio saadaan, eikä päätös vaikuta tapahtumien todennäköisyyksiin mitenkään. Oikeanpuoleinen puu taas kuvastaa dynaamista tilannetta, jossa päätös a_2 voi johtaa uuteen päätöstilanteeseen, jossa on uudet aikaisemmista päätöksistä riippuvat todennäköisyydet. Tällaisia dynaamisia päätöstilanteita käsittelemme seuraavassa luvussa 3.

Staattisessa tapauksessa päätöksentekijä haluaa maksimoida päätöksen a_i arvon $V(a_i)$: hän valitsee sen päätöksen a_{i^*}, jolle arvo $V(a_{i^*})$ on suurin:

$$V(a_{i^*}) \quad = \quad \max_i V(a_i)$$

eli

$$i^* \quad = \quad \operatorname*{argmax}_i V(a_i).$$

Eri tavat muodostaa *arvofunktio* V vastaavat eri päätössääntöjä. Jos V:n määrittelyssä käytetään ainoastaan palkkioita r_{ij}, mutta ei todennäköisyyksiä p_j, niin sääntö V on *ei-stokastinen*. Mikäli määrittelyssä käytetään myös todennäköisyyksiä p_j sääntö V on *stokastinen*.

2.1. Esimerkki. Sijoittaja R. — joka ei usko hajauttamiseen, vaan haluaa munansa yhteen koriin — haluaa sijoittaa tasan yhteen neljästä kohteesta:

a_1 = pankkitalletus,
a_2 = valtion obligaatio,
a_3 = vanhan vakavaraisen yrityksen osake,
a_4 = uuden riskialttiin, mutta lupaavan yrityksen osake.

Sijoittaja R. arvelee, että jokin skenaarioista

ω_1 = karhumarkkinat,
ω_2 = tasainen nykymeno,
ω_3 = sonnimarkkinat,

toteutuu ja että jokainen skenaario on yhtä todennäköinen. Eri sijoitusten vuotuiset tuottoprosentit eri skenaarioissa ovat

$$R \quad = \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 5 \\ -10 & 2 & 8 \\ -50 & 3 & 30 \end{bmatrix}.$$

Ei-stokastisia sääntöjä

Tarkastelemme tässä osiossa päätössääntöjä, jotka ovat riippumattomia todennäköisyyksistä p_j.

Pessimisti. *Pessimisti* (Maximin) haluaa tehdä parhaan mahdollisen päätöksen huonointa mahdollista tilannetta varten:

$$V(a_i) \quad = \quad \min_j r_{ij}.$$

Pessimistin valinnalle a_{i^*} pätee

$$V(a_{i^*}) \quad = \quad \max_i \min_j r_{ij}.$$

Tästä nimi Maximin-sääntö.

Esimerkissä 2.1 pessimistinen R. arvottaa

$$V(a_1) = -1,\ V(a_2) = -5,\ V(a_3) = -10 \ \text{ ja } \ V(a_4) = -50.$$

Siten pessimistinen R. valitsee a_1:n.

Optimisti. *Optimisti* (Maximax) haluaa tehdä parhaan mahdollisen päätöksen parhainta mahdollista tilannetta varten:

$$V(a_i) \quad = \quad \max_j r_{ij}.$$

Optimistin valinnalle a_{i^*} pätee

$$V(a_{i^*}) \quad = \quad \max_i \max_j r_{ij}.$$

Tästä nimi Maximax-sääntö.

Esimerkissä 2.1 optimistinen R. arvottaa

$$V(a_1) = -1,\ V(a_2) = 5,\ V(a_3) = 8 \ \text{ ja } V(a_4) = 30.$$

Siten optimistinen R. valitsee a_4:n.

Katumuksen kaihtaja. *Katumuksen kaihtaja* (Minimax Regret) haluaa *minimoida* katumuksen

$$\begin{aligned} k_{ij} &= r_j^* - r_{ij} \\ &= \max_i r_{ij} - r_{ij}, \end{aligned}$$

kun on valittu a_i ja ω_j toteutuu. Yllä siis $r_j^* = \max_i r_{ij}$ vastaa palkkiota, joka olisi saatu, jos olisi tiedetty, että maailmantila ω_j sattuu ja valittu sitä vastaava paras mahdollinen päätös $a_{i^*(j)}$. Päätöstä a_i vastaava suurin mahdollinen katumus on

$$K(a_i) \quad = \quad \max_j k_{ij}$$

Valitaan päätös a_{i^*}, jolla katumus $K(a_i)$ minimoituu:

$$K(a_{i^*}) \quad = \quad \min_i \max_j k_{ij}.$$

Tästä nimi Minimax Regret-sääntö.

Katumuksen karttaminen on myös riemastuksen rakastamisena. Jos k_{ij} on katumus, niin $\ell_{ij} = -k_{ij}$ on riemastus. Päätöksentekijä varautuu pienimpään mahdolliseen riemastukseen

$$V(a_i) \quad = \quad \min_j \ell_{ij}.$$

Valinnalle a_{i^*}, joka maksimoi pienimmän mahdollisen riemastuksen pätee

$$\begin{aligned} V(a_{i^*}) &= \max_i \min_j \ell_{ij} \quad = \quad \max_i \left(- \max_j \left(- \ell_{ij} \right) \right) \\ &= \max_i \left(- \max_j k_{ij} \right) \quad = \quad - \min_i \max_j k_{ij} \\ &= -K(a_{i^*}). \end{aligned}$$

Esimerkissä 2.1 sijoittaja R.:n katumusmatriisi on

$$K = \begin{bmatrix} -1-(-1) & 3-(-1) & 30-(-1) \\ -1-(-5) & 3-0 & 30-5 \\ -1-(-10) & 3-2 & 30-8 \\ -1-(-50) & 3-3 & 30-30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 31 \\ 4 & 3 & 25 \\ 9 & 2 & 22 \\ 49 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suurimmat mahdolliset katumukset ovat

$$K(a_1) = 31,\ K(a_2) = 25,\ K(a_3) = 22 \text{ ja } K(a_4) = 49.$$

Katumusta kaihtavan R.:n valinta: a_3.

Hurwiczin sääntö. *Hurwiczin päätössääntö* on $w\cdot$Maximax + $(1-w)\cdot$Maximin eli

$$V(a_i) = w \max_j r_{ij} + (1-w) \min_j r_{ij},$$

missä $w \in [0,1]$ on päätöksentekijän *optimismin mittari.* Jos $w = 1$ tämä on Maximax-sääntö, jos $w = 0$ tämä on Maximin-sääntö.

Esimerkissä 2.1 "realistisella" sijoittaja R.:llä on $w = 0{,}5$. Hän arvottaa

$$\begin{aligned} V(a_1) &= 0{,}5\cdot(-1) + 0{,}5\cdot(-1) = -1, \\ V(a_2) &= 0{,}5\cdot(-5) + 0{,}5\cdot 5 = 0, \\ V(a_3) &= 0{,}5\cdot(-10) + 0{,}5\cdot 8 = -1, \\ V(a_1) &= 0{,}5\cdot(-50) + 0{,}5\cdot 30 = -10. \end{aligned}$$

"Realistin" valinta: a_2.

Stokastisia sääntöjä

Tarkastelemme tässä osiossa päätössääntöjä, joissa todennäköisyydet p_j on otettava huomioon.

Odotusarvosääntö. *Odotusarvosääntö* (MaxiE), eli riskineutraali sääntö, tarkoittaa sitä, että arvotetaan odotusarvojen mukaan:

$$V(a_i) = \mathrm{E}(a_i) = \sum_j r_{ij}\, p_j.$$

Tällöin parhaalle valinnalle a_{i^*} pätee

$$V(a_{i^*}) = \max_i \mathrm{E}(a_i).$$

Tästä nimi MaxiE.

Odotusarvosääntö on monessa mielessä luonnollinen:

- Odotusarvo on painotettu keskiarvo, mikä on *intuitiivisesti tasapainoinen valinta.*
- Odotusarvo on *varianssivirheen minimoija*: Jos on etsittävä luku m, jolle satunnaismuuttujan $X - m$ varianssi $\mathrm{Var}(X - m)$ on mahdollisimman pieni, on tuo luku odotusarvo: $m = \mathrm{E}(X)$
- *Suurten lukujen laki* sanoo, että jos pelataan toistuvasti peliä X, siis joka kierroksella saadaan satunnaismuuttujan X verran, niin "pitkässä juoksussa" saadaan keskimäärin $\mathrm{E}(X)$ verran.

- Odotusarvo on myös *riskineutraali valinta*: jos päätöksentekijä on indifferentti valintojen
  (a) varma voitto 1,
  (b) voitto 2 todennäköisyydella 1/2 ja voitto 0 todennäköisyydellä 1/2,

  on hän riskineutraali.

Oletamme, että esimerkissä 2.1 jokainen skenaario ω_1, ω_2 ja ω_3 ovat yhtä todennäköisiä. Tällöin odotusarvon mukaan sijoittaja R.:n arvotukset ovat

$$
\begin{aligned}
V(a_1) &= (-1)\cdot 0{,}333 + (-1)\cdot 0{,}333 + (-1)\cdot 0{,}333 &= -1,\\
V(a_2) &= (-5)\cdot 0{,}333 + 0\cdot 0{,}333 + 5\cdot 0{,}333 &= 0,\\
V(a_3) &= (-10)\cdot 0{,}333 + 2\cdot 0{,}333 + 8\cdot 0{,}333 &= 0,\\
V(a_4) &= (-50)\cdot 0{,}333 + 3\cdot 0{,}333 + 30\cdot 0{,}333 &= -5{,}667.
\end{aligned}
$$

Sijoittaja R.:n valinta: joko a_2 tai a_3.

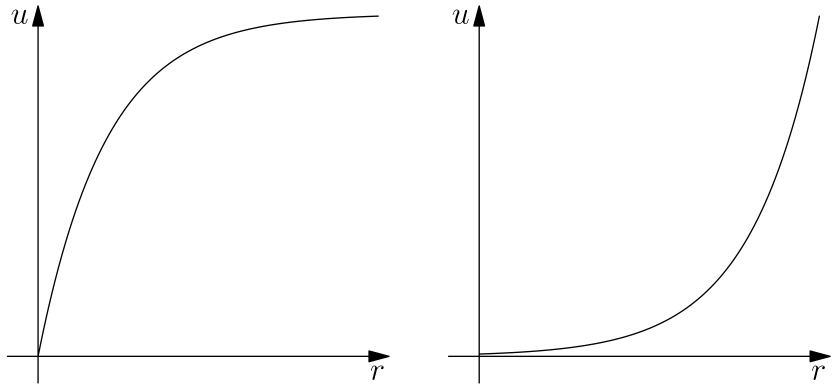
Hyötysääntö. Kaikki eivät ole riskineutraaleja. Toisen karttavat riskiä (ja ottavat esimerkiksi vakuutuksia), ja toiset rakastavat riskiä (ja esimerkiksi lottoavat). Suhtautumista riskiin mitataan hyötyjen avulla. Idea on muuttaa palkkiot hyödyiksi epälineaarisella tavalla. Tällöin päätöksentekijä voi suhtautua palkkioiden muutoksiin eri tavalla riippuen siitä kuinka suuri palkkio on. Esimerkiksi kymmenen euron muutos kymmenen euron palkkiossa merkitsee monille (riskiä kaihtaville) päätöksentekijöille enemmän kuin kymmenen euron muutos miljoonan euron palkkiossa. Toisin sanoen rajahyöty ei ole vakio. Tämän vuoksi hyötylähestymistavassa on aina katsottava kokonaistilannetta, eikä vain muutoksia. Riskineutraalissa lähestymistavassa muutosten tarkastelu riittää.

Odotetun hyödyn sääntö (MaxiEu) on kuten odotusarvosääntö, mutta nyt ei tarkastella palkkioita r_{ij}, vaan niiden hyötyjä $u(r_{ij})$:

$$
V(a_i) \quad = \quad \mathrm{E}\big(u(a_i)\big) \quad = \quad \sum_j u(r_{ij})\, p_j.
$$

Tästä nimi MaxiEu.

Jos hyötyfunktion $u(r)$ derivaatta $\mathrm{d}u(r)/\mathrm{d}r$ — eli *rajahyöty* — on laskeva, niin hyötyfunktio $u(r)$ on *konkaavi*. Päätöksentekijä, jolla on konkaavi hyötyfunktio on *riskinkaihtaja*. Vastaavasti, jos rajahyöyty on kasvava, on hyöty *konveksi*, ja päätöksentekijä, jolla on konveksi hyötyfunktio on *riskinrakastaja*. Seuraavassa kuvassa on hahmoteltu riskinkaihtajan (vasen puoli, konkaavi funktio) ja riskinrakastajan (oikea puoli, konveksi funktio) hyöytyfunktioita.



Olkoon esimerkissä 2.1 sijoittaja R.:n hyöty logaritminen tuottoprosenttiin nähden:

$$u(r) \quad = \quad \ln\bigl(r + 100\%\bigr).$$

Tällöin hänen rajahyötynsä on kääntäen verrannollinen tuottoon nähden, eli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}u(r) \quad = \quad \frac{1}{r}.$$

Luku 100% sijoittaja R.:n hyötyfunktiossa viittaa R.:n koko sijoitettavaan varallisuuteen. Oikeastaan olisi parempi käyttää rahamääriä tuoton sijasta, koska sijoittaja R.:n hyötyfunktio voi riippua hänen (sijoitettavasta) varallisuudestaan. Sijoittaja R.:n arvotukset ovat (kun edelleen oletamme, että skenaariot ω_1, ω_2 ja ω_3 ovat yhtä todennäköisiä)

$$\begin{aligned}
V(a_1) &= \ln(0{,}99)\cdot 0{,}333 + \ln(0{,}99)\cdot 0{,}333 + \ln(0{,}99)\cdot 0{,}333 &&= -0{,}003,\\
V(a_2) &= \ln(0{,}95)\cdot 0{,}333 + \ln(1)\cdot 0{,}333 + \ln(1{,}05)\cdot 0{,}333 &&= -0{,}001,\\
V(a_3) &= \ln(0{,}90)\cdot 0{,}333 + \ln(1{,}02)\cdot 0{,}333 + \ln(1{,}08)\cdot 0{,}333 &&= -0{,}003,\\
V(a_4) &= \ln(0{,}50)\cdot 0{,}333 + \ln(1{,}03)\cdot 0{,}333 + \ln(1{,}30)\cdot 0{,}333 &&= -0{,}133.
\end{aligned}$$

Sijoittaja R.:n valinta: a_2.

Yhdistettyjä sääntöjä

Päätössäännöistä $V_1, V_2, \ldots, V_m$ voidaan muodostaa uusi sääntö V painottamalla:

$$V(a_i) \quad = \quad w_1V_1(a_i) + w_2V_2(a_i) + \cdots + w_mV_m(a_i),$$

missä painot $w_1, w_2, \ldots, w_m$ ovat positiivisia.

Konveksi yhdistäminen. Mikäli yhdistämispainot toteuttavat

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_m \quad = \quad 1$$

on kyseessä *konveksi yhdistäminen*. Esimerkiksi Hurwiczin sääntö on konveksi yhdistelmä Maximax- ja Maximin-säännöistä.

Esimerkin 2.1 sijoittaja R. painottaa optimistista sääntöä (Maximax) painolla 0,75 ja katumussääntöä (Minimax Regret) painolla 0,25. Yhdistämisessä käytetään riemastustulkintaa katumukselle. Arvotukset ovat:

$$\begin{aligned} V(a_1) &= 0{,}75\cdot(-1) + 0{,}25\cdot(-31) = -8{,}50,\\ V(a_2) &= 0{,}75\cdot 5 + 0{,}25\cdot(-25) = -2{,}50,\\ V(a_3) &= 0{,}75\cdot 8 + 0{,}25\cdot(-22) = 0{,}50,\\ V(a_4) &= 0{,}75\cdot 30 + 0{,}25\cdot(-49) = 10{,}25. \end{aligned}$$

R.:n valinta: a_4.

Reunaehdon yhdistäminen. *Reunaehto* V' on mikä tahansa sääntö, joka sulkee pois jotkin valinnat a_i, mutta ei erottele muita valintoja: $V'(a_i) = -1$, jos valinta a_i ei toteuta reunaehtoa ja $V'(a_i) = 0$, jos valinta a_i toteuttaa reunaehdon. Sääntöön V'' voidaan yhdistää reunaehto V' asettamalla[1]

$$V(a_i) = V''(a_i) + \infty\cdot V'(a_i).$$

Esimerkissä 2.1 sijoittaja R. asettaa reunaehdon "yli 15% sijoituksesta ei saa missään tapauksessa hävitä". Siis $V'(a_i) = -1$, kun $i = 4$ ja $V'(a_i) = 0$ muulloin. Jos perussääntö V'' on optimistinen Maximax, niin

$$\begin{aligned} V(a_1) &= -1 + \infty\cdot 0 = -1,\\ V(a_2) &= 5 + \infty\cdot 0 = 5,\\ V(a_3) &= 8 + \infty\cdot 0 = 8,\\ V(a_4) &= 30 + \infty\cdot(-1) = -\infty \end{aligned}$$

R.:n valinta: a_3.

2.2. Esimerkki. Leipuri Pulla myy pullia Kumputien Leipomossa. Hän paistaa pullat aamulla ja myy ne lounastauolla viereisen Ministeriön Erikoisosaston virkamiehille. Eilisiä pullia ei voi tänään enää myydä.

Pullan paistaminen maksaa leipuri Pullalle 0,20€ pullalta, ja hän myy niitä 1,00€ kappalehintaan. Leipuri Pulla tietää, että pullia myydään 0:sta 10:een lounastaukoa kohti. Itse asiassa hän arvioi, että

$$p_0 = 0{,}01,\ p_1 = 0{,}02,\ p_2 = 0{,}03,\ p_3 = 0{,}04,\ p_4 = 0{,}10,\ p_5 = 0{,}60,$$
$$p_6 = 0{,}10,\ p_7 = 0{,}04,\ p_8 = 0{,}03,\ p_9 = 0{,}02,\ p_{10} = 0{,}01,$$

missä p_j on todennäköisyys myydä j pullaa.

Kuinka monta pullaa leipuri Pulla paistaa aamulla, jos hän on

(a) optimisti (Maximax),
(b) pessimisti (Maximin),
(c) realisti (1/2·Maximax + 1/2·Maximin),
(d) katumuksen kaihtaja,
(e) riskineutraali odotusarvoon uskoja,
(f) riskineutraali odotusarvoon uskoja, jolla kuitenkin on seuraavat reunaehdot:
  - pitää olla mahdollista saada voittoa vähintää 1,00 euroa ja
  - missään tapauksessa ei saa tulla tappiota yli 1,00 euroa?

[1] Tunnetusti $\infty\cdot 0 = 0$.

Aluksi on hyvä huomata, että säännöt (a)–(d) ovat ei-stokastisia. Siten todennäköisyydet p_j ovat niissä irrelevantteja.

Seuraavaksi määräämme palkkio- eli päätösmatriisin $R = [r_{ij}]$. Leipuri Pullan järkevät pullanpaistomäärät ovat $A = \{0, 1, \ldots, 10\}$. Jos kaikki pullat myydään ($i \leq j$), niin leipuri Pullan voitto on

$$1{,}00 \cdot i - 0{,}20 \cdot i \quad = \quad 0{,}80 \cdot i.$$

Jos taas pullia jää myymättä ($i > j$), niin leipuri Pullan voitto on

$$1{,}00 \cdot j - 0{,}20 \cdot i.$$

Palkkiomatriisi R, eli voitot eri pullanpaisto- ja -myyntimäärillä, on

$$\begin{bmatrix}
0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\
-0{,}20 & 0{,}80 & 0{,}80 & 0{,}80 & 0{,}80 & 0{,}80 & 0{,}80 & 0{,}80 & 0{,}80 & 0{,}80 & 0{,}80 \\
-0{,}40 & 0{,}60 & 1{,}60 & 1{,}60 & 1{,}60 & 1{,}60 & 1{,}60 & 1{,}60 & 1{,}60 & 1{,}60 & 1{,}60 \\
-0{,}60 & 0{,}40 & 1{,}40 & 2{,}40 & 2{,}40 & 2{,}40 & 2{,}40 & 2{,}40 & 2{,}40 & 2{,}40 & 2{,}40 \\
-0{,}80 & 0{,}20 & 1{,}20 & 2{,}20 & 3{,}20 & 3{,}20 & 3{,}20 & 3{,}20 & 3{,}20 & 3{,}20 & 3{,}20 \\
-1{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 & 2{,}00 & 3{,}00 & 4{,}00 & 4{,}00 & 4{,}00 & 4{,}00 & 4{,}00 & 4{,}00 \\
-1{,}20 & -0{,}20 & 0{,}80 & 1{,}80 & 2{,}80 & 3{,}80 & 4{,}80 & 4{,}80 & 4{,}80 & 4{,}80 & 4{,}80 \\
-1{,}40 & -0{,}40 & 0{,}60 & 1{,}60 & 2{,}60 & 3{,}60 & 4{,}60 & 5{,}60 & 5{,}60 & 5{,}60 & 5{,}60 \\
-1{,}60 & -0{,}60 & 0{,}40 & 1{,}40 & 2{,}40 & 3{,}40 & 4{,}40 & 5{,}40 & 6{,}40 & 6{,}40 & 6{,}40 \\
-1{,}80 & -0{,}80 & 0{,}20 & 1{,}20 & 2{,}20 & 3{,}20 & 4{,}20 & 5{,}20 & 6{,}20 & 7{,}20 & 7{,}20 \\
-2{,}00 & -1{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 & 2{,}00 & 3{,}00 & 4{,}00 & 5{,}00 & 6{,}00 & 7{,}00 & 8{,}00
\end{bmatrix}.$$

(a) Optimisti Pulla toivoo parasta ja arvottaa tilat seuraavasti:

$$\begin{aligned}
V(a_0) &= \max_j r_{0j} &&= 0{,}00, \\
V(a_1) &= \max_j r_{1j} &&= 0{,}80, \\
V(a_2) &= \max_j r_{2j} &&= 1{,}60, \\
V(a_3) &= \max_j r_{3j} &&= 2{,}40, \\
V(a_4) &= \max_j r_{4j} &&= 3{,}20, \\
V(a_5) &= \max_j r_{5j} &&= 4{,}00, \\
V(a_6) &= \max_j r_{6j} &&= 4{,}80, \\
V(a_7) &= \max_j r_{7j} &&= 5{,}60, \\
V(a_8) &= \max_j r_{8j} &&= 6{,}40, \\
V(a_9) &= \max_j r_{9j} &&= 7{,}20, \\
V(a_{10}) &= \max_j r_{10,j} &&= 8{,}00.
\end{aligned}$$

Optimistin valinta: kaikki pullat uuniin.

(b) Pessimisti Pulla pelkää pahinta ja arvottaa tilat seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
V(a_0) &= \min_j r_{0j} &= 0{,}00,\\
V(a_1) &= \min_j r_{1j} &= -0{,}20,\\
V(a_2) &= \min_j r_{2j} &= -1{,}40,\\
V(a_3) &= \min_j r_{3j} &= -1{,}60,\\
V(a_4) &= \min_j r_{4j} &= -0{,}80,\\
V(a_5) &= \min_j r_{5j} &= -1{,}00,\\
V(a_6) &= \min_j r_{6j} &= -1{,}20,\\
V(a_7) &= \min_j r_{7j} &= -1{,}40,\\
V(a_8) &= \min_j r_{8j} &= -1{,}60,\\
V(a_9) &= \min_j r_{9j} &= -1{,}80,\\
V(a_{10}) &= \min_j r_{10,j} &= -2{,}00.
\end{aligned}
$$

Pessimistin valinta: ei paisteta.

(c) Realisti Pullan arvotukset ovat

$$
\begin{aligned}
V(a_0) &= \frac{1}{2}\cdot 0{,}00 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}00 &= 0{,}00,\\
V(a_1) &= \frac{1}{2}\cdot 0{,}80 + \frac{1}{2}\cdot(-0{,}20) &= 0{,}30,\\
V(a_2) &= \frac{1}{2}\cdot 1{,}60 + \frac{1}{2}\cdot(-0{,}40) &= 0{,}60,\\
V(a_3) &= \frac{1}{2}\cdot 2{,}40 + \frac{1}{2}\cdot(-0{,}60) &= 0{,}90,\\
V(a_4) &= \frac{1}{2}\cdot 3{,}20 + \frac{1}{2}\cdot(-0{,}80) &= 1{,}20,\\
V(a_5) &= \frac{1}{2}\cdot 4{,}00 + \frac{1}{2}\cdot(-1{,}00) &= 1{,}50,\\
V(a_6) &= \frac{1}{2}\cdot 4{,}80 + \frac{1}{2}\cdot(-1{,}20) &= 1{,}80,\\
V(a_7) &= \frac{1}{2}\cdot 5{,}60 + \frac{1}{2}\cdot(-1{,}40) &= 2{,}10,\\
V(a_8) &= \frac{1}{2}\cdot 6{,}40 + \frac{1}{2}\cdot(-1{,}60) &= 2{,}40,\\
V(a_9) &= \frac{1}{2}\cdot 7{,}20 + \frac{1}{2}\cdot(-1{,}80) &= 2{,}70,\\
V(a_{10}) &= \frac{1}{2}\cdot 8{,}00 + \frac{1}{2}\cdot(-2{,}00) &= 3{,}00.
\end{aligned}
$$

Realistin valinta on paistaa kymmenen pullaa.

(d) Leipuri Pullan katumusmatriisi on

$$\begin{bmatrix}
0{,}00 & 0{,}80 & 1{,}60 & 2{,}40 & 3{,}20 & 4{,}00 & 4{,}80 & 5{,}60 & 6{,}40 & 7{,}20 & 8{,}00 \\
0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}80 & 1{,}60 & 2{,}40 & 3{,}20 & 4{,}00 & 4{,}80 & 5{,}60 & 6{,}40 & 7{,}20 \\
0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}80 & 1{,}60 & 2{,}40 & 3{,}20 & 4{,}00 & 4{,}80 & 5{,}60 & 6{,}40 \\
0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}80 & 1{,}60 & 2{,}40 & 3{,}20 & 4{,}00 & 4{,}80 & 5{,}60 \\
0{,}80 & 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}80 & 1{,}60 & 2{,}40 & 3{,}20 & 4{,}00 & 4{,}80 \\
1{,}00 & 0{,}80 & 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}80 & 1{,}60 & 2{,}40 & 3{,}20 & 4{,}00 \\
1{,}20 & 1{,}00 & 0{,}80 & 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}80 & 1{,}60 & 2{,}40 & 3{,}20 \\
1{,}40 & 1{,}20 & 1{,}00 & 0{,}80 & 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}80 & 1{,}60 & 2{,}40 \\
1{,}60 & 1{,}40 & 1{,}20 & 1{,}00 & 0{,}80 & 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}80 & 1{,}60 \\
1{,}80 & 1{,}60 & 1{,}40 & 1{,}20 & 1{,}00 & 0{,}80 & 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}80 \\
2{,}00 & 1{,}80 & 1{,}60 & 1{,}40 & 1{,}20 & 1{,}00 & 0{,}80 & 0{,}60 & 0{,}40 & 0{,}30 & 0{,}00
\end{bmatrix}.$$

Suurimmat mahdolliset katumukset eri valinnoilla ovat siis

$$\begin{aligned}
K(a_0) &= \max_j k_{0j} = 8{,}00, \\
K(a_1) &= \max_j k_{1j} = 7{,}20, \\
K(a_2) &= \max_j k_{2j} = 6{,}40, \\
K(a_3) &= \max_j k_{3j} = 5{,}60, \\
K(a_4) &= \max_j k_{4j} = 4{,}80, \\
K(a_5) &= \max_j k_{5j} = 4{,}00, \\
K(a_6) &= \max_j k_{6j} = 3{,}20, \\
K(a_7) &= \max_j k_{7j} = 2{,}40, \\
K(a_8) &= \max_j k_{8j} = 1{,}60, \\
K(a_9) &= \max_j k_{9j} = 1{,}80, \\
K(a_{10}) &= \max_j k_{10,j} = 2{,}00,
\end{aligned}$$

Katumuksen kaihtaja paistaa 8 pullaa.

(e) Riskineutraalin Pullan arvotukset ovat

$$\begin{aligned}
V(a_0) &= 0{,}00 \cdot 0{,}01 + 0{,}00 \cdot 0{,}02 + 0{,}00 \cdot 0{,}03 + 0{,}00 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 0{,}00 \cdot 0{,}10 + 0{,}00 \cdot 0{,}60 + 0{,}00 \cdot 0{,}10 + 0{,}00 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 0{,}00 \cdot 0{,}03 + 0{,}00 \cdot 0{,}02 + 0{,}00 \cdot 0{,}01 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(a_1) &= -0{,}20 \cdot 0{,}01 + 0{,}80 \cdot 0{,}02 + 0{,}80 \cdot 0{,}03 + 0{,}80 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 0{,}80 \cdot 0{,}10 + 0{,}80 \cdot 0{,}60 + 0{,}80 \cdot 0{,}10 + 0{,}80 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 0{,}80 \cdot 0{,}03 + 0{,}80 \cdot 0{,}02 + 0{,}80 \cdot 0{,}01 = 0{,}79,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(a_2) &= -0{,}40 \cdot 0{,}01 + 0{,}60 \cdot 0{,}02 + 1{,}60 \cdot 0{,}03 + 1{,}60 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 1{,}60 \cdot 0{,}10 + 1{,}60 \cdot 0{,}60 + 1{,}60 \cdot 0{,}10 + 1{,}60 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 1{,}60 \cdot 0{,}03 + 1{,}60 \cdot 0{,}02 + 1{,}60 \cdot 0{,}01 = 1{,}56,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(a_3) &= -0{,}60 \cdot 0{,}01 + 0{,}40 \cdot 0{,}02 + 1{,}40 \cdot 0{,}03 + 2{,}40 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 2{,}40 \cdot 0{,}10 + 2{,}40 \cdot 0{,}60 + 2{,}40 \cdot 0{,}10 + 2{,}40 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 2{,}40 \cdot 0{,}03 + 2{,}40 \cdot 0{,}02 + 2{,}40 \cdot 0{,}01 \quad = \quad 2{,}30, \\
V(a_4) &= -0{,}80 \cdot 0{,}01 + 0{,}20 \cdot 0{,}02 + 1{,}20 \cdot 0{,}03 + 2{,}20 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 3{,}20 \cdot 0{,}10 + 3{,}20 \cdot 0{,}60 + 3{,}20 \cdot 0{,}10 + 3{,}20 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 3{,}20 \cdot 0{,}03 + 3{,}20 \cdot 0{,}02 + 3{,}20 \cdot 0{,}01 \quad = \quad 3{,}09, \\
V(a_5) &= -1{,}00 \cdot 0{,}01 + 0{,}00 \cdot 0{,}02 + 1{,}00 \cdot 0{,}03 + 2{,}00 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 3{,}00 \cdot 0{,}10 + 4{,}00 \cdot 0{,}60 + 4{,}00 \cdot 0{,}10 + 4{,}00 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 4{,}00 \cdot 0{,}03 + 4{,}00 \cdot 0{,}02 + 4{,}00 \cdot 0{,}01 \quad = \quad 3{,}60, \\
V(a_6) &= -1{,}20 \cdot 0{,}01 - 0{,}20 \cdot 0{,}02 + 0{,}80 \cdot 0{,}03 + 1{,}80 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 2{,}80 \cdot 0{,}10 + 3{,}80 \cdot 0{,}60 + 4{,}80 \cdot 0{,}10 + 4{,}80 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 4{,}80 \cdot 0{,}03 + 4{,}80 \cdot 0{,}02 + 4{,}80 \cdot 0{,}01 \quad = \quad 4{,}08, \\
V(a_7) &= -1{,}40 \cdot 0{,}01 - 0{,}40 \cdot 0{,}02 + 0{,}60 \cdot 0{,}03 + 1{,}60 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 2{,}60 \cdot 0{,}10 + 3{,}60 \cdot 0{,}60 + 4{,}60 \cdot 0{,}10 + 5{,}60 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 5{,}60 \cdot 0{,}03 + 5{,}60 \cdot 0{,}02 + 5{,}60 \cdot 0{,}01 \quad = \quad 4{,}06, \\
V(a_8) &= -1{,}60 \cdot 0{,}01 - 0{,}60 \cdot 0{,}02 + 0{,}40 \cdot 0{,}03 + 1{,}40 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 2{,}40 \cdot 0{,}10 + 3{,}40 \cdot 0{,}60 + 4{,}40 \cdot 0{,}10 + 5{,}40 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 6{,}40 \cdot 0{,}03 + 6{,}40 \cdot 0{,}02 + 6{,}40 \cdot 0{,}01 \quad = \quad 4{,}00, \\
V(a_9) &= -1{,}80 \cdot 0{,}01 - 0{,}80 \cdot 0{,}02 + 0{,}20 \cdot 0{,}03 + 1{,}20 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 2{,}20 \cdot 0{,}10 + 3{,}20 \cdot 0{,}60 + 4{,}20 \cdot 0{,}10 + 5{,}20 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 6{,}20 \cdot 0{,}03 + 7{,}20 \cdot 0{,}02 + 7{,}20 \cdot 0{,}01 \quad = \quad 3{,}19, \\
V(a_{10}) &= -2{,}00 \cdot 0{,}01 - 1{,}00 \cdot 0{,}02 + 0{,}00 \cdot 0{,}03 + 1{,}00 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 2{,}00 \cdot 0{,}10 + 3{,}00 \cdot 0{,}60 + 4{,}00 \cdot 0{,}10 + 5{,}00 \cdot 0{,}04 + \\
&\quad 6{,}00 \cdot 0{,}03 + 7{,}00 \cdot 0{,}02 + 8{,}00 \cdot 0{,}01 \quad = \quad 3{,}02.
\end{aligned}$$

Riskineutraali valinta on siis paistaa 6 pullaa.

(f) Nyt paistetaan 5 pullaa, sillä a_5:llä on paras odotusarvo valintojen a_2, a_3, a_4, a_5 joukossa, jotka toteuttavat asetetut reunaehdot.

Harjoitustehtäviä lukuun 2

2.1. Harjoitustehtävä. Penan Grilli ja Jaskan Grilli ovat kilpailijoita. Molempien täytyy päättää samanaikaisesti ja toisistaan tietämättä mainostaako

- ei ollenkaan,
- hieman,
- kohtalaisesti,
- paljon.

Pena uskoo, että Jaska mainostaa ei ollenkaan, hieman, kohtalaisesti tai paljon yhtä suurin todennäköisyyksin. Penan Grillin tuotot (euroa/vuosi) eri tilanteissa ovat:

	Jaskan valinta			
Penan valinta	Ei ollenkaan	Hieman	Kohtalaisesti	Paljon
Ei ollenkaan	90.000	10.000	10.000	10.000
Hieman	60.000	60.000	50.000	20.000
Kohtalaisesti	50.000	50.000	60.000	10.000
Paljon	90.000	90.000	50.000	0

Miten Penan tulisi mainostaa, jos hän on

(a) optimisti,
(b) pessimisti,
(c) realisti?

2.2. Harjoitustehtävä. Miten tehtävän 2.1 Penan tulisi mainostaa, jos hän on

(a) katumuksen kaihtaja,
(b) riskineutraali,
(c) hyödyn maksimoija hyötyfunktiolla $u(r) = \ln r$?

2.3. Harjoitustehtävä. Miten Penan ratkaisut tehtävissä 2.1 ja 2.2 muuttuvat, jos hän uskoo, että Jaska mainostaa paljon todennäköisyydellä 90%, kohtalaisesti todennäköisyydella 5% ja hieman todennäköisyydellä 5%?

2.4. Harjoitustehtävä. Ovatko tehtävän 2.1 Pena ja Jaska symmetrisessä asemassa päätöksenteon suhteen?

2.5. Harjoitustehtävä. Sijoittaja R.:llä on 1.000 euroa löysää rahaa. Hän aikoo sijoittaa ne vuodeksi joko valtion obligaatioiin tai kultaan (mutta ei molempiin). Jos sijoittaja R. sijoittaa 1.000 euroa valtion obligaatioihin saa hän varmasti vuoden kuluttua 1.296 euroa. Jos hän taas sijoittaa kultaan saa hän vuoden kuluttua 400 euroa todennäköisyydellä 0,75 ja 10.000 euroa todennäköisyydellä 0,25. Sijoittaja R.:n hyötyfunktio on $u(r) = \sqrt{r}$.

Sijoittaja R. haluaa optimoida odotetun (eli keskimääräisen) hyödyn. Tuleeko hänen sijoittaa valtion obligaatioihin vai kultaan?

2.6. Harjoitustehtävä. (a) Kutsuisitko tehtävän 2.5 sijoittajaa riskineutraaliksi, riskinrakastajaksi vai riskinhaihtajaksi?
(b) Miten tehtävän 2.5 päätöngelma muuttuu, jos sijoittaja R. voi myös hajauttaa sijoituksensa?

2.7. Harjoitustehtävä. Yhtyneet insinörtit Oy ja Lieto Oy kilpailevat samasta Nikolaigradin kaupungin rakennusprojektista. Lieto uskoo, että Yhtyneiden insinörttien tarjous on satunnaismuuttuja X, jonka jakauma on $\mathrm{P}_X(6.000) = 0{,}40$, $\mathrm{P}_X(8.000) = 0{,}30$ ja $\mathrm{P}_X(11.000) = 0{,}30$. Mikäli tarjoukset menevät tasan, Lieto voittaa tarjouskilpailun, koska Liedon hallituksen puheenjohtaja on myös Nikolaigradin kaupunginhallituksen puheenjohtaja.

Projektin tekeminen maksaa Liedolle 6.000 euroa.

Mikä on Liedon tarjous, kun se on

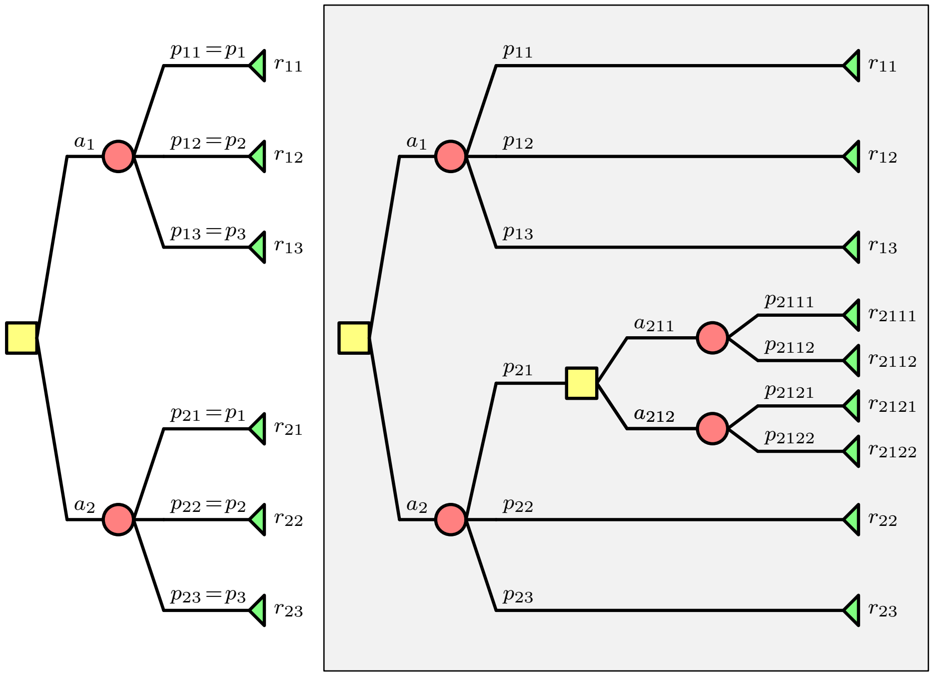
(a) optimisti,
(b) pessimisti,
(c) katumuksen kaihtaja,
(d) riskineutraali?

LUKU 3

Päätöspuut

Luvussa 2 tarkastelimme *staattista* päätöksentekoa, eli päätös tehtiin vain kerran, ja sitten katsottiin seuraukset. Nyt tarkastelemme *dynaamista* päätöksentekoa, jossa päätökset ja sattumat seuraavat toisiaan, ja menneisyys vaikuttaa tulevaisuuteen.

Kuvallisesti tämä dynaaminen päätösasetelma tarkoittaa seuraavan kuvan oikean puolen puun kaltaista tilannetta (neliö tarkoittaa päätöstä ja ympyrä tarkoittaa sattumaa; kylkikolmio tarkoittaa tarkastelun loppua). Vasemmanpuoleinen puu kuvastaa staattista tilannetta.



Päätöspuun rakentaminen

3.1. Esimerkki. Öljy-yhtiö Oy:n pitää päättää poratako öljyä paikasta P. Poraaminen maksaa 100.000 €. Jos öljyä löytyy, niin siitä saadaan 6.000.000 €. Öljy-yhtiö Oy arvelee, että öljyn löytymisen todennäköisyys on 45%. Ennen varsinaista poraamista Öljy-yhtiö Oy voi palkata geologin arvioimaan paikkaa P. Geologin palkkaaminen maksaa 10.000 €. Geologi antaa todennäköisyydellä 50% suotuisan raportin. Mikäli raportti on suotuisa, löytyy öljyä paikasta P todennäköisyydellä 80%. Mikäli raportti on epäsuotuisa, löytyy öljyä paikasta P todennäköisyydellä 10%.

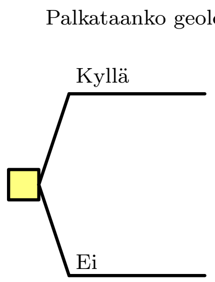
Mitä Öljy-yhtiö Oy:n kannattaa tehdä?

Rakennamme binäärisen puun, jossa peräkkäin kysytään neljä kyllä/ei -kysymystä. Jokaisen kysymyksen kohdalla puu (mahdollisesti) haarautuu. Kysymykset ovat:

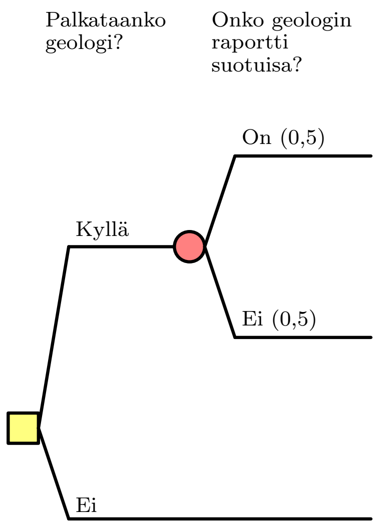
1. Palkataanko geologi?
2. Onko geologin raportti suotuisa?
3. Porataanko?
4. Onko öljyä?

Kysymykset on järjestetty niin, että päätöksentekoa viivytetään mahdollisimman pitkälle, jotta kaikki mahdollinen (satunnainen) informaatio saadaan päätöksenteon tueksi.

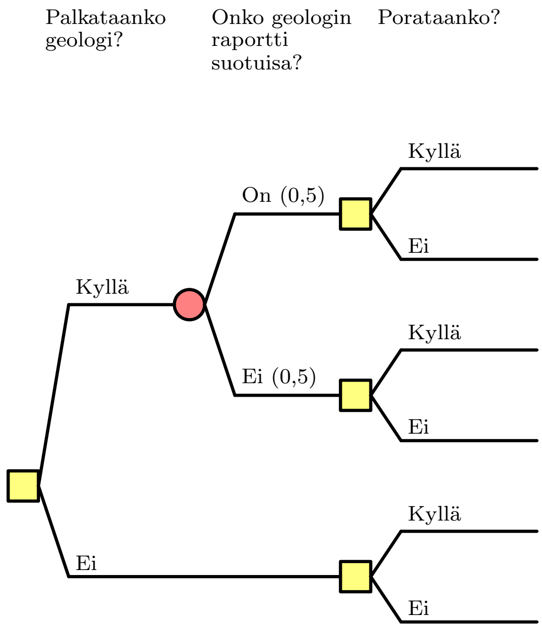
Ensimmäiseen kysymykseen "Palkataanko geologi?" joudumme vastaamaan ilman mitään lisäinformaatiota. Tämä on puun *juuri*. Puumme siis alkaa *päätössolmusta* (neliö)



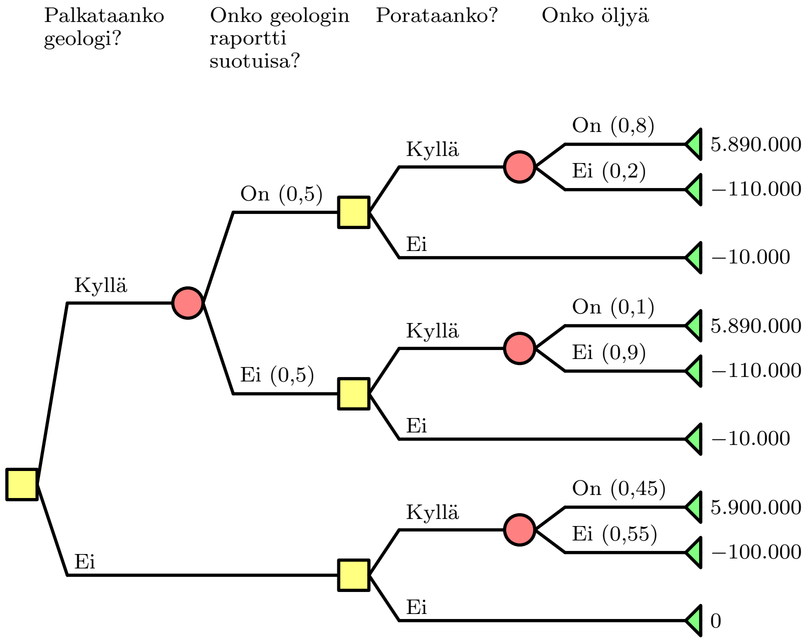
Juuressa puumme siis haarautuu kahdeksi *alipuuksi*: ylemmässä alipuussa geologi palkataan ja alemmassa alipuussa geologia ei palkata. Seuraava kysymys on "Onko geologin raportti suotuisa". Jos geologia ei palkattu, on tämä kysymys tietysti merkityksetön. Siten geologin raportti aiheuttaa *sattumasolmun* (ympyrä) päätöshaaraan, jossa geologi palkattiin, mutta ei päätöshaaraan, jossa geologia ei palkattu. Sattumasolmun haaroihin on merkitty haaran tapahtumisen todennäköisyys (sulkuihin):



Kolmas kysymys "Porataanko?" koskee kaikkia puun haaroja. Lisäämme siis puuhun kolme päätössolmua:



Viimeinen kysymys on "Onko öljyä?". Tämä kysymys koskee vain niitä puun haaroja, joissa poratamaan. Jokaiseen poraushaaraan tulee siis sattumasolmu. Eri sattumasolmuissa voi olla eri todennäköisyydet. Koska tämä oli viimeinen kysymys, pitää kaikki haarat nyt päättää *lehtiin* (kärkikolmio). Lehden päähän merkitsemme kyseistä puun haaraa vastaavan palkkion. Olemme siis saaneet puun



Riskineutraali päätössääntö

Riskineutraali päätössääntö päätöspuissa perustuu laskemalla sattumasolmuille ja niistä haarautuville alipuille arvot odotusarvoperiaatteen mukaan ja valitsemalla päätössolmuissa se haara, jota vastaava alipuu (eli ko. alipuun juurisolmu) saa suurimman arvon. Tämä arvo tulee myös päätössolmun arvoksi. Käytännössä arvojen määräminen perustuu seuraaviin huomioihin:

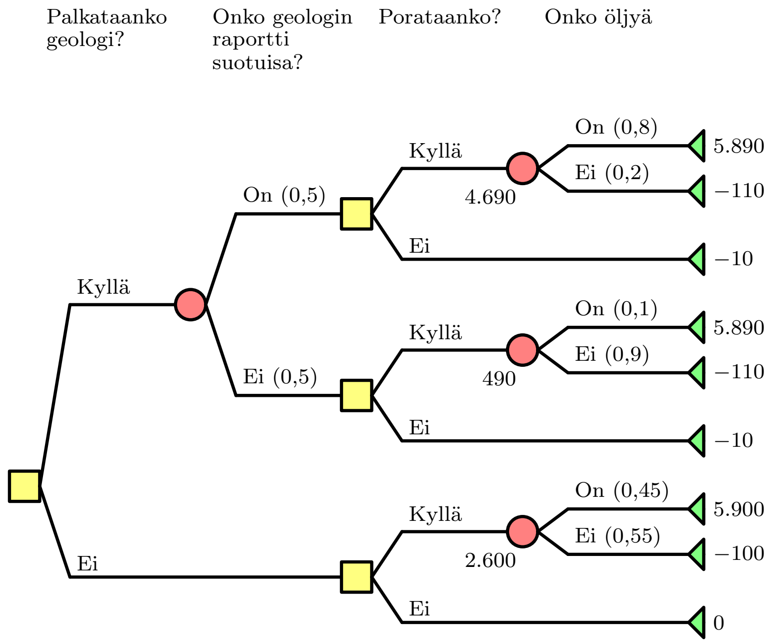
1. Lehden arvo on se mikä se on.
2. Päätössolmun arvo on siitä haarautuvien alipuiden arvojen maksimi, eli parhaimman päätöksen arvo.
3. Sattumasolmun arvo on siitä haarautuvien alipuiden odotusarvo, eli todennäköisyyksin painotettu keskiarvo.

Koska lehtien arvot tiedetään ja kaikki päättyy lopulta lehtiin, voidaan huomioiden 1.–3. avulla laskea kaikkien puiden solmujen arvot käymällä puuhun latvasta ja etenemällä takaperin.

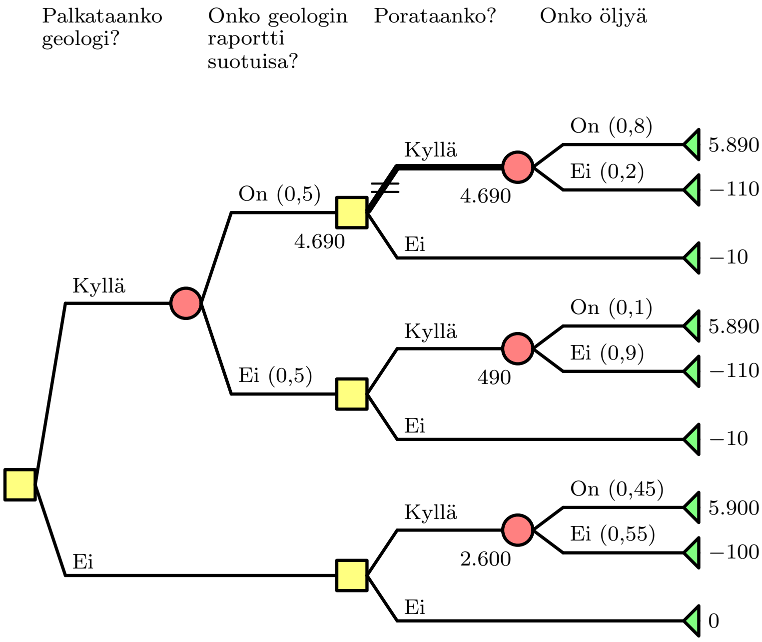
Tarkastelemme edelleen öljy-yhtiöesimerkkiä 3.1. Lehtien arvot on annettu. Lehtiä edeltävien sattumasolmujen "Onko öljyä?" arvot lasketaan odotusarvoperiaatteelle. Saamme solmujen arvoksi (solmut on lueteltu ylhäältä alas, ja olemme siirtyneet euroista kiloeuroihin)

$$\begin{aligned}5.890 \cdot 0{,}80 + (-110) \cdot 0{,}20 &= 4.690,\\ 5.890 \cdot 0{,}10 + (-110) \cdot 0{,}90 &= 590,\\ 5.900 \cdot 0{,}45 + (-100) \cdot 0{,}55 &= 2.600.\end{aligned}$$

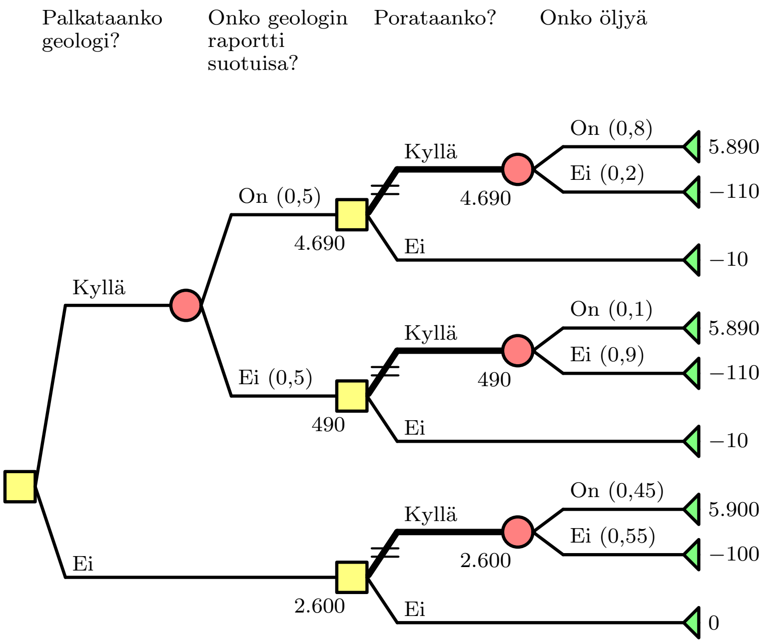
Päätöspuussa merkitsemme solmun arvon sen vasempaan alanurkkaan. Täydennämme päätöspuun siis muotoon



Seuraavaksi astumme puussa askeleen taaksepäin ja päädymme päätössolmuihin "Porataanko?". Ylimmässä päätössolmussa alipuun "Kyllä" arvo laskettiin juuri. Se oli 4.690. Alipuun "Ei" arvo on lehtiarvo -10. Siis paras päätös tässä päätössolmussa on "Kyllä" ja sitä vastaava arvo 4.690 on tämän päätössolmun arvo. Merkitsemme päätössolmun arvon sen vasempaan alanurkkaan. Merkitsemme myös parhaimman päätöksen symbolilla $=$ ja piirrämme vielä selvyyden vuoksi parhaimman haaran leveällä tussilla. Olemme siis tässä vaiheessa saaneet puun



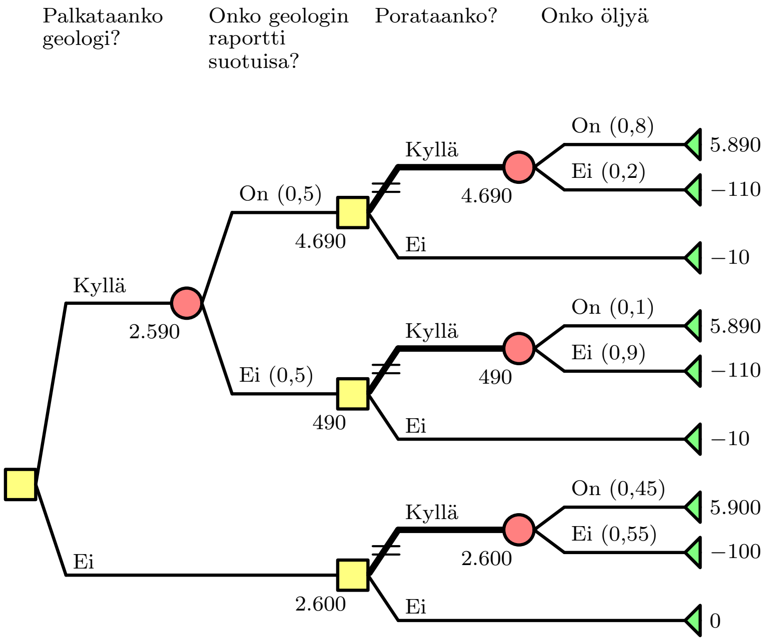
Täyttämällä muut päätössolmut “Porataanko” samalla tavalla saamme puun tämän tason täytetyksi:



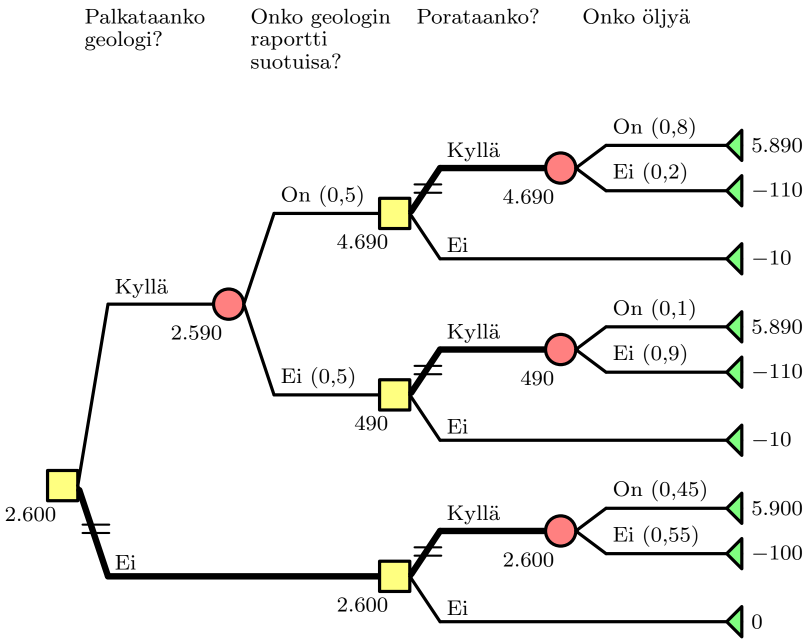
Astumme taas puussa taaksepäin. Päädymme sattumasolmuun “Onko geologin raportti suotuisa?”. Tämän sattumasolmun arvo on sen alipuiden arvojen todennäköisyyksin painotettu keskiarvo, eli odotusarvo. Alipuiden arvo on jo laskettu edellisessä vaiheessa. Saamme siis arvon

$$4.690 \cdot 0{,}50 + 490 \cdot 0{,}50 \quad = \quad 2.590.$$

Täytämme tämän päätöspuuhun ja saamme



Otamme sitten askeleen taaksepäin päätöspuussa ja pääsemme lopulta juureen, eli ensimmäiseen päätössolmuun “Palkataanko geologi?”. Näemme että alipuun “Kyllä” arvo on 2.590 ja alipuun “Ei” arvo on 2.600. Siten päätössolmun “Palkataanko geologi” arvo on 2.600 ja paras päätös tässä kohtaa on “Ei”. Olemme siis saaneet loputa täysin täytetyn päätöspuun:



Johtopäätös on, että ei kannata palkata geologia, ja että poraaminen kannattaa aina.

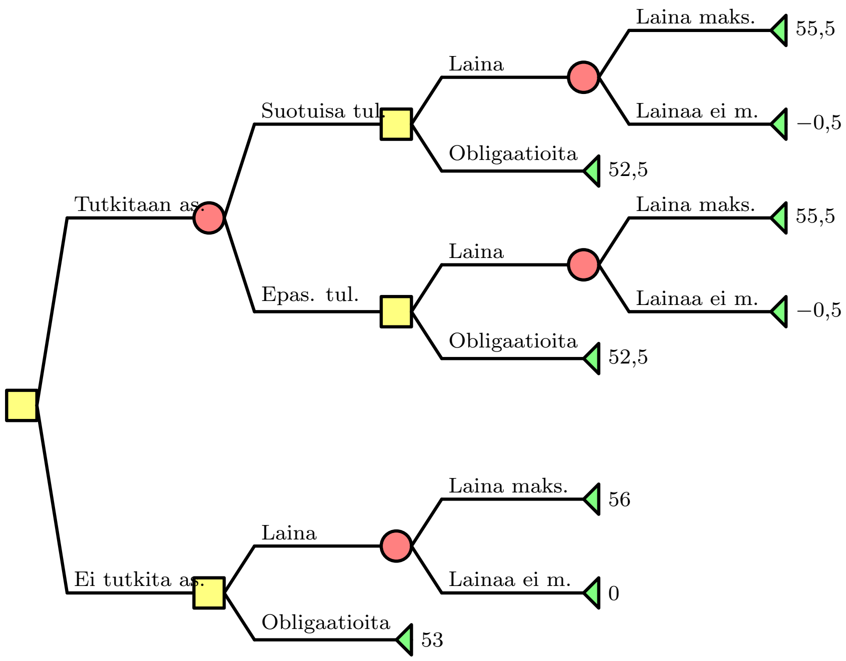
Bayesin kaava päätöspuissa

Usein päätösongelman kuvauksessa on ehdolliset todennäköisyydet annettu "väärin päin". Toisin sanoen on annettu todennäköisyys $\mathrm{P}(A|B)$, kun tarvitsemme puussa todennäköisyyden $\mathrm{P}(B|A)$. Tarvittavat todennäköisyydet saadaan usein käännettyä Bayesin kaavalla (1.21).

3.2. Esimerkki. Pankki harkitsee myöntääkö 50.000 euron lainan asiakkaalle 12% korolla, vai sijoittaako kyseiset 50.000 euroa valtion obligaatioihin 6% korolla. Pankki arvioi, että 4%:n todennäköisyydellä asiakas ei pysty maksamaan lainaansa takaisin. Pankki voi teettää tutkimuksen asiakkaan luotettavuudesta 500 eurolla. Todennäköisyys, että tutkimus antaa suotuisan tuloksen asiakkaalle, joka pystyy maksamaan lainansa on $77/96$. Todennäköisyys, että tutkimus antaa suotuisan tuloksen asiakkaalle, joka ei pysty maksamaan lainaansa on $1/4$.

Kannattaako pankin teettää tutkimus asiakkaasta? Kannattaako pankin antaa laina?

Pankin päätöstilannetta vastaava puu on (ilman todennäköisyyksiä, palkkiot kiloeuroissa):

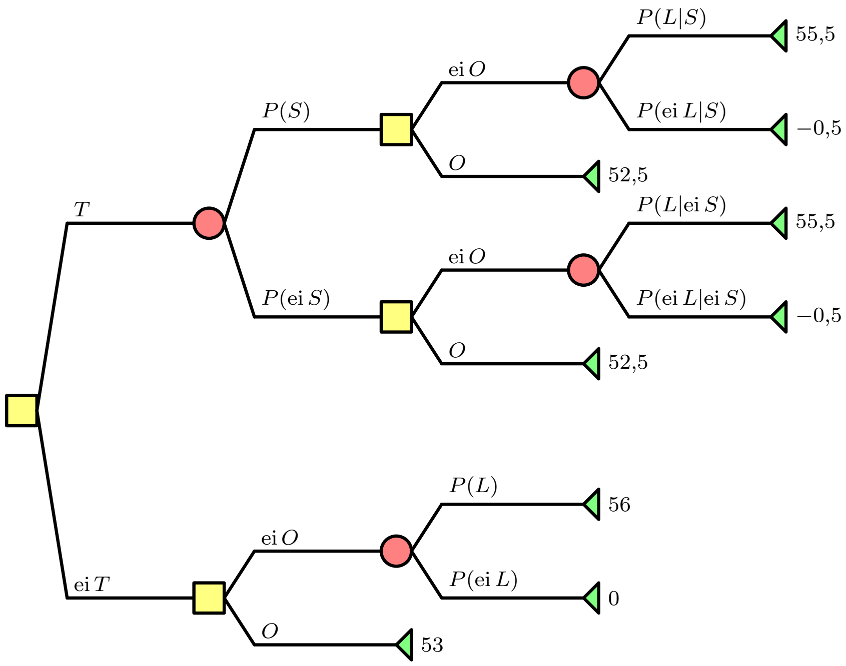


(Emme ole "synkronoineet" tätä esimerkin 3.2 päätöspuuta toisin kuin esimerkin 3.1 Öljy-yhtiön päätöspuun. Huomattavaa kuitenkin on, että *puina* nämä molemmat päätöspuut ovat samat.)

Tutkimme mitkä todennäköisyydet tarvitsemme. Merkitsemme

$$
\begin{aligned}
L &= \text{“Laina maksetaan”},\\
\mathrm{ei}L &= \text{“Lainaa ei makseta”},\\
S &= \text{“Raportti on suotuisa”},\\
\mathrm{ei}S &= \text{“Raportti ei ole suotuisa”},\\
T &= \text{“Asiakas tutkitaan”},\\
\mathrm{ei}T &= \text{“Asiakasta ei tutkita”},\\
O &= \text{“Ostetaan obligaatioita”},\\
\mathrm{ei}O &= \text{“Annetaan laina”}.
\end{aligned}
$$

Näillä merkinnöillä abstraktein todennäköisyyksin täytetty päätöspuu on



Prioritodennäkösyydet L:lle on annettu:

$$\mathrm{P}(\mathrm{ei}L) = 0{,}04 \quad \text{ja} \quad \mathrm{P}(L) = 0{,}96.$$

Lisäksi on annettu uskottavuudet

$$\mathrm{P}(S|L) = 77/96 \quad \text{ja} \quad \mathrm{P}(\mathrm{ei}S|L) = 19/96$$

sekä

$$\mathrm{P}(S|\mathrm{ei}L) = 1/4 \quad \text{ja} \quad \mathrm{P}(\mathrm{ei}S|\mathrm{ei}L) = 3/4.$$

Sen sijaan tarvittavia posterioritodennäköisyyksiä $\mathrm{P}(L|S)$, $\mathrm{P}(\mathrm{ei}L|S)$, $\mathrm{P}(L|\mathrm{ei}S)$ ja $\mathrm{P}(\mathrm{ei}L|\mathrm{ei}S)$ ei ole annettu. Voimme kuitenkin laskea ne annetuista todennäköisyyksistä *Bayesin kaavalla* (1.21). Saamme

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(L|S) &= \frac{\mathrm{P}(L)\mathrm{P}(S|L)}{\mathrm{P}(L)\mathrm{P}(S|L) + \mathrm{P}(\mathrm{ei}L)\mathrm{P}(S|\mathrm{ei}L)}\\
&= \frac{0{,}96 \cdot 77/96}{0{,}96 \cdot 77/96 + 0{,}04 \cdot 1/4}\\
&= 0{,}987.
\end{aligned}
$$

Koska ehdollinen todennäköisyys on — ehdon ollessa kiinnitetty — todennäköisyys, saamme käyttämällä komplementtikaavaa (1.3) edelliseen, että

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{ei}L|S) &= 1-\mathrm{P}(L|S) \\ &= 0{,}013,\end{aligned}$$

Edelleen Bayesin kaavalla (1.21) saamme

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(L|\mathrm{ei}S) &= \frac{\mathrm{P}(L)\mathrm{P}(\mathrm{ei}S|L)}{\mathrm{P}(L)\mathrm{P}(\mathrm{ei}S|L)+\mathrm{P}(\mathrm{ei}L)\mathrm{P}(\mathrm{ei}S|\mathrm{ei}L)} \\ &= \frac{0{,}96\cdot 19/96}{0{,}96\cdot 19/96+0{,}04\cdot 3/4} \\ &= 0{,}864,\end{aligned}$$

ja soveltamalla komplementtikaavaa (1.3) edelliseen saamme

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{ei}L|\mathrm{ei}S) &= 1-\mathrm{P}(L|\mathrm{ei}S) \\ &= 0{,}136.\end{aligned}$$

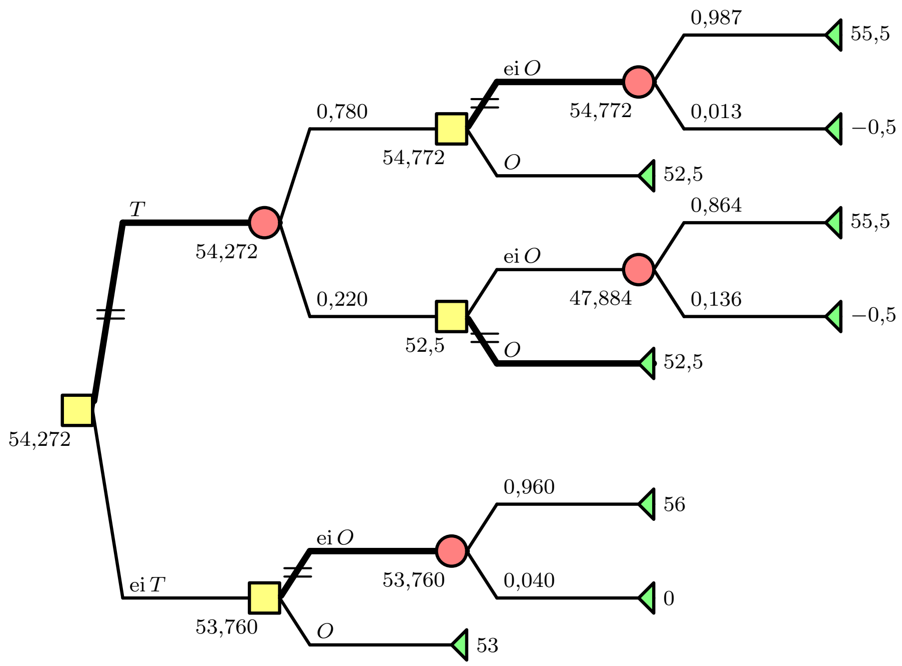
Lopulta huomaamme että olemme jo itse asiassa määränneet todennäköisyyden

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S) &= \mathrm{P}(L)\mathrm{P}(S|L)+\mathrm{P}(\mathrm{ei}L)\mathrm{P}(S|\mathrm{ei}L) \\ &= 0{,}780\end{aligned}$$

kokonaistodennäköisyyden kaavan (1.20) avulla. Siten, komplemettikaavan (1.3) nojalla

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{ei}S) &= 1-\mathrm{P}(S) \\ &= 0{,}220.\end{aligned}$$

Sijoittamalla saadut luvut aiemmin rakennettuun päätöspuuhun ja laskemalla odotusarvot normaaliin tapaan lähtien liikkeelle lehdistä saamme



Näemme, että pankin kannattaa teettää tutkimus asiakkaasta, ja jos tulos on suotuisa, antaa laina. Jos taas tulos on epäsuotuisa, ei lainaa kannata antaa.

Informaation arvo

Epätäydellisen informaation arvo. *Asiantuntijainformaatio* eli *epätäydellinen informaatio* tarkoittaa informaatiota, joka muuttaa näkemystämme epävarmojen tapahtumien todennäköisyyksistä.

Olkoon päätöspuun DT (juuren) arvo $v_0 = v(\mathrm{DT})$. Asiantuntija antaa raportit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ todennäköisyyksin $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Jokaista raporttia e_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, vastaa päätöspuu DT_{e_k}, joka saadaan päätöspuusta DT korvaamalla kaikki esiintyvät "raa'at" todennäköisyydet raporttia e_k vastaavilla asiantuntijatodennäköisyyksillä. Päätöspuulle DT_{e_k} voidaan laskea arvo $v_{e_k} = v(\mathrm{DT}_{e_k})$ normaaliin tapaan. Koska asiantuntija antaa puun DT_{e_k} todennäköisyydellä q_k, niin hän antaa itse asiassa puun DT_e, missä on juuressa sattumasolmu, joka haarautuu puihin $\mathrm{DT}_{e_1}, \mathrm{DT}_{e_2}, \ldots, \mathrm{DT}_{e_n}$ todennäköisyyksin $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Siten asiantuntijan antaman puun riskineutraali arvo on

$$v_e \quad = \quad v(\mathrm{DT}_e) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} q_k \, v_{e_k}.$$

Nyt siis päätöksentekijällä on kaksi vaihtoehtoa: (1) joko pelata alkuperäisellä puullaan, jonka arvo on v_0 tai (2) maksaa x ja pelata asiantuntijapuulla, jonka arvo on v_e. Luonnollisesti *asiantuntijainformaation arvo* on suurin x, jolle $v_e - x \geq v_0$, eli

$$x \quad = \quad v_e - v_0.$$

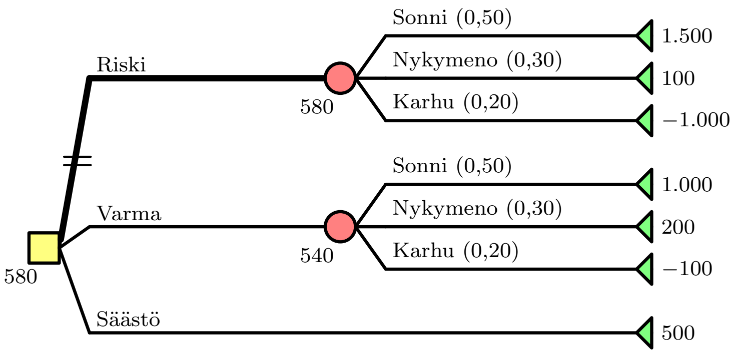
3.3. Esimerkki. Sijoittaja K.:lla on 10.000 € sijoitettavaa. Sijoittaja K. voi sijoittaa rahansa joko Riskiin, Varmaan, tai Säästöön. Jos hän sijoittaa Riskiin tai Varmaan, joutuu hän maksamaan 200 € erinäisiä käsittelykuluja. Jos tulee karhumarkkinat Riski antaa −800 € voittoa ja Varma 100 € voittoa. Jos tulee sonnimarkkinat Riski antaa 1.700 € voittoa ja Varma antaa 1.200 € voittoa. Jos nykymeno jatkuu, niin Riski antaa 300 € voittoa ja Varma antaa 400 € voittoa. Säästö antaa aina 500 € voittoa. Sonnimarkkinoiden todennäköisyys on 0,50, nykymenon todennäköisyys on 0,30 ja karhumarkkinoiden todennäköisyys on 0,20.

(a) Mihin kohteeseen sijoittaja K.:n tulee sijoittaa?
(b) Sijoittaja K. voi konsultoida markkina-asiantuntija R.:ää, jonka arviot ovat osoittautuneet vastaamaan todellisuutta seuraavan kaavion tavoin:

	Todellisuus		
Ennustus	Sonni	Nykymeno	Karhu
Sonni	0,80	0,15	0,20
Nykymeno	0,10	0,70	0,20
Karhu	0,10	0,15	0,60

Toisin sanoen esimerkiksi 15% tilanteista, joissa nykymeno on jatkunut markkina-asiantuntija onkin ennustanut sonnimarkkinoita. (Huomaa, että tässä taulokossa sarakkeet summautuvat ykkösiksi, eivät rivit. Tosin sanoen sarakkeet vastaavat todennäköisyysjakaumia, mutta rivit eivät.)
Kuinka paljon sijoittaja K.:n kannattaa korkeintaan maksaa markkina-asiantuntija R.:n ennusteesta?

Kohdassa (a) sijoittaja K.:n tilannetta kuvaava riskineutraalisti täytetty päätöspuu voittoineen ja tappioineen on:



Sijoittaja K.:n kannattaa siis sijoittaa Riskiin.

Rakennamme seuraavaksi kohtaan (b) asiantuntijapuun. Puuta varten tarvitsemme asiantuntijainformaation posterioritodennäköisyydet ja todennäköisyydet asiantuntija R.:n raporteille. Nämä pitää laskea, sillä esimerkin 3.3 taulukossa on annettu ehdolliset todennäköisyydet puun kannalta "väärin päin". Tarvitsemme siis Bayesin kaavaa ja kokonaistodennäköisyyden kaavaa taulukon "kääntämiseen".

Tonennäköisyydet asiantuntija R.:n raporteille saadaan *kokonaistodennäköisyyden kaavalla* (1.20):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{R.:“Sonni”}) &= \mathrm{P}(\text{Sonni})\mathrm{P}(\text{R.:“Sonni”}|\text{Sonni}) + \\
&\quad \mathrm{P}(\text{Nykymeno})\mathrm{P}(\text{R.:“Sonni”}|\text{Nykymeno}) + \\
&\quad \mathrm{P}(\text{Karhu})\mathrm{P}(\text{R.:“Sonni”}|\text{Karhu}) \\
&= 0{,}50 \cdot 0{,}80 + 0{,}30 \cdot 0{,}15 + 0{,}20 \cdot 0{,}20 \\
&= 0{,}485.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{R.:“Nykymeno”}) &= \mathrm{P}(\text{Sonni})\mathrm{P}(\text{R.:“Nykymeno”}|\text{Sonni}) + \\
&\quad \mathrm{P}(\text{Nykymeno})\mathrm{P}(\text{R.:“Nykymeno”}|\text{Nykymeno}) + \\
&\quad \mathrm{P}(\text{Karhu})\mathrm{P}(\text{R.:“Nykymeno”}|\text{Karhu}) \\
&= 0{,}50 \cdot 0{,}10 + 0{,}30 \cdot 0{,}70 + 0{,}20 \cdot 0{,}20 \\
&= 0{,}300.
\end{aligned}
$$

Lopuksi voimme laskea

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{R.:“Karhu”}) &= 1 - \Big(\mathrm{P}(\text{R.:“Sonni”}) + \mathrm{P}(\text{R.:“Nykymeno”})\Big) \\
&= 1 - (0{,}485 + 0{,}300) \\
&= 0{,}215.
\end{aligned}
$$

Tarkistuksen vuoksi huomautamme, että kokonaistodennäköisyyden kaava antaa saman tuloksen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{R.: ``Karhu''}) &= \mathrm{P}(\text{Sonni})\mathrm{P}(\text{R.: ``Karhu''}\,|\text{Sonni}) + \\
&\quad \mathrm{P}(\text{Nykymeno})\mathrm{P}(\text{R.: ``Karhu''}\,|\text{Nykymeno}) + \\
&\quad \mathrm{P}(\text{Karhu})\mathrm{P}(\text{R.: ``Karhu''}\,|\text{Karhu}) \\
&= 0{,}50 \cdot 0{,}10 + 0{,}30 \cdot 0{,}15 + 0{,}20 \cdot 0{,}60 \\
&= 0{,}215.
\end{aligned}$$

Posterioritodennäköisyydet saadaan nyt *Bayesin kaavasta* (1.19):

	Posteriori		
Ennustus	Sonni	Nykymeno	Karhu
Sonni	0,8247	0,0928	0,0825
Nykymeno	0,1667	0,7000	0,1333
Karhu	0,2325	0,2093	0,5581

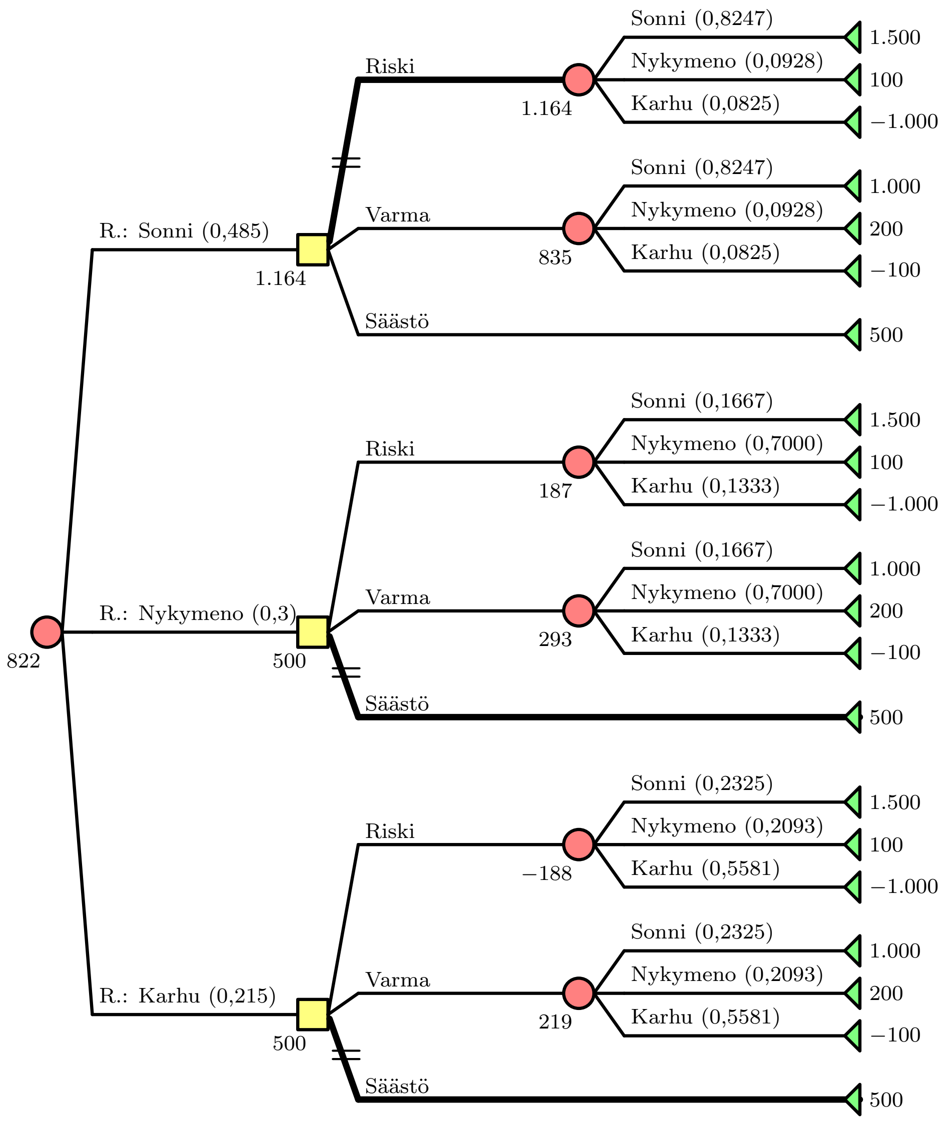
(Huomaa, että tässä taulokossa rivit summautuvat ykkösiksi, eivät sarakkeet. Tosin sanoen rivit vastaavat todennäköisyysjakaumia, mutta sarakkeet eivät. Tämä on siis “käännetty” versio aikaisemmasta asiantuntijataulukosta.)

Yllä olevassa taulukossa esimerkiksi posterioritodennäköisyydet 0,8247 ja 0,1667 on saatu laskemalla kaavalla (1.19)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\text{Sonni}|\text{R.: ``Sonni''}) \\
&= \frac{\mathrm{P}(\text{Sonni})\mathrm{P}(\text{R.: ``Sonni''}\,|\text{Sonni})}{\mathrm{P}(\text{R: ``Sonni''})} \\
&= \frac{0{,}50 \cdot 0{,}80}{0{,}485} \\
&= 0{,}8247.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\text{Sonni}|\text{R.: ``Nykymeno''}) \\
&= \frac{\mathrm{P}(\text{Sonni})\mathrm{P}(\text{R.: ``Nykymeno''}\,|\text{Sonni})}{\mathrm{P}(\text{R: ``Nykymeno''})} \\
&= \frac{0{,}50 \cdot 0{,}10}{0{,}300} \\
&= 0{,}1667.
\end{aligned}$$

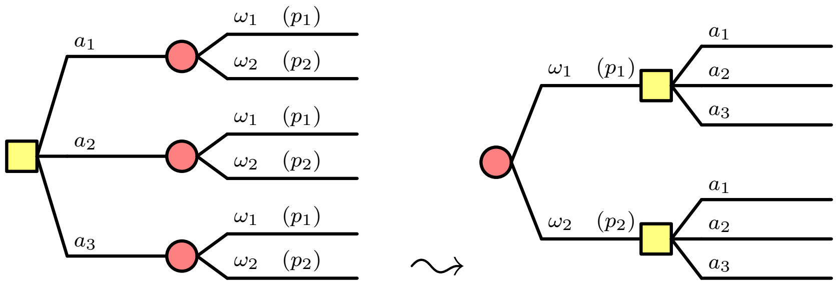
Saamme asiantuntijapuun voittoineen ja tappioineen



Johtopäätös on, että markkina-asiantuntijan informaation arvo on sijoittaja K.:lle $822 - 580 = 242$ euroa.

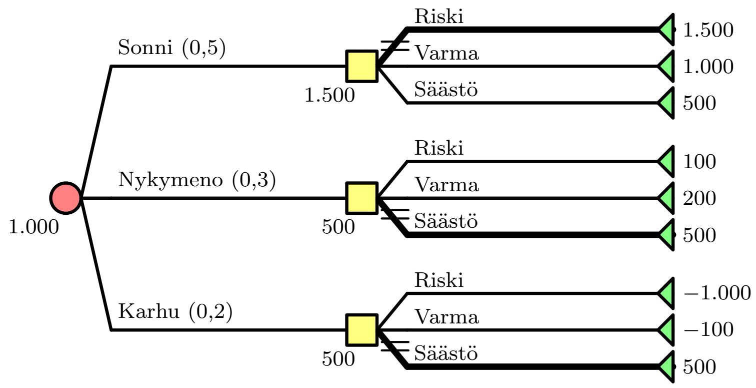
Oraakkeli-informaation arvo. *Oraakkelilla* emme tarkoita Delfoin oraakkelia, joka antaa hyödytöntä informaatiota tyyliin “suuri valtakunta tuhoutuu, jos aloitat sodan”, vaan täydellisen luotettavaa asiantuntijaa. Toisin sanoen *oraakkeli on asiantuntija, jonka raporteissa esiintyy ainoastaan todennäköisyyksiä* 0 *ja* 1. *Oraakkeli-informaation arvo* voidaan siis laskea samalla tavalla kuin asiantuntijainformaation arvo.

Mikäli oraakkeli antaa raporttinsa jo tunnettujen “raakojen” todennäköisyyksien mukaan — kuten on usein luonnollista olettaa — voidaan oraakkelipuun arvo laskea myös rakentamalla oraakkelipuu alkuperäisestä puusta kääntämällä kaikki sattuma ennen päätöksiä seuraavaan tyyliin:



Kääntämistä jatketaan, kunnes kaikki sattuma on ennen päätöksiä. Tällöin saadaan oraakkelipuu, joka vastaa päätöstilannetta “kysytään oraakkelilta”.

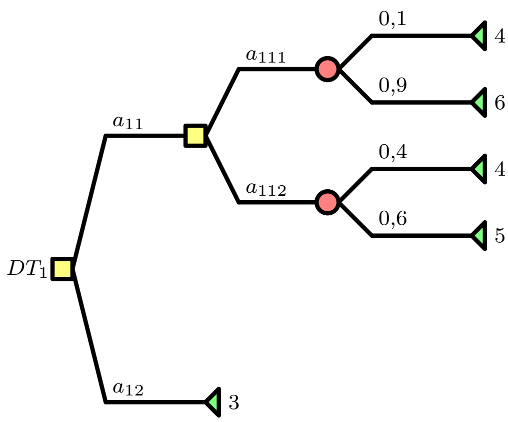
Esimerkissä 3.3 oraakkeli-informaation arvo on sijoittaja K.:lle 420 euroa. Nimittäin oraakkelipuu on

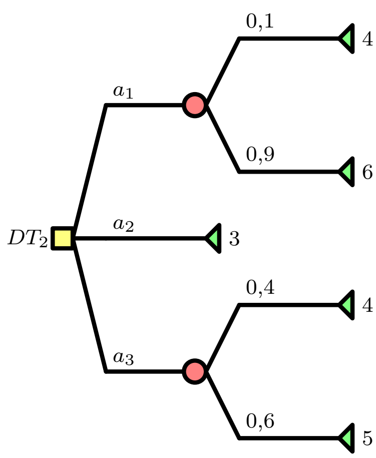


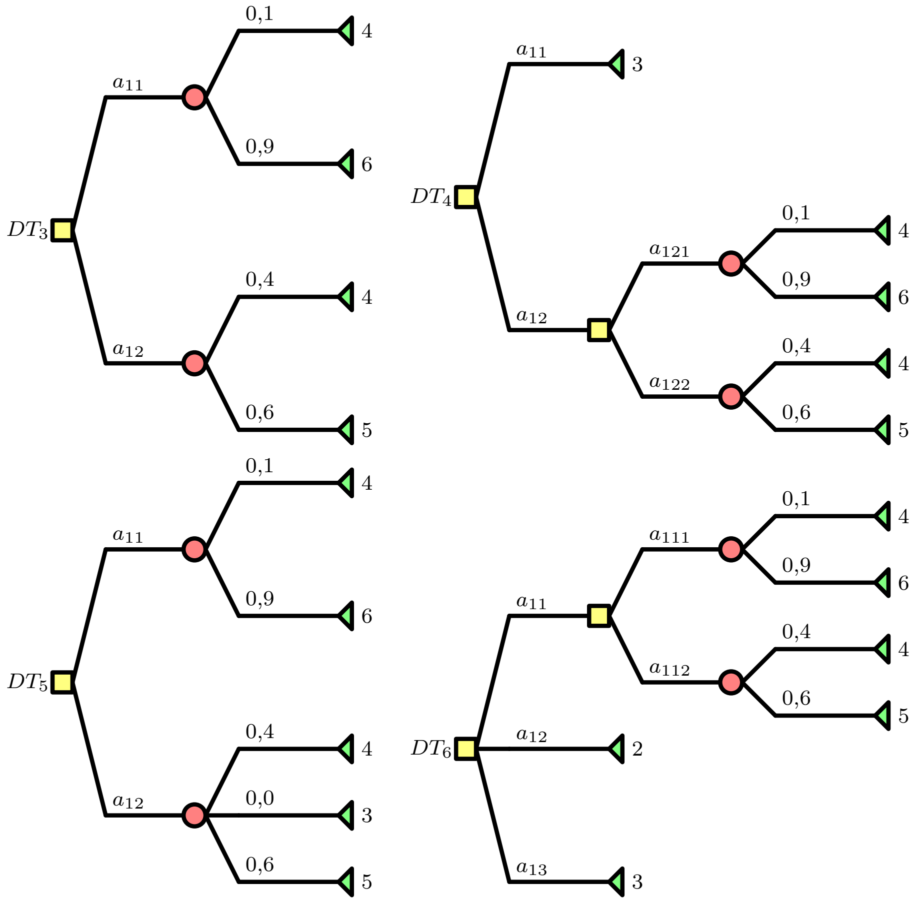
Johtopäätös on, että oraakkeli-informaation arvo sijoittaja K.:lle on $1000 - 580 = 420$ euroa.

Harjoitustehtäviä lukuun 3

3.1. Harjoitustehtävä. Erinäköiset päätöspuut voivat olla olennaisesti samoja. Seuraavassa on kuusi päätöspuuta: DT$_1$, DT$_2$, DT$_3$, DT$_4$, DT$_5$ ja DT$_6$. Kolme päätöspuuta ovat olennaisesti samoja. Mitkä kolme? Itse asiassa päätöksenteon kannalta neljä päätöspuuta ovat samoja. Mitkä neljä?







Vihje: a_1, a_2, a_{11}, jne. ovat vain nimikylttejä. Ne ovat vapaasti vaihdettavia.

3.2. Harjoitustehtävä. (a) Päätöspuu on *matala*, jos mitään sattumasolmua ei välittömästi seuraa sattumasolmu eikä mitään päätössolmua välittömästi seuraa päätössolmu. Osoita, että jokainen päätöspuu on ekvivalentti jonkin matalan päätöspuun kanssa.

(b) Päätöspuu on *binäärinen*, jos jokainen solmu (päätös tai sattuma), haarautuu täsmälleen kahdeksi alipuuksi. Osoita, että jokainen päätöspuu on ekvivalentti binäärisen päätöspuun kanssa.

(c) Onko jokainen päätöspuu ekvivalentti jonkin päätöspuun kanssa, joka on sekä matala että binäärinen?

(d) Esitä esimerkkien 3.1 ja 3.2 päätöspuut matalina päätöspuina.

3.3. Harjoitustehtävä. Colaco Oy valmistaa kasvisuutejuomia. Colaco harkitsee uuden suklaalla maustetun kasvisuutejuoman, Chocolan, markkinointia. Colacolla on kolme vaihtoehtoa:

1. Teettää markkinointitutkimus Chocolasta, ja sitten joko markkinoida tai olla markkinoimatta Chocolaa, riippuen tutkimuksen tuloksesta.
2. Markkinoida Chocolaa.
3. Olla markkinoimatta Chocolaa.

Ilman markkinointitutkimusta Colaco arvioi, että Chocolalla on 55% todennäköisyys menestyä ja 45% todennäköisyys flopata. Jos Chocola menestyy, Colaco saa 300.000€ voitot. Jos taas Chocola floppaa, Colaco kärsii 100.000€ tappiot. Jos markkinointitukimus antaa suotuisan tuloksen, niin Chocola menestyy markkinoilla 85% todennäköisyydellä. Markkinointitutkimus antaa suotuisan tuloksen 60% todennäköisyydellä. Jos taas markkinointitutkimus antaa epäsuotuisan tuloksen, niin Chocola menestyy 10% todennäköisyydellä. Markkinointitutkimus maksaa 30.000€.

Mitä Colacon tulisi tehdä?

3.4. Harjoitustehtävä. Douppausvalvontakomitean tulee päättää testataanko Narkomaan joukkue. Douppausvalvontakomitealla on käytössä testi, joka on 90% luotettava. Douppausvalvontakomitea arvioi, että keskimäärin 5% kaikista urheilijoista douppaa. Tilanteeseen liittyy kolmenlaisia kuluja:

$$\begin{aligned} c_1 &= \text{kulu, jos joukkuetta syytetään väärin douppauksesta,} \\ c_2 &= \text{kulu, jos joukkueen douppausta ei huomata,} \\ c_3 &= \text{kulu yksityisyyden loukkauksesta.} \end{aligned}$$

(a) Olkoon kulut $c_1 = 10$, $c_2 = 5$ ja $c_3 = 1$. Tuleekon douppausvalvontakomiten testata Narkomaan joukkue?
(b) Osoita että jos $c_1 > c_2 > c_3$, niin Narkomaan joukkuetta ei tule testata.

3.5. Harjoitustehtävä. Olkoon epävarman tilanteen todennäköisyysjakauma $p = (p_1, p_2, \ldots)$. Epävarmuuden, eli satunnaisuuden, suuruutta mitataan *entropialla*:

$$H(p) \quad = \quad -\sum_i p_i \ln p_i.$$

(a) Millainen jakauma maksimoi epävarmuuden eli entropian?
(b) Millainen jakauma minimoi epävarmuuden eli entropian?
(c) Kasvattaako vai vähentääkö esimerkissä 3.3 markkina-asiantuntijan käyttö entropiaa?

3.6. Harjoitustehtävä. (a) Kuinka paljon esimerkin 3.1 öljy-yhtiön kannattaisi korkeintaan maksaa oraakkelille, joka kertoo onko paikassa P öljyä vai ei?
(b) Kuinka paljon esimerkin 3.2 pankin kannattaisi korkeintaan maksaa asiakastutkimuksesta?
(c) Kuinka paljon esimerkin 3.2 pankin kannattaisi korkeintaan maksaa oraakkelille, joka kertoo pystyykö asiakas maksamaan lainansa takaisin vai ei?

3.7. Harjoitustehtävä. Omppukone Oy valmistaa liukuhihnalla muistipiirejä kymmenen piirin sarjoissa. Omppukone arvioi, että keskimäärin 80% sarjoista sisältää 10% viallisia piirejä ja 20% sarjoista sisältää 50% viallisia piirejä. Jos "hyvä sarja" (siis sellainen, jossa on vain 10% viallisia piirejä) lähetetään liukuhihnalla eteenpäin se tulee maksamaan prosessointikuluina 1.000€. Jos "huono sarja" (siis sellainen, jossa on 50% viallisia piirejä) lähetetään liukuhihnalla eteenpäin se tulee maksamaan prosessointikuluina 4.000€. Omppukone voi vaihtoehtoisesti korjata sarjan hinnalla 1.000€.

Korjattu sarja on automaattisesti “hyvä sarja”. Lisäksi Omppukone voi halutessaan 100 € hinnalla testata täsmälleen yhden piirin sarjasta.

(a) Mitä Omppukoneen tulee tehdä?
(b) Kuinka paljon Omppukoneen kannattaa korkeintaan maksaa piirin testaamisesta?
(c) Kuinka paljon Omppukoneen kannattaa maksaa oraakkelille, joka ilmoittaa jokaisesta sarjasta, onko se “hyvä sarja” vai “huono sarja”?

Huomautus: Tehtävässä oletetaan, että Omppukone voi testata *täsmälleen* yhden piirin sarjasta. Tilanne muuttuu paljon mielenkiintoisemmaksi (eli vaikeammaksi), jos Omppukone voi testata niin monta piiriä kuin haluaa, joko samanaikaisesti tai peräkkäin. Innokas opiskelija voi halutessaan ratkaista Omppukoneen ongelman tässä laajennetussa muodossa.

LUKU 4

Todennäköisyyksien estimointi

Esitämme menetelmiä todennäköisyyksien estimointiin. Kaikki esitettävät menetelmät olettavat, että estimointiin käytetty data on (riittävän) *riippumatonta* ja *samoin jakautunutta*. Harjoitustehtävissä 4.3(b), 4.6 ja 4.7 näistä oletuksista luovutaan hieman.

Suhteellisten frekvenssien menetelmä

Varmaankin yksinkertaisin ja luontevin tapa estimoida todennäköisyyksiä on *suhteellisten frekvenssien menetelmä* eli käyttää empiiristä todennäköisyysjakaumaa. Tällöin satunnaiskokeeseen X liittyvän tapahtuman $\{X = x\}$ estimoitu todennäköisyys on sen esiintymiskertojen suhteellinen lukumäärä — eli frekvenssi — pitkässä toistojen sarjassa. Menetelmässä siis oletetaan, että toistetut satunnaiskokeet $X_1, X_2, \ldots$ ovat (riittävän) *riippumattomia* ja *samankaltaisia*. Menetelmä perustuu todennäköisyyden frekvenssitulkintaan ja sitä kautta suurten lukujen lakiin.

Jos on saatu havainnot $x_1, \ldots, x_n$, niin suhteellisten frekvenssien menetelmän antama estimaatti todennäköisyydelle $\mathrm{P}(X = x)$ on

$$\mathrm{P}(X = x) \quad \approx \quad \frac{n(x|x_1, \ldots, x_n)}{n},$$

missä $n(x|x_1, \ldots, x_n)$ on arvon x esiintymiskertojen lukumäärä havainnoissa $x_1, \ldots, x_n$.

4.1. Esimerkki. Jos havainnot ovat $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 42$, niin estimoitu todennäköisyysjakauma on

$$\begin{aligned} p_0 &= \mathrm{P}(X = 0) &= 3/6 &= 0{,}5000, \\ p_1 &= \mathrm{P}(X = 1) &= 2/6 &= 0{,}3333, \\ p_{42} &= \mathrm{P}(X = 42) &= 1/6 &= 0{,}1667. \end{aligned}$$

Jos sitten saadaan uusi havainto $x_7 = 0$, niin uusi estimoitu todennäköisyysjakauma on

$$\begin{aligned} p_0 &= \mathrm{P}(X = 0) &= 4/7 &= 0{,}5714, \\ p_1 &= \mathrm{P}(X = 1) &= 2/7 &= 0{,}2857, \\ p_{42} &= \mathrm{P}(X = 42) &= 1/7 &= 0{,}1429. \end{aligned}$$

Seuraava uusi havainto $x_8 = -1$, aiheuttaa uuden estimoitun todennäköisyysjakauman

$$\begin{aligned} p_{-1} &= \mathrm{P}(X=-1) &= 1/8 &= 0{,}1250, \\ p_0 &= \mathrm{P}(X=0) &= 4/8 &= 0{,}5000, \\ p_1 &= \mathrm{P}(X=1) &= 2/8 &= 0{,}2500, \\ p_{42} &= \mathrm{P}(X=42) &= 1/8 &= 0{,}1250. \end{aligned}$$

Jos vielä saadaan uusi havainto $x_9 = \pi$, niin uusi estimoitu todennäköisyysjakauma on

$$\begin{aligned} p_{-1} &= \mathrm{P}(X=-1) &= 1/9 &= 0{,}1111, \\ p_0 &= \mathrm{P}(X=0) &= 4/9 &= 0{,}4444, \\ p_1 &= \mathrm{P}(X=1) &= 2/9 &= 0{,}2222, \\ p_\pi &= \mathrm{P}(X=\pi) &= 1/9 &= 0{,}1111, \\ p_{42} &= \mathrm{P}(X=42) &= 1/9 &= 0{,}1111. \end{aligned}$$

Suhteellisten frekvenssien menetelmässä siis uusi data voi sekä muuttaa vanhoja todennäköisyyksiä että tuoda mukaan uusia tulosmahdollisuuksia. Ilmeistä on myös, että menetelmä suppenee hitaasti. Toisin sanoen, jos dataa on vähän, niin estimaatit voivat muuttua paljonkin tulevaisuudessa.

4.2. Esimerkki. Leipuri Pulla myy pullia Kumputien Leipomossa. Hän paistaa pullat aamulla ja myy ne lounastauolla viereisen Ministeriön Erikoisosaston virkamiehille. Eilisiä pullia ei voi tänään enää myydä. Leipuri Pullan leipomo on auki maanantaista perjantaihin, muttei pyhinä tai aattoina.

Pullan paistaminen maksaa leipuri Pullalle 0,20 € pullalta, ja hän myy niitä 1,00 € kappalehintaan. Siten, jos leipuri Pulla paistaa aamulla i pullaa ja häneltä kysytäään lounastauolla j pullaa, niin hänen voittonsa on

$$r_{ij} \quad = \quad 1{,}00\,€ \cdot \min(i,j) - 0{,}20\,€ \cdot i.$$

Leipuri Pullan tulee päättää, kuinka monta pullaa pitää paistaa aamulla lounastaukoa varten, jotta hän saisi parhaan mahdollisen voiton.

Leipuri pulla on kerännyt seuraavan datan myymistään pullista:

	Lokakuu 2009				
Viikko	Ma	Ti	Ke	To	Pe
40				2	0
41	3	7	10	4	0
42	7	5	10	6	4
43	4	5	6	10	2
44	8	6	5	6	2

	Marraskuu 2009				
Viikko	Ma	Ti	Ke	To	Pe
45	8	4	3	3	3
46	4	4	6	8	2
47	8	5	8	2	0
48	3	10	9	5	2
49	7				

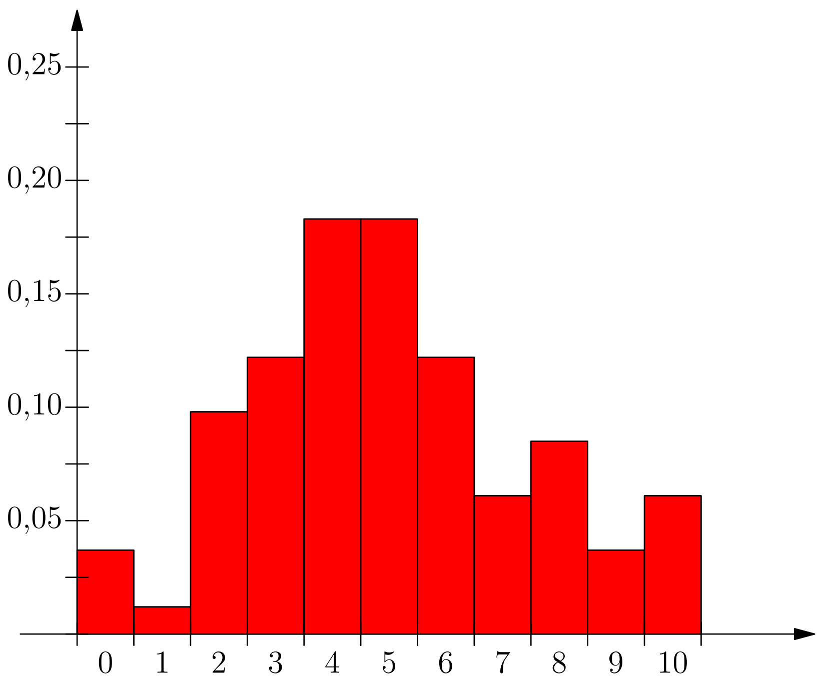
	Joulukuu 2009				
Viikko	Ma	Ti	Ke	To	Pe
49		4	4	6	2
50	7	5	5	10	3
51	4	4	5	6	1
52	5	4	4	–	–
53	7	5	9	–	

	Tammikuu 2010				
Viikko	Ma	Ti	Ke	To	Pe
53					–
1	3	4	–	4	2
2	9	8	5	6	4
3	5	6	5	6	3
4	3	8	5	5	3

Datapisteiden lukumäärä on 82 ja saatujen arvojen $0, \ldots, 10$ suhteelliset frekvenssit $p_k = \mathrm{P}(X = k)$ $(k = 0, \ldots, 10)$ ovat

$$
\begin{aligned}
p_0 &= 3/82 = 0{,}037, & p_5 &= 15/82 = 0{,}183,\\
p_1 &= 1/82 = 0{,}012, & p_6 &= 10/82 = 0{,}122,\\
p_2 &= 8/82 = 0{,}098, & p_7 &= 5/82 = 0{,}061,\\
p_3 &= 10/82 = 0{,}122, & p_8 &= 7/82 = 0{,}085,\\
p_4 &= 15/82 = 0{,}183, & p_9 &= 3/82 = 0{,}037,\\
 & & p_{10} &= 5/82 = 0{,}061.
\end{aligned}
$$

Graafisesti saatu empiirinen todennäköisyysjakauma on siis:



Esimerkin 4.2 leipuri Pulla vaihtoehdot ovat

$$a_i = \text{“Paistetaan aamulla } i \text{ pullaa”}.$$

Hän arvottaa ne riskineutraalisti, eli odotusarvon mukaan:

$$\begin{aligned}V(a_i) &= \mathrm{E}(a_i) = \sum_j r_{ij}\, p_j \\ &= \sum_{j=0}^{10} \Big(\min(i,j) - 0{,}2i \Big)\, p_j.\end{aligned}$$

Jos leipuri Pulla ja uskoo suhteellisten frekvenssien menetelmään, hänen estimaattinsa todennäköisyyksielle on siis annettu edellä ja saamme numeeriset arvot

$$\begin{aligned}V(a_0) &= 0{,}00 \cdot 0{,}037 + 0{,}00 \cdot 0{,}012 + 0{,}00 \cdot 0{,}098 + 0{,}00 \cdot 0{,}122 + \\ &\quad 0{,}00 \cdot 0{,}183 + 0{,}00 \cdot 0{,}183 + 0{,}00 \cdot 0{,}122 + 0{,}00 \cdot 0{,}061 + \\ &\quad 0{,}00 \cdot 0{,}085 + 0{,}00 \cdot 0{,}037 + 0{,}00 \cdot 0{,}061 = 0{,}000,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(a_1) &= -0{,}20 \cdot 0{,}037 + 0{,}80 \cdot 0{,}012 + 0{,}80 \cdot 0{,}098 + 0{,}80 \cdot 0{,}122 + \\ &\quad 0{,}80 \cdot 0{,}183 + 0{,}80 \cdot 0{,}183 + 0{,}80 \cdot 0{,}122 + 0{,}80 \cdot 0{,}061 + \\ &\quad 0{,}80 \cdot 0{,}085 + 0{,}80 \cdot 0{,}037 + 0{,}80 \cdot 0{,}061 = 0{,}764,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(a_2) &= -0{,}40 \cdot 0{,}037 + 0{,}60 \cdot 0{,}012 + 1{,}60 \cdot 0{,}098 + 1{,}60 \cdot 0{,}122 + \\ &\quad 1{,}60 \cdot 0{,}183 + 1{,}60 \cdot 0{,}183 + 1{,}60 \cdot 0{,}122 + 1{,}60 \cdot 0{,}061 + \\ &\quad 1{,}60 \cdot 0{,}085 + 1{,}60 \cdot 0{,}037 + 1{,}60 \cdot 0{,}061 = 1{,}516,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(a_3) &= -0{,}60 \cdot 0{,}037 + 0{,}40 \cdot 0{,}012 + 1{,}40 \cdot 0{,}098 + 2{,}40 \cdot 0{,}122 + \\ &\quad 2{,}40 \cdot 0{,}183 + 2{,}40 \cdot 0{,}183 + 2{,}40 \cdot 0{,}122 + 2{,}40 \cdot 0{,}061 + \\ &\quad 2{,}40 \cdot 0{,}085 + 2{,}40 \cdot 0{,}037 + 2{,}40 \cdot 0{,}061 = 2{,}169,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(a_4) &= -0{,}80 \cdot 0{,}037 + 0{,}20 \cdot 0{,}012 + 1{,}20 \cdot 0{,}098 + 2{,}20 \cdot 0{,}122 + \\ &\quad 3{,}20 \cdot 0{,}183 + 3{,}20 \cdot 0{,}183 + 3{,}20 \cdot 0{,}122 + 3{,}20 \cdot 0{,}061 + \\ &\quad 3{,}20 \cdot 0{,}085 + 3{,}20 \cdot 0{,}037 + 3{,}20 \cdot 0{,}061 = 2{,}701,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(a_5) &= -1{,}00 \cdot 0{,}037 + 0{,}00 \cdot 0{,}012 + 1{,}00 \cdot 0{,}098 + 2{,}00 \cdot 0{,}122 + \\ &\quad 3{,}00 \cdot 0{,}183 + 4{,}00 \cdot 0{,}183 + 4{,}00 \cdot 0{,}122 + 4{,}00 \cdot 0{,}061 + \\ &\quad 4{,}00 \cdot 0{,}085 + 4{,}00 \cdot 0{,}037 + 4{,}00 \cdot 0{,}061 = 3{,}050,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(a_6) &= -1{,}20 \cdot 0{,}037 - 0{,}20 \cdot 0{,}012 + 0{,}80 \cdot 0{,}098 + 1{,}80 \cdot 0{,}122 + \\ &\quad 2{,}80 \cdot 0{,}183 + 3{,}80 \cdot 0{,}183 + 4{,}80 \cdot 0{,}122 + 4{,}80 \cdot 0{,}061 + \\ &\quad 4{,}80 \cdot 0{,}085 + 4{,}80 \cdot 0{,}037 + 4{,}80 \cdot 0{,}061 = 3{,}216,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(a_7) &= -1{,}40 \cdot 0{,}037 - 0{,}40 \cdot 0{,}012 + 0{,}60 \cdot 0{,}098 + 1{,}60 \cdot 0{,}122 + \\ &\quad 2{,}60 \cdot 0{,}183 + 3{,}60 \cdot 0{,}183 + 4{,}60 \cdot 0{,}122 + 5{,}60 \cdot 0{,}061 + \\ &\quad 5{,}60 \cdot 0{,}085 + 5{,}60 \cdot 0{,}037 + 5{,}60 \cdot 0{,}061 = 3{,}260,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(a_8) &= -1{,}60 \cdot 0{,}037 - 0{,}60 \cdot 0{,}012 + 0{,}40 \cdot 0{,}098 + 1{,}40 \cdot 0{,}122 + \\ &\quad 2{,}40 \cdot 0{,}183 + 3{,}40 \cdot 0{,}183 + 4{,}40 \cdot 0{,}122 + 5{,}40 \cdot 0{,}061 + \\ &\quad 6{,}40 \cdot 0{,}085 + 6{,}40 \cdot 0{,}037 + 6{,}40 \cdot 0{,}061 = 3{,}242,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(a_9) &= -1{,}80 \cdot 0{,}037 - 0{,}80 \cdot 0{,}012 + 0{,}20 \cdot 0{,}098 + 1{,}20 \cdot 0{,}122 + \\ &\quad 2{,}20 \cdot 0{,}183 + 3{,}20 \cdot 0{,}183 + 4{,}20 \cdot 0{,}122 + 5{,}20 \cdot 0{,}061 + \\ &\quad 6{,}20 \cdot 0{,}085 + 7{,}20 \cdot 0{,}037 + 7{,}20 \cdot 0{,}061 \quad = \quad 3{,}140, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(a_{10}) &= -2{,}00 \cdot 0{,}037 - 1{,}00 \cdot 0{,}012 + 0{,}00 \cdot 0{,}098 + 1{,}00 \cdot 0{,}122 + \\ &\quad 2{,}00 \cdot 0{,}183 + 3{,}00 \cdot 0{,}183 + 4{,}00 \cdot 0{,}122 + 5{,}00 \cdot 0{,}061 + \\ &\quad 6{,}00 \cdot 0{,}085 + 7{,}00 \cdot 0{,}037 + 8{,}00 \cdot 0{,}061 \quad = \quad 3{,}001. \end{aligned}$$

Riskeneutraali leipuri Pulla paistaa siis 7 pullaa aamulla.

Suhteellisten frekvenssien menetelmän hyviä ja huonoja puolia.

- $\oplus$ helppo ymmärtää ja toteuttaa,
- $\oplus$ ei perustu mihinkään teoreettiseen malliin, joten mallivirheen riskiä ei ole,
- $\ominus$ ei mallita tilanteeseen mahdollisesti liittyvää erikoisluonnetta,
- $\ominus$ vaatii paljon dataa, jotta todennäköisyydet olisivat luotettavasti estimoidut.

Teoreettisen mallin sovittaminen

Tarkastelemme ns. *parametristä tilastollista päättelyä.*

Joskus voidaan satunnaiskokeesta X olettaa jotain. Tyypillisesti oletetaan, että X on jakautunut jonkin tunnetun jakauman — mutta tuntemattoman parametrin — mukaan. Esimerkiksi kolikonheitto on $\mathrm{Bin}(1,\theta)$-jakautunut, missä θ — klaavan todennäköisyys — on tuntematon parametri. Samoin, jos heitetään kolikkoa 3 kertaa peräkkäin ja lasketaan klaavat, niin tulos on $\mathrm{Bin}(3,\theta)$-jakautunut. Satunnaiskokeen jakauman tyyppi siis tiedetään, mutta täsmentävä parametritieto puuttuu. Tuntematon parametri pitää siis estimoida datasta. Menetelmässä oletetaan, että satunnaiskokeet $X_1, X_2, \ldots$ ovat (riittävän) *riippumattomia* ja *samankaltaisia*, ja että satunnaiskokeen X jakauma tunnetaan "parametria vaille". Menetelmä perustuu suurten lukujen lakiin.

Tuntemattoman parametrin estimointiin on olemassa ainakin kaksi kilpailevaa menetelmää: bayesläinen tilastollinen päättely ja suurimman uskottavuuden periaate.

Bayesläistä tilastollista päättelyä emme käsittele.

Suurimman uskottavuuden periaate on — kuten nimestäkin käy ilmi — se, että uskomme satunnaisten tapahtumien tapahtuvan todennäköisimmällä mahdollisella tavalla. Toisin sanoin: mitä uskottavampi tapahtuma on, sitä enemmän siihen uskomme. Tarkemmin suurimman uskottavuuden periaatteessa on kyse seuraavasta:

- on annettu data, eli havainnot, $x_1, \ldots, x_n$,
- on mallinnettu yksittäisen havainnon x todennäköisyys, tai todennäköisyystiheys[1], $p(x|\theta)$, missä parametri θ on tuntematon.

[1] *Todennäköisyystiheys* $p(x)$ tarkoittaa sitä, että todennäköisyys saada havainto väliltä $[a,b]$ on integraali

$$\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x,$$

Datan $x_1, \dots, x_n$ todennäköisyys, tai todennäköisyystiheys, jos θ tunnettaisiin olisi

$$p(x_1, \dots, x_n|\theta) \;=\; p(x_1|\theta) \cdots p(x_n|\theta)$$

(tulomuoto johtuu riippumattomuusoletuksesta). Koska θ on tuntematon tulkitsemme todennäköisyysfunktion $p(x_1, \dots, x_n|\theta)$ toisin päin datan *uskottavuutena* $L(\theta|x_1, \dots, x_n)$. Nyt parametrin θ *suurimman uskottavuuden estimaattori* $\hat{\theta}$ on se tuntemattoman parametrin θ arvo, jolla uskottavuus $L(\theta|x_1, \dots, x_n)$ maksimoituu:

$$\hat{\theta} \;=\; \operatorname*{argmax}_{\theta} L(\theta|x_1, \dots, x_n).$$

Käytännössä $\hat{\theta}$ lasketaan usein tyypillisellä "koulupojan optimointimenetelmällä": derivoidaan uskottavuus $L(\theta|x_1, \dots, x_n)$ parametrin θ suhteen, ja optimi $\hat{\theta}$ löytyy derivaatan nollakohdasta. Toisin sanoen optimi $\hat{\theta}$ on se piste, jossa

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}(\hat{\theta}|x_1, \dots, x_n) \;=\; 0.$$

Koska tulojen derivointi on vaivalloista, tarkastellaan usein *log-uskottavuutta*

$$\ell(\theta|x_1, \dots, x_n) \;=\; \ln L(\theta|x_1, \dots, x_n).$$

Koska logaritmi on aidosti kasvava funktio on log-uskottavuuden maksimointi yhtäpitävää uskottavuuden maksimoinnin kanssa. Log-uskottavuutta on kuitenkin mukavampi derivoida, sillä se on summamuotoinen:

$$\begin{aligned} \ell(\theta|x_1, \dots, x_n) &= \ln\Big(p(x_1|\theta) \cdots p(x_n|\theta)\Big) \\ &= \ln p(x_1|\theta) + \cdots + \ln p(x_n|\theta). \end{aligned}$$

Siten, käyttämällä derivointisääntöjä

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(f(\theta) + g(\theta)\Big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}f(\theta) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}g(\theta), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln f(\theta) &= \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}(\theta)}{f(\theta)}, \end{aligned}$$

saamme

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\theta}(\theta|x_1, \dots, x_n) \;=\; \frac{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta}(x_1|\theta)}{p(x_1|\theta)} + \cdots + \frac{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\theta}(x_n|\theta)}{p(x_n|\theta)}.$$

Teoreettisen mallin sovittamismenetelmän hyviä ja huonoja puolia.

- $\oplus$ tarvitsee vain vähän dataa,
- $\oplus$ mahdollistaa taustatietojen käytön mallinnuksessa,
- $\ominus$ mallivirheen riski,
- $\ominus$ joskus vaikea ymmärtää tai toteuttaa.

Teoreettisia malleja.

eli todennäköisyys, että saatu havainto on Δ:n päässä pisteestä x on noin $p(x)\Delta$, kun Δ on pieni.

Binomimalli. Tarkastelemme satunnaiskoetta, jossa on n riippumatonta samankaltaista toistoa ja jokaisella kerralla voidaan joko "onnistua" todennäköisyydellä θ tai "epäonnistua" todennäköisyydellä $1-\theta$. Oletamme, että n on tunnettu ja θ on tuntematon parametri.

Binomimallissa parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori on "onnistumisten" lukumäärä jaettuna toistojen lukumäärällä. Perustelemme tämän. Olkoon data $x_1, \ldots, x_n$, missä $x_k = 1$, jos toistolla k onnistuttiin ja $x_k = 0$ muulloin. Tällöin "onnistumisten" lukumäärä jaettuna toistojen lukumäärällä on keskiarvo

$$\bar{x} \quad = \quad \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Nyt $n\bar{x}$ on "onnistumisten" lukumäärä, ja siten[2]

$$p(x_1, \ldots, x_n | \theta) \quad = \quad \theta^{n\bar{x}}(1-\theta)^{n-n\bar{x}}.$$

Saamme log-uskottavuuden

$$\begin{aligned}
\ell(\theta | x_1, \ldots, x_n) &= \ln\left(\theta^{n\bar{x}}(1-\theta)^{n-n\bar{x}}\right) \\
&= \ln\left(\theta^{n\bar{x}}\right) + \ln\left((1-\theta)^{n-n\bar{x}}\right) \\
&= n\bar{x}\ln\theta + (n - n\bar{x})\ln(1-\theta).
\end{aligned}$$

Siten

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\theta}(\theta | x_1, \ldots, x_n) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(n\bar{x}\ln\theta + (n - n\bar{x})\ln(1-\theta)\Big) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(n\bar{x}\ln\theta\Big) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big((n - n\bar{x})\ln(1-\theta)\Big) \\
&= n\bar{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln\theta + (n - n\bar{x})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln(1-\theta) \\
&= n\bar{x} \cdot \frac{1}{\theta} + (n - n\bar{x}) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{1-\theta} \\
&= \frac{n\bar{x}}{\theta} - \frac{n - n\bar{x}}{1-\theta} \\
&= \frac{(1-\theta)n\bar{x} - \theta(n - n\bar{x})}{\theta(1-\theta)} \\
&= \frac{n\bar{x} - \theta n\bar{x} - \theta n + \theta n\bar{x}}{\theta(1-\theta)} \\
&= \frac{n(\bar{x} - \theta)}{\theta(1-\theta)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

jos ja vain jos $\theta = \bar{x}$.

---

[2]Oikeastaan binomimallissa yleensä oletetaan, että "onnistumisten" paikkoja $x_1, \ldots, x_n$ ei havaita, vaan ainoastaan niiden lukumäärä $n\bar{x}$. Tällöin oikea todennäköisyysfunktio on

$$p(n\bar{x} | \theta) \quad = \quad \binom{n}{n\bar{x}}\theta^{n\bar{x}}(1-\theta)^{n-n\bar{x}}.$$

Koska binomikerroin $\binom{n}{n\bar{x}}$ on vakio parametrin θ suhteen ei tällä kuitenkaan ole mitään vaikutusta suurimman uskottavuuden analyysiin.

Leipuri Pullan esimerkissä 4.2 voimme ajatella, että päivittäiset pullanmyynnit ovat binomijakautuneet parametrein 10 (tunnettu)[3] ja θ (tuntematon). Tällöin 82 päivän pullanmyynnit on binomijakautunut parametrein 820 ja θ. Suurimman uskottavuuden estimaattori parametrille θ on tällöin pullien kokonaismyynti jaettuna 820:lla:

$$\hat{\theta} = \frac{410}{820} = 0{,}5.$$

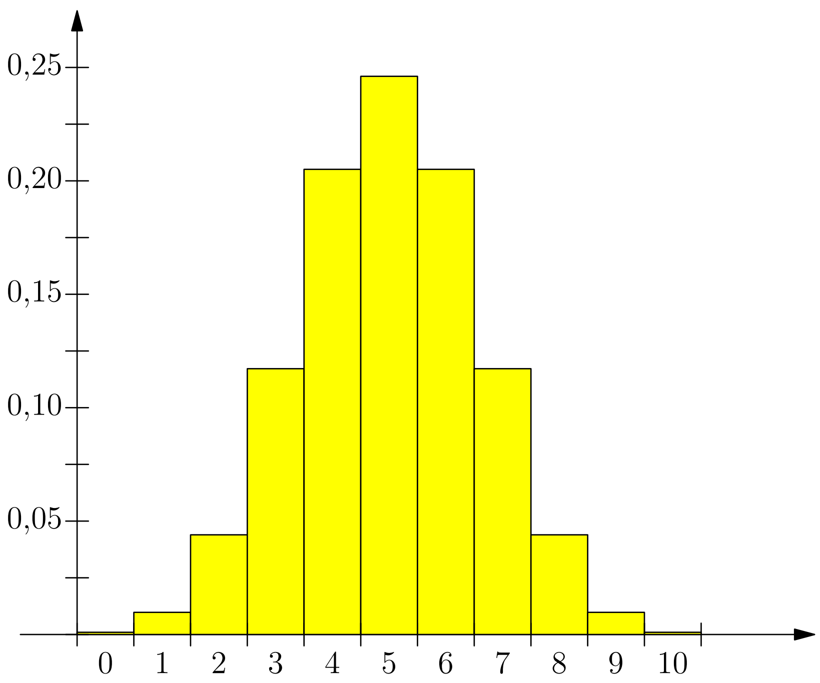
Erityisesti siis arvio todennäköisyydelle, että jonakin päivän myydään x pullaa ($x = 0, 1, \ldots, 10$) on

$$\binom{10}{x} 0{,}5^x \cdot 0{,}5^{10-x} = \binom{10}{x} 0{,}5^{10}.$$

Sijoittamalla luvut $x = 0, \ldots, 10$ yllä olevaan kaavaan saamme numeeriset arvot

$$\begin{aligned} & & p_3 &= 0{,}1172, & p_7 &= 0{,}1172,\\ p_0 &= 0{,}0010, & p_4 &= 0{,}2051, & p_8 &= 0{,}0439,\\ p_1 &= 0{,}0098, & p_5 &= 0{,}2461, & p_9 &= 0{,}0098,\\ p_2 &= 0{,}0439, & p_6 &= 0{,}2051, & p_{10} &= 0{,}0010. \end{aligned}$$

Kuvallinen esitys tästä jakaumasta on (kuvan skaala on sama kuin suhteellisten frekvessien tapauksessa):



Esimerkin 4.2 leipuri Pulla vaihtoehdot ovat

$$a_i = \text{“Paistetaan aamulla } i \text{ pullaa”}.$$

[3]Parametrin n arvoksi on valittu rohkeasti suurimman havainnon arvo. Jos joskus tulevaisuudessa havaitaan suurempi arvo, esimerkiksi 42, aiheuttaa tämä ongelmia.

Hän arvottaa ne riskineutraalisti, eli odotusarvon mukaan:

$$\begin{aligned} V(a_i) &= \mathrm{E}(a_i) = \sum_j r_{ij}\, p_j \\ &= \sum_{j=0}^{10} \Big(\min(i,j) - 0{,}2i\Big) \cdot \binom{10}{j} 0{,}5^{10} \end{aligned}$$

$(i = 0, \ldots, 10)$, missä viimeinen yhtälö tulee siitä, että leipuri Pulla uskoo binomimalliin parametrein 10 ja 0,5. Jätämme harjoitustehtäväksi 4.1(a) laskea leipuri Pullan arvotukset tässä tilanteessa ja määrätä hänen optimaalinen valintansa.

Poisson-malli. Binomimalli olettaa, että satunnaiskokeen tuloksen mahdolliset arvot $0, 1, \ldots, n$ on rajoitettu (ja tunnettu) joukko. Näin kuitenkin on varsin harvoin, erityisestikään ylärajan n kohdalla. Usein hyvä malli lukumäärämuuttujalle on Poisson-jakauma. Poisson-jakaumaan päädytään esimerkiksi $\mathrm{Bin}(n, \theta)$-jakaumien raja-arvona, kun annetaan $n \to \infty$ ja $\theta \to 0$ siten, että $n\theta \to \lambda$. [4] *Poisson-jakauma* parametrilla λ on

$$p(x|\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Poisson-parametri λ on tyypillisesti tuntematon. Johdamme nyt sen suurimman uskottavuuden estimaattorin.

Olkoot (riippumattomat) havainnot $x_1, \ldots, x_n$ Poisson(λ)-jakaumasta. Tällöin log-uskottavuus on

$$\begin{aligned} &\ell(\lambda|x_1, \ldots, x_n) \\ &= \ln p(x_1|\lambda) + \cdots + \ln p(x_n|\lambda) \\ &= \ln\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}\right) + \cdots + \ln\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_n}}{x_n!}\right) \\ &= \Big(\ln e^{-\lambda} + \ln \lambda^{x_1} - \ln x_1!\Big) + \cdots + \Big(\ln e^{-\lambda} + \ln \lambda^{x_n} - \ln x_n!\Big) \\ &= -n\lambda + (x_1 + \cdots + x_n)\ln\lambda - \big(\ln x_1! + \cdots + \ln x_n!\big). \end{aligned}$$

Siten

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda|x_1, \ldots, x_n) = -n + \frac{x_1 + \cdots + x_n}{\lambda} = 0,$$

jos ja vain jos

$$\lambda = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \bar{x}.$$

Siten suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\lambda}$ on otoskeskiarvo $\bar{x}$.

Leipuri Pullan esimerkissä 4.2 $\hat{\lambda} = 410/82 = 5$, mikä on olennaisesti sama arvo kuin edellä binomimallin tapauksessa. Erityisesti siis arvio myydä x pullaa $(x = 0, 1, 2, \ldots)$ jonakin päivänä on

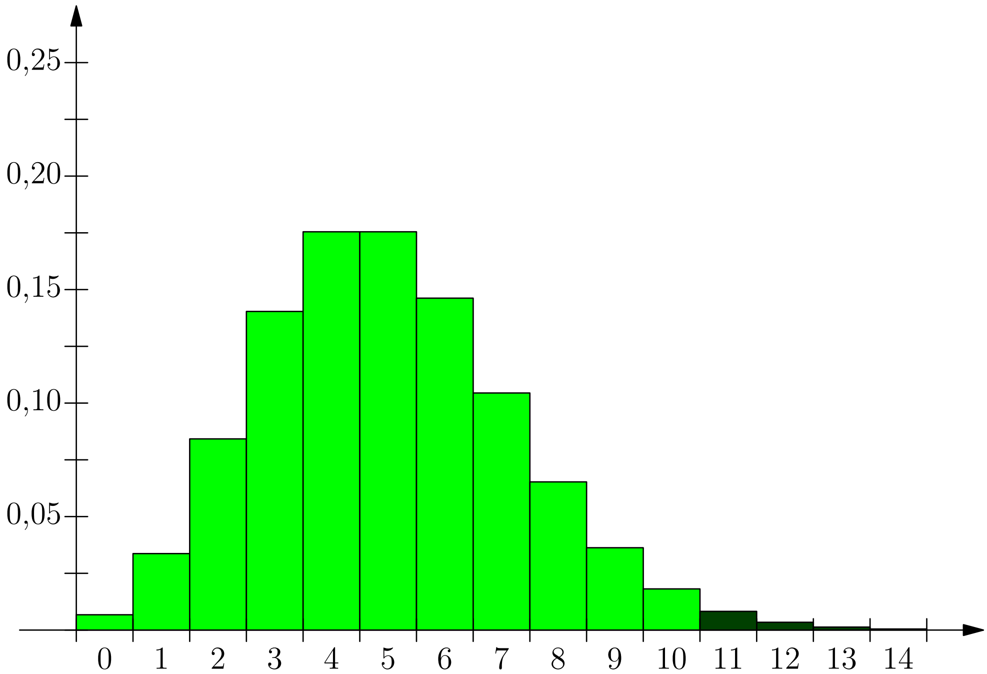
$$e^{-5}\frac{5^x}{x!}.$$

[4] Tästä syystä Poisson-jakaumaa kutsutaan joskus leikkisästi "pienten lukujen laiksi". Vertaus liittyy tietysti "suurten lukujen lakiin" ja siihen liittyvään normaalijakaumaan.

Tulosmahdollisuuksia on nyt ääretön määrä. Sijoittamalla yllä olevaan kaavaan x:n paikalle alkupäätä $x = 0, 1, 2, \ldots$ saamme numeeriset todennäköisyydet

$$
\begin{aligned}
& & p_5 &= 0{,}1755, & p_{11} &= 0{,}0082,\\
p_0 &= 0{,}0067, & p_6 &= 0{,}1462, & p_{12} &= 0{,}0034,\\
p_1 &= 0{,}0337, & p_7 &= 0{,}1044, & p_{13} &= 0{,}0013,\\
p_2 &= 0{,}0842, & p_8 &= 0{,}0653, & p_{14} &= 0{,}0005,\\
p_3 &= 0{,}1403, & p_9 &= 0{,}0363, & p_{15} &= 0{,}0002,\\
p_4 &= 0{,}1755, & p_{10} &= 0{,}0181, & p_{16} &= 0{,}0000.
\end{aligned}
$$

Kuvallinen esitys tämän jakauman *alusta* on (Kuvan skaala on sama kuin suhteellisten frekvessien ja binomimallin tapauksissa. Tummanvihreällä on merkitty muutamia tulosmahdollisuuksia, joita ei aikaisemmin pidetty mahdollisina):



Esimerkin 4.2 leipuri Pulla vaihtoehdot ovat

$$a_i = \text{“Paistetaan aamulla } i \text{ pullaa”}.$$

Hän arvottaa ne riskineutraalisti, eli odotusarvon mukaan:

$$
\begin{aligned}
V(a_i) = \mathrm{E}(a_i) &= \sum_j r_{ij}\, p_j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\min(i,j) - 0{,}2i \Big)\, e^{-5} \frac{5^j}{j!}
\end{aligned}
$$

($i = 0, \ldots, 10$), missä viimeinen yhtälö tulee siitä, että leipuri Pulla uskoo Poisson-malliin parametrilla 5. Jotta voisimme laskea edellisen kaavan äärettömän summan, harrastamme hieman algebraa:

$$\begin{aligned}
V(a_i) &= \sum_{j=0}^{\infty} \Big(1{,}00 \cdot \min(i,j) - 0{,}20 \cdot i\Big) \cdot e^{-5}\frac{5^j}{j!} \\
&= e^{-5}\sum_{j=0}^{\infty} \min(i,j)\frac{5^j}{j!} - 0{,}2ie^{-5}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{5^j}{j!} \\
&= e^{-5}\sum_{j=0}^{\infty} \min(i,j)\frac{5^j}{j!} - 0{,}2i \\
&= e^{-5}\sum_{j=0}^{i} j\frac{5^j}{j!} + ie^{-5}\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{5^j}{j!} - 0{,}2i \\
&= e^{-5}\sum_{j=0}^{i} j\frac{5^j}{j!} + i\left(1 - e^{-5}\sum_{j=0}^{i}\frac{5^j}{j!}\right) - 0{,}2i.
\end{aligned}$$

Tämä lauseke voidaan laskea kynällä ja paperilla (tai tietokoneella, jos et ole Työn Sankari™). Jätämme harjoitustehtäväksi 4.1(b) laskea leipuri Pullan arvotukset tässä tilanteessa ja määrätä hänen optimaalinen valintansa.

Pearson–Tukey-menetelmä

Joskus data on turhan hienojakoista tarpeisiimme nähden. Esimerkiksi päätöspuissa turhan hienojakoinen data aiheuttaa sattumasolmuissa paljon haarautumisia. Hienojakoisesta datasta pääsee eroon *luokittelemalla* — tavalla tai toisella. Yksi tapa luokitella dataa on Pearson–Tukey-menetelmä. Oletamme edelleen, että data on (riittävän) *riippumatonta* ja *samoin jakautunutta*.

Pearson–Tukey-menetelmä tiivistää todennäköisyysjakauman, joko empiirisen tai teoreettisen, kolmen pisteen jakaumaksi siten, että jakauma 0,05-fraktiili ja 0,95-faktiili saavat molemmat todennäköisyyden 0,185 ja 0,5-fraktiili, eli mediaani, saa todennäköisyyden 0,630. Menetelmä on *ad hoc*[5], mutta sen on havaittu toimivan kohtalaisen hyvin, jos tuntematon jakauma on yksihuippuinen ja symmetrinen.

Huomattavaa Pearson–Tukey-menetelmässä on, että sen todennäköisyydet — 0,185, 0,630 ja 0,185 — ovat aina samat. Muuttuvat suureet ovat fraktiilien arvot. Toisin sanoen jakauman muoto on aina samankaltainen, mutta paikka vaihtelee.

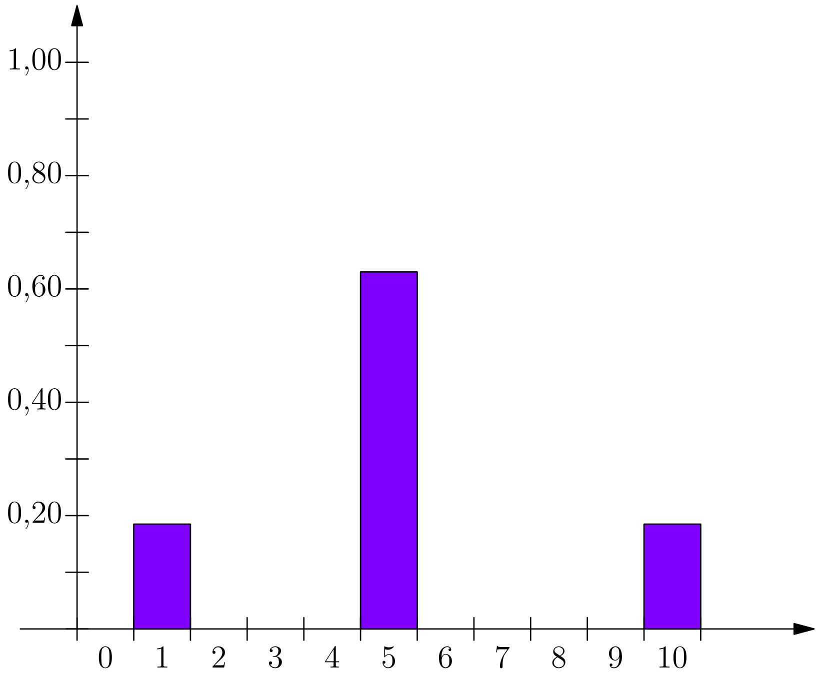
Leipuri Pullan esimerkissä 4.2 datapisteitä oli 82. Siten 0,05-fraktiili on suurin neljästä pienimmästä havainnosta. Tämä on 1, sillä pienimmät havainnot olivat $0, 0, 0, 1$. Vastaavasti neljä suurinta havaintoa olivat $10, 10, 10, 10$. Siten 0,95-fraktiili on 10. Mediaani taas on järjestyksessä 41.

[5] Ad hoc tarkoittaa "tätä varten". Se on hieno tapa sanoa, että meillä ei ole mitään hyvinperusteltua syytä toimia niin kuin toimimme.

havainto. Tämä on 5. Siten Pearson–Tukey-aproksimaatio pullanmyyntitodennäköisyyksille on

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 0{,}185, \\
p_5 &= 0{,}630, \\
p_{10} &= 0{,}185.
\end{aligned}
$$

Kuvallisesti Pearson–Tukey-todennäköisyysjakauma on siis (kuva on eri skaalalla kuin kolme edellistä kuvaa):



Jos esimerkin 4.2 leipuri Pulla arvottaa vaihtoehdot

$$a_i = \text{“Paistetaan aamulla } i \text{ pullaa”}$$

riskineutraalisti, eli odotusarvon mukaan, ja hän uskoo Pearson–Tukey-menetelmään, hänen arvotuksensa saadaan kaavasta

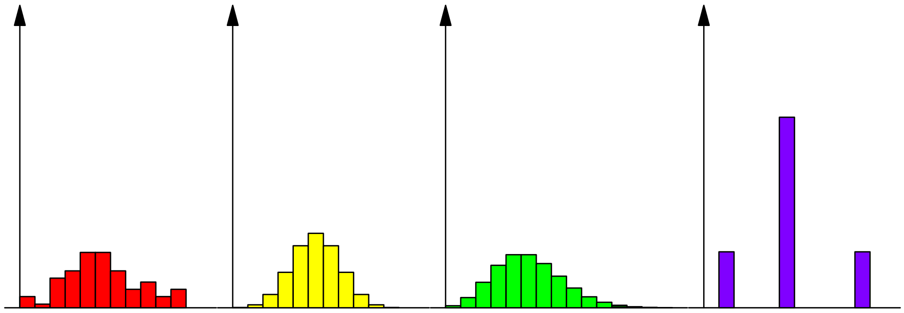
$$
\begin{aligned}
V(a_i) = &\Big(\min(i,1) - 0{,}2i\Big) \cdot 0{,}185 \\
&+\Big(\min(i,5) - 0{,}2i\Big) \cdot 0{,}630 \\
&+\Big(\min(i,10) - 0{,}2i\Big) \cdot 0{,}185.
\end{aligned}
$$

Jätämme harjoitustehtäväksi 4.1(c) laskea leipuri Pullan arvotukset tässä tilanteessa ja määrätä hänen optimaalinen valintansa. Huomautamme, että aluksi saattaa tuntua luontevalta valita päätösjoukoksi a_1, a_5, a_{10}. Tämä ei kuitenkaan ole välttämättä oikea tapa lähestyä ongelmaa. Joskus nimittäin on hyvä hyväksyä aina hieman tappiota, jotta saataisiin *keskimääräisesti* paras tulos.

Pearson–Tukey-menetelmän hyviä ja huonoja puolia.

- $\oplus$ helppo toteuttaa,
- $\oplus$ tuottaa pienen otosavaruuden ja soveltuu siten hyvin esimerkiksi päätöspuihin,
- $\ominus$ erittäin karkea,
- $\ominus$ toimii huonosti epäsymmetrisille tai monihuippuisille jakaumille.

Esiteämme vielä, vertailun vuoksi, saadut neljä jakauma-arviota rinnakkain samalla skaalalla:



Harjoitustehtäviä lukuun 4

4.1. Harjoitustehtävä. Tarkastelemme esimerkin 4.2 leipuri Pullaa. Kuinka monta pullaa tulee leipuri Pullan paistaa aamuisin, kun hän on riskineutraali, ja uskoo että (potentiaalisesti) myytyjen pullien lukumäärä lounastauolla on

(a) binomijakautunut parametrein $n = 10$ ja $p = 0{,}5$,
(b) Poisson-jakautunut parametrilla 5,
(c) Pearson–Tukey-jakautunut fraktiiliparametrein $1, 5, 10$?

4.2. Harjoitustehtävä. Tarkastelemme esimerkin 4.2 leipuri Pullaa. Oletamme, että leipuri Pullalla on vain lokakuun 2009 data käytettävissään. Oletamme lisäksi, että leipuri Pulla on riskineutraali päätöksenteossaan. Kuinka monta pullaa leipuri Pullan tulee paistaa aamuisin, kun hän estimoi pullanmyyntitodennäköisyydet

(a) suhteellisten frekvenssien menetelmällä,
(b) binomimallilla käyttäen suurimman uskottavuuden periaatetta,
(c) Poisson-mallilla käyttäen suurimman uskottavuuden periaatetta,
(d) Pearson–Tukey-menetelmällä?

4.3. Harjoitustehtävä. Satunnaismuuttuja X on *geometrisesti jakautunut* parametrilla θ, jos

$$\mathrm{P}(X = n) \quad = \quad (1-\theta)^n \theta,$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$.

(a) Millaista tilannetta geometrisesti jakautunut satunnaismuuttuja kuvaa?
(b) Johda parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori.

4.4. Harjoitustehtävä. Sinikka Sateen tulee päättää ottaako aamulla sateenvarjo mukaan vai ei. Hän on riskineutraali harmituksen suhteen. Jos hän ottaa sateenvarjon, eikä sada, häntä harmittaa 1 verran. Jos hän ei ota sateenvarjoa, ja sataa, häntä harmittaa 2 verran. Muissa tapauksissa häntä ei harmita ollenkaan.

Sinikka Sade on kerännyt dataa sadepäivistä (1 tarkoittaa "sataa", 0 tarkoittaa "ei sada"):

	Lokakuu 2009						
Viikko	Ma	Ti	Ke	To	Pe	La	Su
40				1	0	0	0
41	0	0	1	1	1	1	1
42	1	0	0	0	1	1	1
43	1	0	0	0	0	0	0
44	0	0	0	0	0	1	1

	Marraskuu 2009						
Viikko	Ma	Ti	Ke	To	Pe	La	Su
45	0	0	1	0	0	0	1
46	1	1	0	0	0	0	0
47	1	1	1	0	0	1	1
48	0	0	0	0	0	0	0
49	0						

(a) Tulisiko Sinikka Sateen ottaa sateenvarjo aamuisin mukaan?
(b) Voisiko Sinikka Sade päättää paremmin ottaako sateenvarjo huomenna mukaan vai ei käyttäen tietoa tämän päivän säästä? Jos tänään sataa, tulisiko Sinikka Sateen ottaa huomenna sateenvarjo mukaan? Entä jos tänään ei sada?

Vihje: Kannattaa estimoida ehdolliset todennäköisyydet huomenna sataa/ei sada ehdolla tänään sataa/ei sada.

4.5. Harjoitustehtävä. Sijoittaja S.:llä on 10.000€ sijoitettavaa. Hän ei halua hajauttaa sijoitustaan, vaan haluaa sijoittaa joko Riskiin, Varmaan, tai Säästöön. Säästö antaa varmasti 1% tuoton. Hillosanomista sijoittaja S. on lukenut, että Varman ja Riskin odotetut tuotot (μ) ja tuottojen "volatiliteetit" (σ) ovat

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Varma}} &= 3\%, \\ \sigma_{\text{Varma}} &= 10\%, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Riski}} &= 5\%, \\ \sigma_{\text{Riski}} &= 20\%. \end{aligned}$$

Sijoittaja S. on antanut itselleen kertoa, että tämä tarkoittaa sitä, että tuotto on normaalisti jakautunut satunnaismuuttuja odotusarvolla μ ja varianssilla σ^2.

Mihin kohteeseen tulisi sijoittaja S.:n sijoittaa rahansa, kun hän on

(a) riskineutraali,
(b) hyödyn maksimoija hyötyfunktiolla $u(r) = \ln r$.

Käytä analyysissäsi laajennettua Pearson–Tukey-menetelmää, ja vertaa sitä "todelliseen" normaalijakaumaan.

4.6. Harjoitustehtävä. Esimerkin 4.2 data on generoitu seuraavasti: ensiksi pyhäpäivät, viikonloput ja aatot on poistettu. Sitten perjantaisin myydyt pullat ovat riippumattomia Poisson(2)-jakautuneita satunnaismuuttujia ja maanantaista torstaihin myydyt pullat ovat riippumattomia Poisson(6)-jakautuneita satunnaismuuttujia. (Aikariippuvutta ei siis ollut, mutta epähomogeenisuutta oli. Toisin sanoen havainnot olivat riippumattomia, mutteivät samankaltaisia.)

(a) Piirrä myytyjen pullien todennäköisyysjakaumat (ma–to ja pe).
(b) Piirrä "umpimähkään" valittuna päivänä myytyjen pullien todennäköisyysjakauma.

4.7. Harjoitustehtävä. Nyt, kun tiedät harjoitustehtävässä 4.6 kerrotun totuuden, niin kuinka monta pullaan tulisi esimerkin 4.2 leipuri Pullan paistaa amulla, kun hän on

(a) optimisti,
(b) katumuksen kaihtaja,
(c) riskineutraali,
(d) riskinkaihtaja hyötyfunktiolla $u(r) = \ln(1 + r)$?

Hyötyteoriaa

5.1. Esimerkki. Sadistinen miljonääri tarjoaa Oiva Opiskelijalle ja Tarmo Toimitusjohtajalle satunnaiskoetta, jossa he

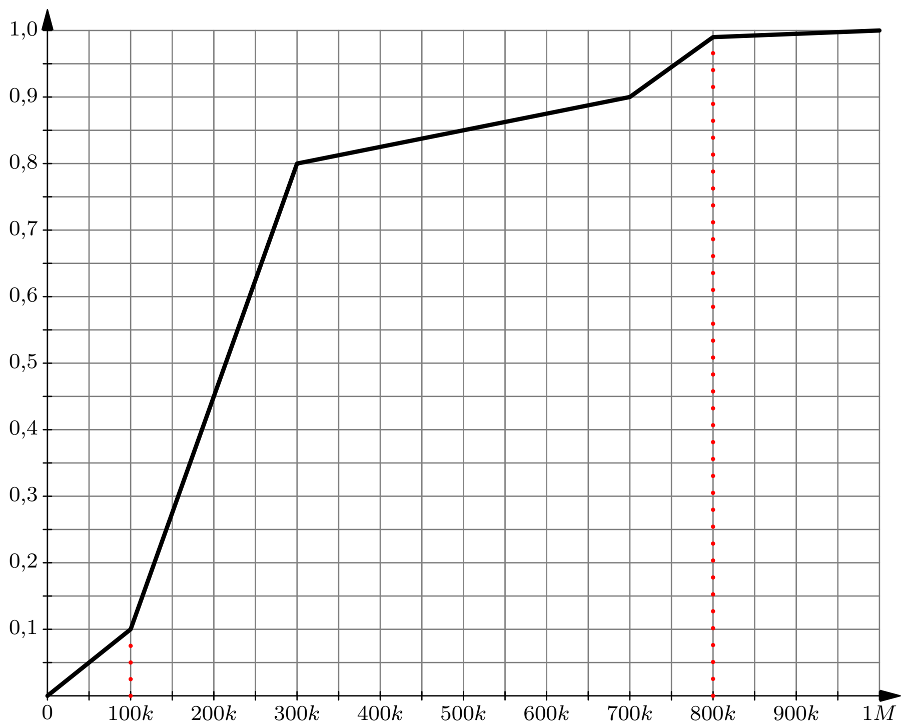
- menettävät todennäköisyydellä 0,5 vasemman käden pikkurillinsä,
- saavat todennäköisyydellä 0,5 200.000 €.

Oiva ottaa tarjouksen vastaan ja Tarmo ei ota.

Onko tarinan opetus, että Tarmo arvostaa pikkurilliään enemmän kuin Oiva?

Tarmo Toimitusjohtaja voi toki arvostaa pikkurilliään enemmän kuin Oiva Opiskelija. Toisaalta on selvää, että sekä Oiva Opiskelija että Tarmo Toimitusjohtaja eivät voi olla riskineutraaleja ja arvostaa pikkurillejään yhtä paljon. On kuitenkin mahdollista, että he arvostavat yhtä paljon pikkurillejään ja että heillä on sama *riskiprofiili* eli he ovat molemmat hyödyn maksimoijia samalla hyötyfunktiolla. Ero päätöksentekoon tulee siitä, että heillä on eri lähtövarallisuus. Toisin sanoen he katsovat hyötyfunktiota eri kohdista.

Olkoon molempien hyötyfunktio seuraavan kuvan mukainen:



Oletamme, että molemmat arvostavat pikkurillejään 100.000 € verran. Tämä tarkoittaa sitä, että jos he olisivat riskineutraaleja, niin he molemmat suostuisivat innolla sadistisen miljonäärin tarjoukseen. Olkoon sitten Oiva Opiskelijan varallisuus 100.000 € ja Tarmo Toimitusjohtajan varallisuus 800.000 €. Nämä varallisuudet on merkitty hyötyfunktion kuvaajaan punaisilla pisteviivoilla.

Nyt Oiva Opiskelijan vaihtoehdot ja niitä vastaavat hyödyt ovat:

1. Ei oteta tarjousta vastaan. Tällöin hyöty
$$u(100.000) = 0{,}1.$$
2. Otetaan tarjous vastaan. Tällöin keskimääräinen hyöty on
$$\begin{aligned} & u(300.000) \cdot 0{,}5 + u(0) \cdot 0{,}5 \\ = \; & 0{,}8 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 \\ = \; & 0{,}4. \end{aligned}$$

Oiva Opiskelija siis hyväksyy tarjouksen. Tarmo Toimitusjohtajan vaihtoehdot ja niitä vastaavat hyödyt ovat:

1. Ei oteta tarjousta vastaan. Tällöin hyöty
$$u(800.000) = 0{,}99.$$
2. Otetaan tarjous vastaan. Tällöin keskimääräinen hyöty on
$$\begin{aligned} & u(1.000.000) \cdot 0{,}5 + u(700.000) \cdot 0{,}5 \\ = \; & 1 \cdot 0{,}5 + 0{,}9 \cdot 0{,}5 \\ = \; & 0{,}95. \end{aligned}$$

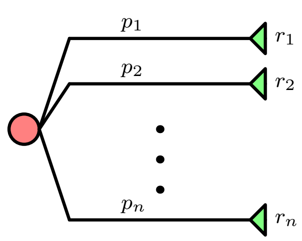
Tarmo Toimitusjohtaja siis hylkää tarjouksen.

Arpajaiset, preferenssit ja hyödyt

Yksinkertaiset Arpajaiset. Yksinkertaiset *arpajaiset* ovat satunnaismuuttujia tai -kokeita. Merkintä
$$L = L(p_1, r_1; p_2, r_2; \ldots; p_n, r_n)$$
tarkoittaa tilannetta, jossa tarjotaan

- palkkiota r_1 todennäköisyydellä p_1,
- palkkiota r_2 todennäköisyydellä p_2,
- $\vdots$
- palkkiota r_n todennäköisyydellä p_n.

Kuvallisesti edellä määritellyt arpajaiset L tarkoittaa siis lehtiin päättyvää sattumasolmua



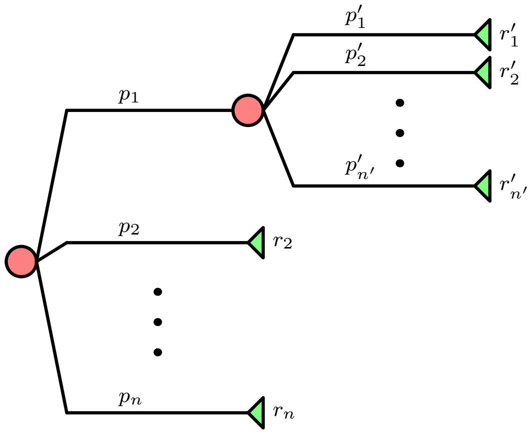
Yhdistetyt arpajaiset. *Yhditetyt arpajaiset* ovat satunnaismuuttujia tai -kokeita, jossa palkkiot voivat olla arpajaisia. Esimerkiksi merkintä

$$L = L(p_1,\ L'(p'_1, r'_1, p'_2, r'_2; \ldots; p_{n'},' r'_{n'});\ p_2, r_2; \ldots; p_n, r_n)$$

tarkoittaa yhdistettyjä arpajaisia, jossa tarjotaan

- uusia arpajaisia $L' = L'(p'_1, r'_1; p'_2, r'_2; \ldots; p'_{n'}, r'_{n'})$ todennäköisyydellä p_1,
- palkkiota r_2 todennäköisyydellä p_2,
- $\vdots$
- palkkiota r_n todennäköisyydellä p_n.

Kuvallisesti edellä määritellyt yhditetyt arpajaiset L tarkoittaa siis sattumapuuta



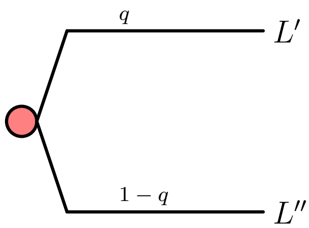
Jos L' ja L'' ovat arpajaisia ja $q \in (0,1)$, niin merkintä

$$L \quad = \quad qL' + (1-q)L''$$

tarkoittaa yhdistettyjä arpajaisia, joissa ensin valitaan joko arpajaiset L' todennäköisyydellä q tai arpajaiset L'' todennäköisyydellä $1-q$, ja sitten suoritetaan valitut arpajaiset — joko L' jai L''. Käyttämällä aikaisempaa merkintää yhdistetyille arpajaisille huomaamme, että

$$qL' + (1-q)L'' \quad = \quad L(q, L'; 1-q, L'').$$

Kuvallisesti $L = qL' + (1-q)L''$ tarkoittaa siis sattumapuuta



Preferenssit. Mikäli päätöksentekijä valitsee mieluummin arpajaiset L' kuin arpajaiset L, niin sanomme että päätöksentekijä *preferoi* arpajaisia L' yli arpajaisten L. Tällöin merkitsemme $L \prec L'$. Mikäli päätöksentekijä on valitsee yhtä mielellään arpajaiset L tai L', niin sanomme että päätöksentekijä on *indifferentti* arpajaisten L ja L' välillä. Tällöin merkitsemme $L \sim L'$.

Preferenssit ja hyödyt. Jokaista hyötyfunktiota $u(r)$ vastaa arpajaispreferenssit. Nimittäin päätöksentekijä preferoi arpajaisia L' yli arpajaisten L — $L \prec L'$ — jos ja vain jos

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big(u(L)\Big) &= \sum_j u(r_j)\, p_j \\ &< \sum_j u(r'_j)\, p'_j \\ &= \mathrm{E}\Big(u(L')\Big). \end{aligned}$$

Samoin päätöksentekijä on indifferentti arpajaisten L ja L' välillä — $L \sim L'$ — jos ja vain jos

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big(u(L)\Big) &= \sum_j u(r_j)\, p_j \\ &= \sum_j u(r'_j)\, p'_j \\ &= \mathrm{E}\Big(u(L')\Big). \end{aligned}$$

5.2. Esimerkki. Pekka Päätöksentekijällä on logaritminen hyötyfunktio $u(r) = \ln(1+r)$. Hänelle tarjotaan arpajaisia

1. $L_1 = L(1, 1.000\,€)$ — eli varmaa palkkiota $1.000\,€$, tai
2. $L_2 = L(0{,}5,\ 2.000\,€\ ;\ 0{,}5,\ 0\,€)$.

Kummat arpajaiset Pekka Päätöksentekijä valitsee?

Pekka Päätöksentekijän hyödyt arpajaisilla L_1 ja L_2 ovat

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(u(L_1)) &= u(1.000) \\ &= \ln 1.001 \\ &= 6{,}9088, \\ \mathrm{E}(u(L_2)) &= u(2.000)\cdot 0{,}5 + u(0)\cdot 0{,}5 \\ &= \ln 2.001 \cdot 0{,}5 + \ln 1 \cdot 0{,}5 \\ &= 7{,}6014 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 \\ &= 3{,}8007. \end{aligned}$$

Siis $\mathrm{E}(u(L_2)) < \mathrm{E}(u(L_1))$, eli $L_2 \prec L_1$, eli Pekka Päätöksentekijä valitsee "varmat" arpajaiset L_1.

Esitämme nyt pitkähkön esimerkin kautta käänteisen suunnan, eli miten arpajaispreferenssit voidaan rakentaa kyselyiden avulla ja miten niistä rakentuu hyötyfunktio $u(r)$ — tai ainakin osa siitä.

5.3. Esimerkki. Päätöksentekijä halua laittaa seuraavat arpajaiset järjestykseen:

$$\begin{aligned} L_1 &= L(1, 10.000), \\ L_2 &= L(0{,}50, 30.000; 0{,}50, 0), \\ L_3 &= L(1, 0), \\ L_4 &= L(0{,}02, -10.000, 0{,}98, 500). \end{aligned}$$

Aloitamme havaitsemalla suurimman mahdollisen palkkion $r_+ = 30.000$ ja pienimmän mahdollisen palkkion $r_- = -10.000$. Muut mahdolliset palkkiot ovat (laskevassa) suuruusjärjestyksessä $r_1 = 10.000$, $r_2 = 500$ ja $r_3 = 0$.

Päätöksentekijältä kysytään "subjektiivista" todennäköisyyttä q_i, jolla vallitsisi indifferenssi

$$L(1, r_i) \quad \sim \quad q_i L(1, 30.000) + (1-q_i) L(1, -10.000).$$

Oletamme, että palkkiolle $r_1 = 10.000$ päätöksentekijämme valitsee kysyttäessä $q_1 = 0{,}90$. Hän on siis valinnut indifferenssin

$$L(1, 10.000) \quad \sim \quad 0{,}90 L(1, 30.000) + 0{,}10 L(1, -10.000). \tag{5.4}$$

Palkiolle $r_2 = 500$ hän on kysyttäessä valinnut indifferenssin

$$L(1, 500) \quad \sim \quad 0{,}62 L(1, 30.000) + 0{,}38 L(1, -10.000). \tag{5.5}$$

Siis $q_2 = 0{,}62$. Kysyttäessä palkkiosta $r_3 = 0$ hän valitsee todennäköisyyden $q_3 = 0{,}60$ eli indifferenssin

$$L(1, 0) \quad \sim \quad 0{,}60 L(1, 30.000) + 0{,}40 L(1, -10.000). \tag{5.6}$$

Käyttämällä kyselyistä saatuja indifferenssejä päätöksentekijä voi rakentaa arpajaiset L_1', L_2', L_3' ja L_4' siten, että $L_1 \sim L_1'$, $L_2 \sim L_2'$, $L_3 \sim L_3'$ ja $L_4 \sim L_4'$, ja lisäksi arpajaisissa L_1', L_2', L_3 ja L_4' ainoat palkkiomahdollisuudet ovat $r_+ = 30.000$ ja $r_- = -10.000$. Nämä arpajaiset taas on helppo laittaa järjestykseen kyselyihin vastattujen "subjektiivisten" todennäköisyyksien q_1, q_2 ja q_3 avulla seuraavalla tavalla.

Indifferenssisä (5.4) näemme välittömästi, että $L_1 \sim L_1'$, missä

$$L_1' \quad = \quad 0{,}90 L(1, 30.000) + 0{,}10 L(1, -10.000).$$

Indifferenssistä (5.6) näemme, että $L_2 \sim L_2''$, missä

$$L_2'' \quad = \quad 0{,}5 L(1, 30.000) + 0{,}5 L(0{,}60, 30.000; 0{,}40, -10.000).$$

L_2'' ovat siis yhdistetyt arpajaiset, missä

- $r_+ = 30.000$ saadaan todennäköisyydellä $0{,}50 + 0{,}50 \cdot 0{,}60 = 0{,}80$,
- $r_- = -10.000$ saadaan todennäköisyydellä $0{,}50 \cdot 0{,}40 = 0{,}20$.

Siten $L_2 \sim L_2'' \sim L_2'$, missä

$$L_2' \quad = \quad 0{,}80 L(1, 30.000) + 0{,}20 L(1, -10.000).$$

Indifferenssistä (5.6) näemme, että $L_3 \sim L_3'$, missä

$$L_3' \quad = \quad 0{,}60 L(1, 30.000) + 0{,}40 L(1, -10.000).$$

Indifferenssistä (5.5) seuraa, että $L_4 \sim L_4''$, missä

$$L_4'' \quad = \quad 0{,}02 L(1, -10.000) + 0{,}98 L(0{,}62, 30.000; 0{,}38, -10.000).$$

L_4'' ovat siis yhdistetyt arpajaiset, missä

- $r_+ = 30.000$ saadaan todennäköisyydellä $0{,}98 \cdot 0{,}62 = 0{,}6076$,
- $r_- = -10.000$ saadaan todennäköisyydellä $0{,}02 + 0{,}98 \cdot 0{,}38 = 0{,}3924$.

Siten $L_4 \sim L_4'' \sim L_4'$, missä
$$L_4' \;=\; 0{,}6076L(1, 30.000) + 0{,}3924L(1, -10.000).$$

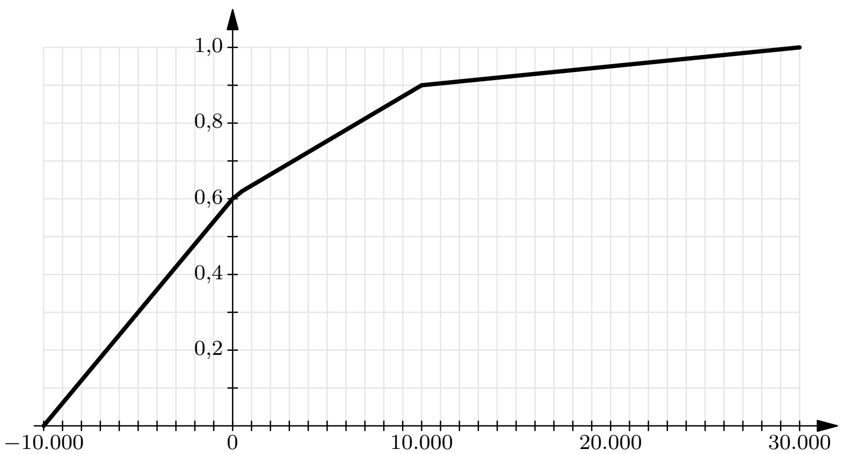
On siis saatu arpajaiset
$$\begin{aligned} L_1' &= 0{,}90L(1, 30.000) + 0{,}10L(1, -10.000),\\ L_2' &= 0{,}80L(1, 30.000) + 0{,}20L(1, -10.000),\\ L_3' &= 0{,}60L(1, 30.000) + 0{,}40L(1, -10.000),\\ L_4' &= 0{,}6076L(1, 30.000) + 0{,}3924L(1, -10.000). \end{aligned}$$

Nämä arpajaiset on ilmeisen helppo järjestää paremmuusjärjestykseen: $L_3' \prec L_4' \prec L_2' \prec L_1'$. Koska pätee indifferenssit $L_i' \sim L_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, niin sama paremmuusjärjestys pätee myös alkuperäisille arpajaisille: $L_3 \prec L_4 \prec L_2 \prec L_1$. Ongelma on ratkaistu!

Lopuksi havaitsemme, että voimme tulkita "subjektiiviset" todennäköisyydet q_i palkkoita r_i vastaaviksi hyödyiksi ja rakentaa päätöksentekijän hyötyfunktion asettamalla
$$\begin{aligned} u(30.000) &= u(r_+) = 1,\\ u(10.000) &= u(r_1) = q_1 = 0{,}90,\\ u(500) &= u(r_2) = q_2 = 0{,}62,\\ u(0) &= u(r_3) = q_3 = 0{,}60,\\ u(-10.000) &= u(r_-) = 0. \end{aligned}$$

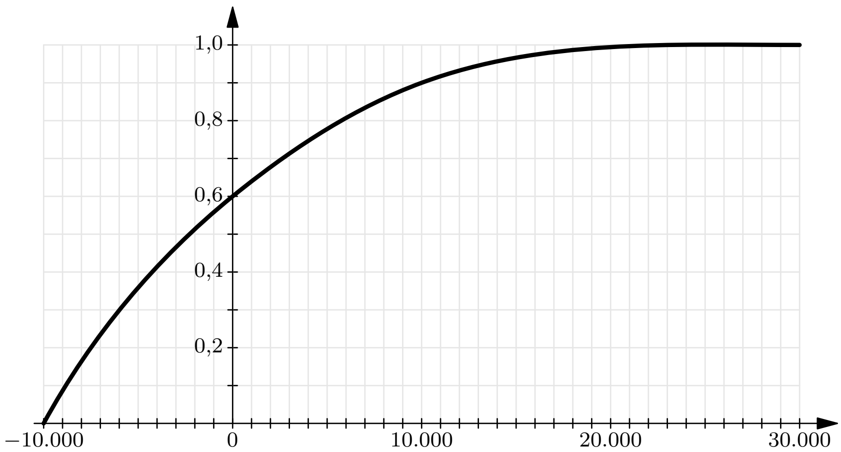
Tämä tietysti antaa edellä esitettyä "pikkupuutapaa" helpomman tavan asettaa arpajaiset L_1, L_2, L_3 ja L_4 preferenssijärjestykseen: ensin määrätään hyötyfunktio $u(r)$ kaikissa tarvittavissa palkkiopisteissä r, ja sitten asetetaan arpajaiset L_1, L_2, L_3 ja L_4 preferenssijärjestykseen odotetun hyödyn mukaan.

Seuraavassa hahmotelma päätöksentekijän hyötyfunktiosta:



Edellä hahmotellussa kuvassa hyöytyfunktio $u(r)$ on laskettu pisteiden $r_- = -10.000$, $r_3 = 0$, $r_2 = 500$, $r_1 = 10.000$ ja $r_+ = 30.000$ ulkopuolella lineaarsesti interpoloiden. Tämä tekee hyöytyfunktioon teräviä kulmia, mikä saattaa olla käytännön tulkinnan kannalta kyseenalaista. Sileämpi sovitus annettuihin pisteisiin $r_- = -10.000$, $r_3 = 0$, $r_2 = 500$, $r_1 = 10.000$ ja $r_+ =$

30.000 saadaan aikaan esimerkiksi käyttämällä piirrosohjelmissa suosittuja (kasvaviksi ehdollistettuja) 3. asteen Bézierin splinejä (muitakin menetelmiä toki on):



Esimerkin 5.3 ongelma ja sen ratkaisualgoritmi voidaan kuvata yleisesti seuraavasti:

Ongelma: On annettu arpajaiset $L_1, L_2, \ldots, L_m$, jotka pitää laittaa preferenssijärjestykseen.

Ratkaisu:

(i) Järjestä kaikki mahdolliset palkkiot laskevaan suuruusjärjestykseen $r_+ > r_1 > \cdots > r_n > r_-$ (mahdollisia palkkioita on siis $n+2$ kappaletta).

(ii) Jokaiselle palkkiolle r_i, $i = +, 1, \ldots, n, -$, *kysy päätöksentekijältä* "subjektiivista" todennäköisyyttä q_i, jolla hänelle pätee indifferenssi

$$L(1, r_i) \quad \sim \quad q_i L(1, r_+) + (1-q_i) L(1, r_-).$$

(Väkisinkin muuten palkkiota r_+ vastaa $q_+ = 1$ ja palkkiota r_- vastaa $q_- = 0$).

(iii) Määritä päätöksentekijän hyötyfunktio $u(r)$ olemaan pisteissä r_i kaavalla $u(r_i) = q_i$. (Voit laajentaa hyötyfunktion $u(r)$ muihin pisteisiin lineaarisesella interpoloinnilla tai jollakin muulla menetelmällä, jos haluat. Tämä ei ole kuitenkaan ongelman kannalta tarpeellista.)

(iv) Määrää arpajaisten $L_1, L_2, \ldots, L_m$ järjestys hyötyfunktion $u(r)$ avulla asettamalla kaikille $k_1, k_2 = 1, \ldots, m$

$$L_{k_1} \prec L_{k_2} \quad \text{jos ja vain jos} \quad \mathrm{E}\left(u(L_{k_1})\right) < \mathrm{E}\left(u(L_{k_2})\right).$$

ja

$$L_{k_1} \sim L_{k_2} \quad \text{jos ja vain jos} \quad \mathrm{E}\left(u(L_{k_1})\right) = \mathrm{E}\left(u(L_{k_2})\right).$$

Edellä esitetty ratkaisualgoritmi rakentaa hyötyfunktion, jonka arvot ovat välillä $[0, 1]$: huonoin mahdollinen palkkio r_- saa hyödyn $u(r_-) = 0$ ja paras mahdollinen palkkio r_+ saa hyödyn $u(r_+) = 1$. Itse asiassa, koska hyöytfunktio on aina kasvava, edellinen algoritmi tuotaa aina hyötyfunktion, jonka voi tulkita todennäköisyysjakauman kertymäfunktioksi.

Aikaisemmin olemme esittäneet hyötyfunktioita, joissa palkkiot eivät ole rajoittuneet välille $[0, 1]$. Tyypillisin esimerkki on ollut logaritminen hyötyfunktio $u(r) = \ln(1 + r)$, joka saa siis arvoja väliltä $[0, \infty)$, jos palkkiot r ovat positiivisia. Tässä ei ole kuitenkaan mitään ristiriitaa. Nimittäin hyötyfunktioiden arvot sinänsä eivät ole mielenkiintoisia, vaan ainoastaan niiden arvojen järjestykset. Esimerkiksi positiivisesti *affiinimuunnettu*[1] hyötyfunktio

$$u(r) \quad = \quad \alpha u_0(r) + \beta,$$

$\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, saa aikaan täsmälleen samat preferenssit kuin alkuperäinen hyötyfunktio $u_0(r)$. Toisin sanoen:

$$\mathrm{E}\big(u_0(L_1)\big) \quad \leq \quad \mathrm{E}\big(u_0(L_2)\big)$$

jos ja vain jos

$$\mathrm{E}\big(u(L_1)\big) \quad \leq \quad \mathrm{E}\big(u(L_2)\big).$$

Erityisesti, jos suurin mahdollinen palkkio on r_+ ja pienin mahdolinen palkkio on r_-, niin mikä tahansa hyötyfunktio $u_0(r)$ voidaan normeerata arvovälille $[0, 1]$ muunnoksella

$$u(r) \quad = \quad \frac{u_0(r) - u_0(r_-)}{r_+ - r_-}.$$

Von Neumann–Morgerstern -aksioomat

Vuonna 1944 Von Neumann ja Morgenstern muotoilivat *rationaalisen päätöksenteon* aksioomat.

Lähtökohtana on tietysti, että kaikki mahdolliset palkkiot voidaan esittää reaalilukuina, jolloin ne toteuttavat kaikki reaalilukujen aksioomat, kuten vaikkapa sen, että jokaisesta reaalilukuparista r_1, r_2 voidaan sanoa päteekö $r_1 < r_2$, $r_2 < r_1$ vai $r_1 = r_2$. Lisäksi oletetaan seuraavat aksioomat:

Järjestys: Kaikille arpajaisille L_1 ja L_2 pätee täsmälleen yksi relaatioista
(i) $L_1 \prec L_2$,
(ii) $L_2 \prec L_1$,
(iii) $L_1 \sim L_2$.
Lisäksi kaikille arpajaisille L_1, L_2 ja L_3 pätee:

$$\text{jos} \quad L_1 \prec L_2 \text{ ja } L_2 \prec L_3, \quad \text{niin} \quad L_1 \prec L_3.$$

Vielä lisäksi kaikille arpajaisille L_1, L_2 ja L_3 pätee:

$$\text{jos} \quad L_1 \sim L_2 \text{ ja } L_2 \sim L_3, \quad \text{niin} \quad L_1 \sim L_3.$$

Riippumattomuus: Jos $L_1 \sim L_2$, niin kaikille todennäköisyyksille $0 \leq q \leq 1$ ja kaikille arpajaisille L pätee

$$qL_1 + (1-q)L \quad \sim \quad qL_2 + (1-q)L.$$

[1]Affiinimuunnos funktiosta $f(x)$ on $\alpha f(x) + \beta$, missä $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Affiinimuunnoksessa siis muunnetaan mittakaavaa, eli skaalaa, (α) ja suuntaa (α positiivinen tai negatiivinen), sekä paikkaa, eli lokaatiota, (β).

Jatkuvuus: Kaikille arpajaisille L_1, L_2 ja L_3, joille $L_1 \prec L_2$ ja $L_2 \prec L_3$ on olemassa jokin todennäköisyys $0 \leq q \leq 1$ siten, että

$$L_2 \quad \sim \quad qL_1 + (1-q)L_3.$$

Järjestysaksiooma sanoo, että kaikkia arpajaisia voidaan verrata toisiinsa ja että $\prec$ on *aito järjestysrelaatio* kuten esimerkiksi relaatio $<$, ja että $\sim$ on *ekvivalenssirelaatio* kuten esimerkiksi relaatio $=$. Erityisesti järjestysaksiooma tekee merkinnöistä $L_1 \prec L_2 \prec L_3$ ja $L_1 \sim L_2 \sim L_3$ mielekkäitä. Riippumattomuusaksioomaa tarvitaan, jos halutaan samaistaa arpajaiset ja yhdistetyt arpajaiset. Jatkuvuusaksioomaa tarvitaan, jotta jokaista epävarmuutta sisältävää arpajaista saataisiin vastaamaan jokin varma palkkio.

Von Neumann–Morgenstern -aksioomat ovat yhtäpitäviä hyötyyn perustuvan päätössäännön kanssa. Itse asiassa suuri tulos — mitä emme todista — on:

> *Jos päätöksentekijä noudattaa Von Neumann–Morgenstern -aksioomia, on olemassa jokin sellainen jatkuva ja kasvava hyötyfunktio $u(r)$, että päätöksentekijä preferoi arpajaisia L_2 yli arpajaisten L_1 jos ja vain jos $\mathrm{E}(u(L_1)) < \mathrm{E}(u(L_2))$.*
>
> *Kääntäen, jos päätöksentekijä arvottaa arpajaiset hyötysäännöllä jonkin jatkuvan ja kasvavan hyötyfunktion $u(r)$ mukaan, noudattaa päätöksentekijä automaattisesti Von Neumann–Morgenstern -aksioomia.*

Hyötyfunktion estimointi

Indifferenssikyselyt. Esimerkki 5.3 ja sitä seuraava algoritmi antaa jo tavan hyöytyfunktion estimointiin kyselyjen avulla. Esitämme nyt samankaltaisen kyselymetodin.

Haluamme estimoida päätöksentekijän hyöytyfunktion $u(r)$ välillä $[r_-, r_+]$ eli huonoimmasta mahdollisesta palkkiosta parhaaseen mahdolliseen. Koska voimme aina normeerata hyötyfunktion mille tahansa arvovälille haluamme, valitsemme $u(r_-) = 0$ ja $u(r_+) = 1$. Sitten kysymme päätöksentekijältä “subjektiivista” todennäköisyyttä $x_{1/2}$, jolla hänelle pätee indifferenssi

$$L(1, x_{1/2}) \quad \sim \quad \frac{1}{2}L(1, r_+) + \frac{1}{2}L(1, r_-).$$

Tällöin $u(x_{1/2}) = 1/2$. Nimittäin edellisen indifferenssin nojalla

$$\begin{aligned} u(x_{1/2}) &= \mathrm{E}\left(u\left(L(1, x_{1/2})\right)\right) \\ &= \mathrm{E}\left(u\left(\frac{1}{2}L(1, r_+) + \frac{1}{2}L(1, r_-)\right)\right) \\ &= u(r_+) \cdot 0{,}5 + u(r_-) \cdot 0{,}5 \\ &= 0{,}5. \end{aligned}$$

Olemme siis löytäneet ensimmäisen puolittajapisteen $x_{1/2}$.

Seuraavaksi puolitamme “alavälin” $[0,1/2]$, eli kysymme puolittajapistettä $x_{1/4}$, jolle pätee indifferenssi

$$L(1,x_{1/4}) \quad\sim\quad \frac{1}{2}L(1,x_{1/2})+\frac{1}{2}L(1,r_-).$$

Tällöin $u(x_{1/4})=1/4$. Nimittäin edellisen indifferenssin nojalla

$$\begin{aligned}
u(x_{1/4}) &= \mathrm{E}\left(u\left(L(1,x_{1/4})\right)\right)\\
&= \mathrm{E}\left(u\left(\frac{1}{2}L(1,x_{1/2})+\frac{1}{2}L(1,r_-)\right)\right)\\
&= u(x_{1/2})\cdot 0{,}5+u(r_-)\cdot 0{,}5\\
&= 0{,}5\cdot 0{,}5\\
&= 0{,}25.
\end{aligned}$$

Seuraavaksi puolitamme “ylävälin” $[1/2,1]$, eli kysymme puolittajapistettä $x_{3/4}$, jolle pätee indifferenssi

$$L(1,x_{3/4}) \quad\sim\quad \frac{1}{2}L(1,r_+)+\frac{1}{2}L(1,x_{1/2}).$$

Tällöin $u(x_{3/4})=3/4$. (Perustelu on samakanltainen kuin edellä.)

Jatkamalla puolituskyselyjä riittävän pitkälle saamme hahmoteltua päätöksentekijän hyötyfunktion $u(r)$ mielivaltaisen tarkasti, eli arvot $u(x_{1/2})=1/2$, $u(x_{1/4})=1/4$, $u(x_{3/4})=3/4$, $u(x_{1/8})=1/8$, $u(x_{3/8})=3/8$, $u(x_{5/8})=5/8$, $u(x_{7/8})=7/8$, $u(x_{1/16})=1/16$, jne.

5.7. Esimerkki. Päivi Päättäjälle tarjotaan palkkiota väliltä $[-10,30]$. Esitä kyselyt, joiden avulla Päivin hyötyfunktio voidaa hahmotella.

Normeeraamalla voimme asettaa Päivin hyötyfunktiossa $u(-10)=0$ ja $u(30)=1$. Sitten kysymme indifferenssipistettä $x_{1/2}$, jolle pätee

$$L(1,x_{1/2}) \quad\sim\quad \frac{1}{2}L(1,30)+\frac{1}{2}L(1,-10).$$

Päivi vastaa $x_{1/2}=-3{,}4$. Tiedämme nyt siis, että $u(-3{,}4)=1/2$. Seuraavaksi kysymme indifferenssipistettä $x_{1/4}$, jolle pätee

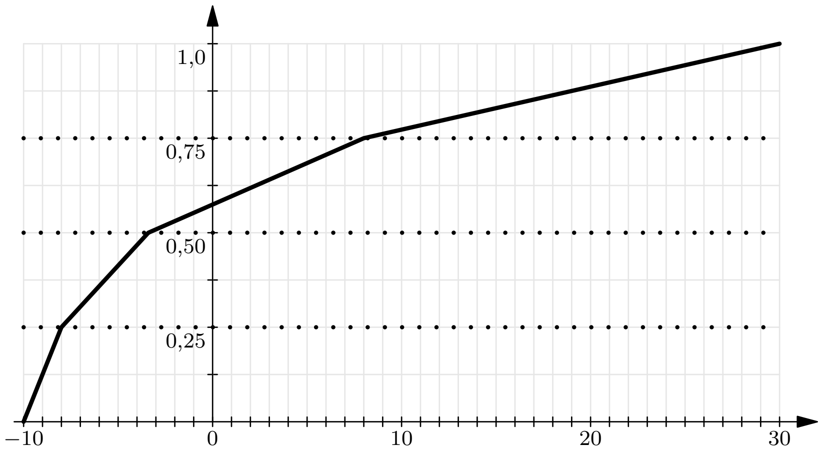
$$L(1,x_{1/4}) \quad\sim\quad \frac{1}{2}L(1,-3{,}4)+\frac{1}{2}L(1,-10).$$

Päivi vastaa $x_{1/4}=-8$. Tiedämme nyt siis, että $u(-8)=1/4$. Seuraavaksi kysymme indifferenssipistettä $x_{3/4}$, jolle pätee

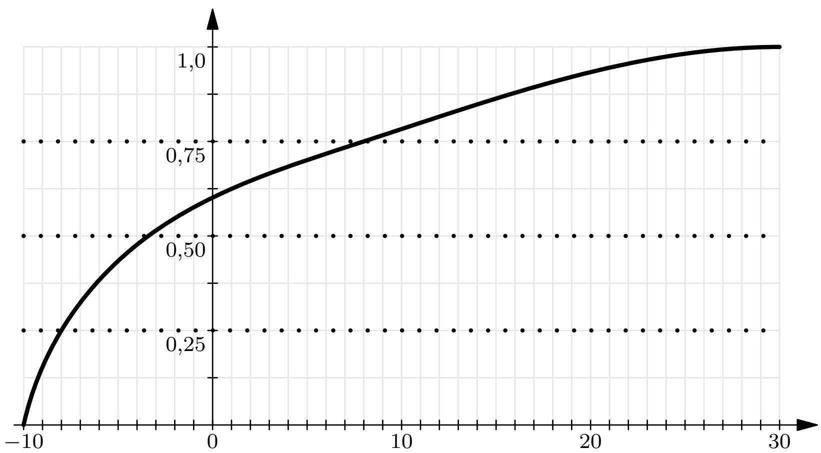
$$L(1,x_{3/4}) \quad\sim\quad \frac{1}{2}L(1,30)+\frac{1}{2}L(1,-3{,}4).$$

Päivi vastaa $x_{3/4}=8$. Tiedämme nyt siis, että $u(8)=3/4$.

Lineaarisesti interpoloiden hahmotelmamme Päivin hyötyfunktiosta on:



Sama hahmotelma, mutta kasvavilla Bézierin splineillä lineaarisen interpoloinnin sijaan:



Teoreettisen mallin sovittaminen. Joskus voidaan postuloida hyötyfunktiolle jokin tietty muoto. Voidaan esimerkiksi olettaa "vakio absoluuttinen riskiaversio" (CARA) tai "vakio suhteellinen riskiaversio" (CRRA), missä *absoluuttinen riskiaversio* (ARA) on

$$\mathrm{ARA}_u(r) \quad = \quad -\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}(r) \bigg/ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}(r)$$

ja *suhteellinen riskiaversio* (RRA) on

$$\mathrm{RRA}_u(r) \quad = \quad r\mathrm{ARA}_u(r).$$

Jos absoluuttinen riskiaversio $\mathrm{ARA}_u(r)$ on positiivinen funktio, on alkuperäinen hyötyfunktio $u(r)$ *konkaavi*, ja siten päätöksentekijä on *riskinkaihtaja* — eli "riskiaversi". Negatiivinen absoluuttinen riskiaversio vastaa *konveksia* hyötyfunktiota ja *riskinrakastamista*.

Jos oletamme "vakion absoluuttisen riskiaversion" päädymme parametriseen malliin nimeltä *eksponenttinen hyöty*:

$$u(r) \quad = \quad 1 - e^{-r/R},$$

missä R — *riskitoleranssi* — on estimoitava parametri. Se voidaan estimoida — aproksimatiivisesti — kyselyllä

1. et saa mitään,
2. saat R€ todennäköisyydellä $1/2$ ja $-R/2$€ todennäköisyydellä $1/2$.

Se R, jolla olet indifferentti näiden vaihtoehtojen suhteen on riskitoleranssisi ja määrää siten ekponenttisen hyötyfunktiosi.

Hyöytyfunktion käyttö päätöspuissa

Hyötyyn perustuva päätössääntö on helppo sovittaa päätöspuihin. Menetelmä on täsmälleen sama kuin riskineutraalissa tapauksessa paitsi, että (lehdissä olevat) palkkiot pitää aluksi muuttaa hyödyiksi.

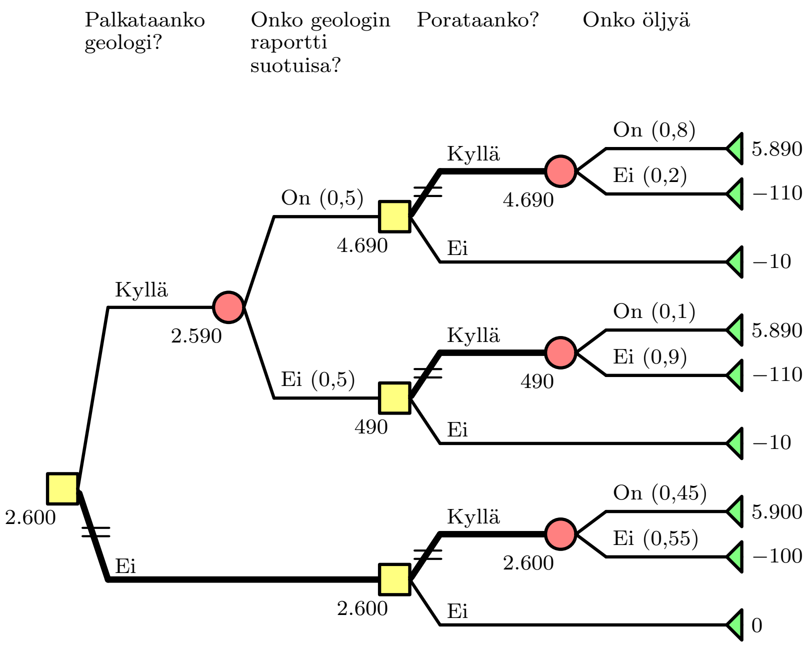
Palaamme vanhaan öljy-yhtiöesimerkkiin 3.1, mutta lisäämme hyödyt.

5.8. Esimerkki. Öljy-yhtiö Oy:n pitää päättää poratako öljyä paikasta P. Poraaminen maksaa 100.000€. Jos öljyä löytyy, niin siitä saadaan 6.000.000€. Öljy-yhtiö Oy arvelee, että öljyn löytymisen todennäköisyys on 45%. Ennen varsinaista poraamista Öljy-yhtiö Oy voi palkata geologin arvioimaan paikkaa P. Geologin palkkaaminen maksaa 10.000€. Geologi antaa todennäköisyydellä 50% suotuisan raportin. Mikäli raportti on suotuisa, löytyy öljyä paikasta P todennäköisyydellä 80%. Mikäli raportti on epäsuotuisa, löytyy öljyä paikasta P todennäköisyydellä 10%.

Öljy-yhtiön tulos ilman porausta on 10.000.000€ ja Öljy-yhtiön hyötyfunktio on $u(r) = \sqrt{r/1.000}$.

Mitä Öljy-yhtiö Oy:n kannattaa tehdä?

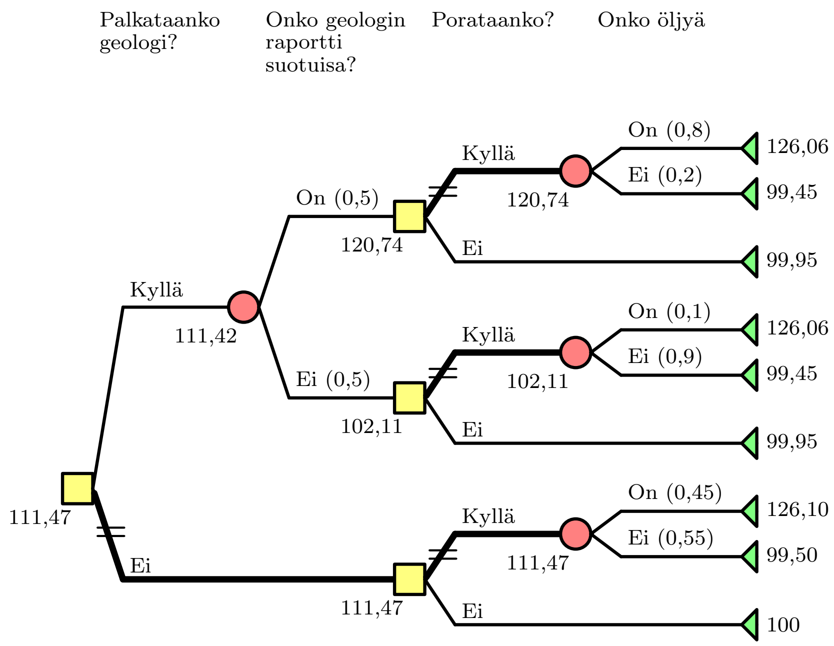
Aluksi palautamme mieliin, mikä tilanne oli riskineutraalissa päätöksenteossa:



Laskemme sitten tarvittavat hyödyt

$$\begin{aligned}
u(10.000.000 + 5.900.000) &= \sqrt{15.900} = 126{,}10,\\
u(10.000.000 + 5.890.000) &= \sqrt{15.890} = 126{,}06,\\
u(10.000.000 + 0) &= \sqrt{10.000} = 100{,}00,\\
u(10.000.000 - 10.000) &= \sqrt{9.990} = 99{,}95,\\
u(10.000.000 - 100.000) &= \sqrt{9.900} = 99{,}50,\\
u(10.000.000 - 110.000) &= \sqrt{9.890} = 99{,}45,
\end{aligned}$$

Sijoittamalla hyödyt puun lehtiin ja laskemalla solmujen arvot normaaliin tapaan takaperin saamme lopulta



Johtopäätös on, että geologia ei kannata palkita, ja poraaminen kannattaa aina. Tämä on muuten, sattumoisin, sama tulos kuin riskineutraalissakin tapauksessa.

Informaation arvo hyötyteoriassa. Seuraava luonnollinen kysymys on, kuinka paljon geologille kannattaisi korkeintaan maksaa. Tähän kysymykseen ei voi valitettavasti suoraan vastata edellä olevan päätöspuun avulla, sillä hyödyt toimivat epälineaarisesti palkkioihin nähden. Se on koko hyötykäsitteen idea! Jos haluamme selvittää, kuinka suuri asiantuntijainformaation arvo on päätöspuussa joudumme käytännössä tyypillisesti kokeilemalla haarukoimaan arvon. Toisin sanoen kasvatamme asiantuntijan kustannusta nollasta ylöspäin kunnes saavutamme pisteen, jossa asiantuntijapuun hyötyarvo on sama kuin alkuperäisen puun hyötyarvo. Sama ongelma koskee tietysti myös oraakkeli-informaation arvoa.

Harjoitustehtäviä lukuun 5

5.1. Harjoitustehtävä. (a) Kuinka halvalla esimerkin 5.1 Oiva Opiskelija olisi valmis riskeeraamaan pikkurillinsä?
(b) Kuinka paljon esimerkin 5.1 Tarmo Toimitusjohtajalle pitäisi pikkurillisä maksaa, jotta hän olisi valmis riskeeraamaan sen?

5.2. Harjoitustehtävä. Olkoon Leena Lokin hyötyfunktio $u(r) = \ln r$. Leena Lokilla on 20.000 €. Hänelle tarjotaan arpajaisia

$$\begin{aligned} L_1 &= L(1, -1.000\,€), \\ L_2 &= 0{,}9L(1, 0\,€) + 0{,}1L(1, -10.000), \end{aligned}$$

missä palkkiot ovat voittoja/tappioita.

Kumman arpajaisista Leena Lokki valitsee?

5.3. Harjoitustehtävä. Pekka Päättäjä on päättänyt itselleen seuraavat indifferenssit:

$$\begin{aligned} L(1, 10) &\sim 0{,}5L(1, 0) + 0{,}5L(1, 20), \\ L(1, 12) &\sim 0{,}4L(1, 10) + 0{,}6L(1, 20), \\ L(1, 15) &\sim 0{,}2L(1, 10) + 0{,}8L(1, 20). \end{aligned}$$

(a) Mitä pystyt sanomaan Pekka Päättäjän hyötyfunktiosta?
(b) Onko Pekka Päättäjä riskinrakastaja vai riskinkaihtaja?

5.4. Harjoitustehtävä. Oiva Opiskelijan on päätettävä osallistuako kurssille “Operaatioanalyysi” vai “Johdatus tilastotieteeseen”. Oiva arvioi, että jos hän osallistuu kurssille “Operaatioanalyysi”, niin todennäköisyydellä 10% hän saa arvosanan *5*, todennäköisyydellä 40% arvosanan *4* ja todennäköisyydellä 50% arvosanan *3*. Samoin Oiva arvelee, että jos hän osallistuu kurssille “Johdatus tilastotieteeseen”, niin todennäköisyydet arvosanoille ovat: 70% arvosanalle *4*, 25% arvosanalle *3* ja 5% arvosanalle *2*.

Oiva on indifferentti arpajaisten $L(1,\ \mathit{3})$ ja $L(0{,}25\,,\ \mathit{5}\,;\ 0{,}75\,,\ \mathit{2})$ suhteen, sekä arpajaisten $L(1,\ \mathit{4})$ ja $L(0{,}70\,,\ \mathit{5}\,;\ 0{,}30\,,\ \mathit{2})$ suhteen.

Jos Oiva Opiskelija haluaa optimoida arvosanasta saadun keskimääräisen (eli odotetun) hyödyn, niin kumman kursseista “Operaatioanalyysi” vai “Tilastotieteen johdantokurssi” hän valitsee?

5.5. Harjoitustehtävä. Esimerkin 5.3 ratkaisussa ja sitä seuraavassa yleisessä algoritmissa käytettiin kaikkia Von Neumannin ja Morgensternin aksioomia.

(a) Etsi jokaiselle Von Neumann–Morgenstern -aksioomalle kohta, missä sitä käytettiin esimerkin 5.3 ratkaisussa.
(b) Mikä esimerkin 5.3 ratkaisualgoritmissa menee pieleen, jos jokin Von Neumannin ja Morgensternin aksioomista ei pitäisikään paikkaansa?
(c) Onko jokin Von Neumann–Morgenstern -aksioomista mielestäsi erityisen kyseenalainen? Jos mielestäsi useakin niistä on kyseenalainen, niin mikä on mielestäsi kaikkein kyseenalaisin?

5.6. Harjoitustehtävä. Lasse Lottoaja lottoaa yhden rivin joka viikko. Hänellä on myös 200.000 € kotivakuutus, josta hän maksaa 100 € vuosittaista vakuutusmaksua. Kotivakuutuksessa on 500 € omavastuu.

(a) Onko Lasse Lottoaja riskinkaihtaja?
(b) Onko Lasse Lottoaja riskinrakastaja?
(c) Onko Lasse Lottoaja epärationaalinen?

5.7. Harjoitustehtävä.

(a) Kuinka paljon esimerkissä 5.8 öljy-yhtiön kannattaisi korkeintaan maksaa geologille?
(b) Kuinka paljon esimerkissä 5.8 öljy-yhtiön kannattaisi korkeintaan maksaa oraakkelille, joka ilmoittaa onko paikassa P öljyä vai ei?

LUKU 6

Hyötyteorian kritiikki

Von Neumann–Morgensternläisessä hyötyteoriassa on se ikävä puoli, että käytännössä ihmiset eivät näytä noudattavan Von Neumann–Morgenstern -aksioomia. Yksi keskeinen kritiikki hyötyteoriaa vastaan on Tverskyn ja Kahnemanin vuonna 1981 esittämät prospektiteoria ja ankkurointiefekti.

Prospektiteoria

6.1. Esimerkki. Tarkastelemme *Allais'n paradoksia.*[1] Herra A.:n on valittava seuraavien arpajaisten väliltä (palkkiot ovat euroja):

$$\begin{aligned} L_1 &= L(1, 1.000.000), \\ L_2 &= L(0{,}10\,,\ 5.000.000\ ;\ 0{,}89,\ 1.000.000\ ;\ 0{,}01\,,\ 0). \end{aligned}$$

Herra A. — kuten valtaosa muistakin ihmisistä — valitsee arpajaiset L_1. Seuraavaksi herra A.:n on valittava seuraavien arpajaisten väliltä:

$$\begin{aligned} L_3 &= L(0{,}11\,,\ 1.000.000\ ;\ 0{,}89\,,\ 0), \\ L_4 &= L(0{,}10\,,\ 5.000.000\ ;\ 0{,}90\,,\ 0). \end{aligned}$$

Herra A. — kuten valtaosa muistakin ihmisistä — valitsee arpajaiset L_4.

Tarkastelemme, millainen herra A.:n hyötyfunktion tulisi olla. Voimme normeerata $u(5.000.000) = 1$ ja $u(0) = 0$. Merkitsemme $q = u(1.000.000)$. Herra A. valitsee arpajaiset L_1 mieluummin kuin arpajaiset L_2. Tämä tarkoittaa Von Neumann–Morgensterniläisittäin sitä, että

$$q \ > \ 0{,}10 \cdot 1 \ + \ 0{,}89 \cdot q \ + \ 0{,}01 \cdot 0$$

eli $q > 0{,}90909$. Toisaalta herra A. valitsee arpajaiset L_4 mieluummin kuin arpajaiset L_3. Tämä tarkoittaa Von Neumann-Morgensterniläisittäin sitä, että

$$0{,}10 \cdot 1 \ + \ 0{,}90 \cdot 0 \ > \ 0{,}11 \cdot q \ + \ 0{,}89 \cdot 0$$

eli $q < 0{,}90909$.

Herra A.:lla ei siis voi olla hyötyfunktiota, sillä jos hänellä sellainen olisi, niin olisi myös olemassa luku q, joka on *sekä* suurempi kuin 0,90909 *että* pienempi kuin 0,90909.[2] Koska hyötyfunktion olemassaolo on yhtäpitävää Von Neumann–Morgenstern -rationaalisuuden kanssa, johtopäätös on, että herra A. — kuten valtaosa muistakin ihmisistä — on epärationaalinen.

[1] Maurice Allais esitti tämän paradoksin vuonna 1953. Paradoksin tarkoitus on lähinnä kritisoida Von Neumannin ja Morgensternin riippumattomuusaksioomaa.

[2] Tämä argumentti on *reductio ad absurdum* eli perustelu ristiriidan kautta.

Herra A.:n epärationaalisuus voidaan selittää pois esimerkiksi Tverskyn ja Kahnemanin esittämän *prospektiteorian* avulla. Prospektiteoriassa ideana on korvata todennäköisyydet p *prospekteilla* $\Pi(p)$, missä prospektifunktio $\Pi(p)$ muuttuu nopeammin, kun p on lähellä ykköstä tai nollaa. Tällä on tarkoitus mallintaa matemaattisesti se havaittu psykologinen tosiseikka, että ihmisillä on tapana antaa suurille ja pienille todennäköisyyksille liian suuri paino. Ihmiset esimerkiksi tyypillisesti pitävät muutosta todennäköisyydestä 0,01 todennäköisyyteen 0,02 huomattavasti merkittävämpänä kuin muutosta todenäköisyydestä 0,41 todennäköisyyteen 0,42, vaikka molemmissa tapauksissa todennäköisyyksien muutos on sama 1 %-yksikkö.

Prospektiteorian mukainen päätössääntö melkein kuten hyötyteorian mukainen päätössääntö. Ainoa ero on, että summassa todennäköisyydet p on korvattu prospekteilla $\Pi(p)$. Toisin sanoen jokaista hyötyfunktiota $u(r)$ ja prospektifunktiota $\Pi(p)$ vastaa arpajaispreferenssit. Nimittäin päätöksentekijä preferoi arpajaisia L' yli arpajaisten L — $L \prec L'$ — jos ja vain jos

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_\Pi\Big(u(L)\Big) &= \sum_j u(r_j)\,\Pi(p_j) \\
&< \sum_j u(r'_j)\,\Pi(p'_j) \\
&= \mathrm{E}_\Pi\Big(u(L')\Big).
\end{aligned}$$

Samoin päätöksentekijä on indifferentti arpajaisten L ja L' välillä — $L \sim L'$ — jos ja vain jos

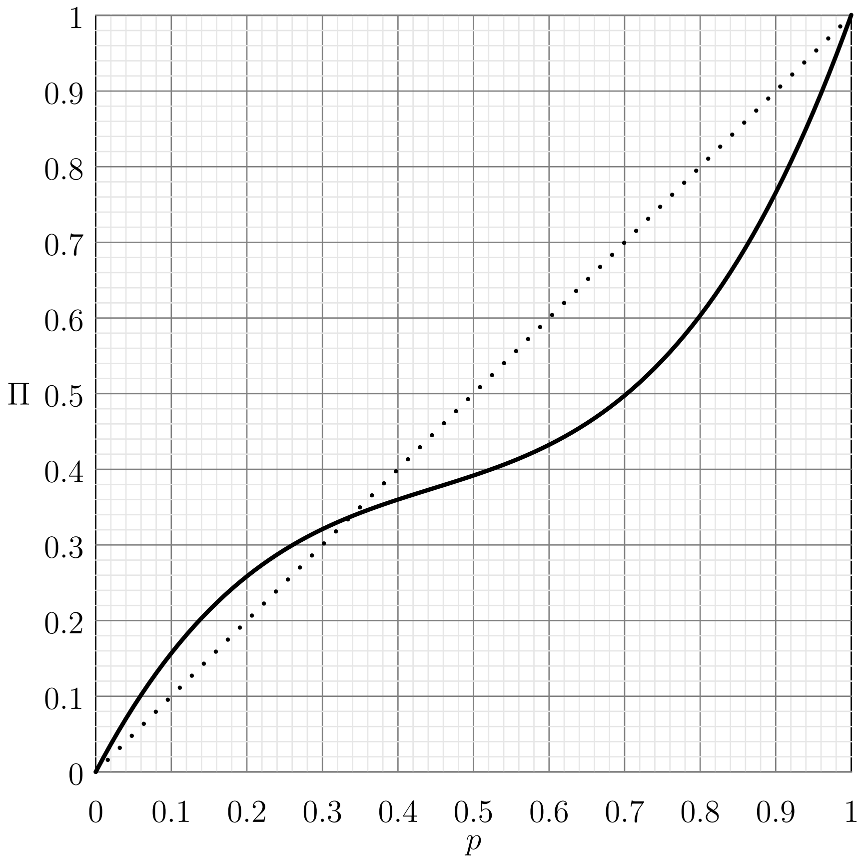
$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_\Pi\Big(u(L)\Big) &= \sum_j u(r_j)\,\Pi(p_j) \\
&= \sum_j u(r'_j)\,\Pi(p'_j) \\
&= \mathrm{E}_\Pi\Big(u(L')\Big).
\end{aligned}$$

Tarkastelemme esimerkin vuoksi prospektifunktiota

$$\Pi(p) = 1{,}89799p - 3{,}55995p^2 + 2{,}662549p^3.$$

Tällä prospektifunktiolla on se toivottu ominaisuus, että se muuttuu nopeammin nollan ja ykkösen lähellä ja hitaammin "keskitodennäköisyyksillä". Muuten valittu prospektifunktio on täysin ad hoc, eli sille ei ole mitään teoreettisia perusteluja. Emme käsittele tällä kurssilla prospektifunktion empiiristä estimointia.

Kuvallisesti siis tarkastelemme prospektifunktiota



Nyt (hyötyinä mitatut) *varmuusvastineet*[3] ovat

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_\Pi\,(u(L_1)) &= q\cdot\Pi(1)\\
&= q,\\
\mathrm{E}_\Pi\,(u(L_2)) &= 1\cdot\Pi(0{,}10)\ +\ q\cdot\Pi(0{,}89)\ +\ 0\cdot\Pi(0{,}01)\\
&= \Pi(0{,}10)\ +\ q\cdot\Pi(0{,}89)\\
&= 0{,}15686\ +\ q\cdot 0{,}74639,\\
\mathrm{E}_\Pi\,(u(L_3)) &= q\cdot\Pi(0{,}11)\ +\ 0\cdot\Pi(0{,}89)\\
&= q\cdot\Pi(0{,}11)\\
&= q\cdot 0{,}16925,\\
\mathrm{E}_\Pi\,(u(L_4)) &= 1\cdot\Pi(0{,}10)\ +\ 0\cdot\Pi(0{,}90)\\
&= \Pi(0{,}10)\\
&= 0{,}15686.
\end{aligned}
$$

Herra A.:n arpajaispreferenssit $L_1 \succ L_2$ ja $L_4 \succ L_3$ asettavat ehdot $\mathrm{E}_\Pi(u(L_1)) > \mathrm{E}_\Pi(u(L_2))$ ja $\mathrm{E}_\Pi(u(L_4)) > \mathrm{E}_\Pi(u(L_3))$. Toisin sanoen

$$
\begin{aligned}
q &> 0{,}15686 + q\cdot 0{,}74639,\\
0{,}15686 &> q\cdot 0{,}16925.
\end{aligned}
$$

[3]Arpajaisten *varmuusvastine* on se luku — hyöty tai palkkio — jolla päätöksentekijä on valmis luopumaan oikeudestaan tai velvollisuudestaan osallistua arpajaisiin.

Näistä saamme q:lle ehdot

$$0{,}61851 \quad < \quad q \quad < \quad 0{,}92679.$$

Johtopäätös on, että prospektiteoria selittää paradoksin.

Ankkurointiefekti

Ankkurointiefektillä tarkoitetaan esimerkiksi sitä, että päätöksentekijä riskipreferenssit kääntyvät ympäri, kun voitosta siirrytään tappioihin. Päätöksentekijä siis ankkuroituu nykytilanteeseen ja on tyypillisesti riskinrakastaja tappioille (vaikkei sitä usein huomaakaan) ja riskinkaihtaja voitoille.

Huomattavaa on, että ankkuroinnissa on kyse *kognitiivisesta harhasta*, missä täsmälleen samaan tilanteeseen suhtaudutaan eri tavalla, jos tilanne *muotoillaan* eri tavalla. Pahaiten tämä käy ilmi harjoitustehtävässä 6.1.

6.2. Esimerkki. Olkoot arpajaiset *voittoineen/tappioineen*

$$\begin{aligned}
L_1 &= L(1\,,\, 250\text{€}),\\
L_2 &= L(0{,}25\,,\, 1.000\text{€}\ ;\ 0{,}75\,,\, 0\text{€}),\\
L_3 &= L(1\,,\, -750\text{€}),\\
L_4 &= L(0{,}75\,,\, -1.000\text{€}\ ;\ 0{,}25\,,\, 0\text{€}).
\end{aligned}$$

84% kaikista ihmisistä valitsee L_1:n mieluummin kuin L_2:n ja 87% ihmisistä valitsee L_4:n mieluummin kuin L_3:n.

Huomaamme aluksi, vertailun vuoksi, että riskineutraalin päätöksentekijän preferenssit olisivat $L_4 \sim L_3 \prec L_2 \sim L_1$. Koska kyseessä on tappiot/voitot, niin preferenssi $L_2 \prec L_1$ tarkoittaa, että päätöksentekijä on riskinkaihtaja voitoille ja samoin preferenssi $L_3 \prec L_4$ tarkoittaa, että päätöksentekijä on riskinrakastaja tappioille. Koska tämän on pädettävä kaikille päätöksentekijän mahdollisille varallisuuksille, hyötyfunktion on oltava affiini. Mutta hyötyfunktio ei voi olla affiini, sillä $L_3 \not\sim L_4$.

Ankkurointiefekti selittää tämän paradoksin: voittojen suhteen ollaan riskinkaihtajia ja tappioiden suhteen ollaan riskinrakastajia.

Suhtautuminen kritiikkiin

Tverskyn ja Kahnemanin Von Neumann–Morgenstern -hyötyteorian kritiikkiin voi suhtautua monellakin tavalla. Kaksi toisistaan täysin poikkeavaa tapaa on:

- Tverskyn ja Kahnemanin havainnot osoittavat, että ihmiset eivät toimi Von Neumann–Morgenstern -hyötyteorian mukaan. Siten hyötyteoria ei vastaa todellisuutta, ja sen antama hyöty (☺) on vähintäänkin kyseenalainen!
- Tversky, Kahneman ja kumppanit eivät ole havainnoillaan osoittaneet mitään muuta kuin sen, että ihmiset toimivat epärationaalisesti. Tämän ei pitäisi olla mikään järisyttävä uutinen kenellekään!

Harjoitustehtäviä lukuun 6

6.1. Harjoitustehtävä. Sinun on valmistauduttava possuköhän etenemiseen Suomessa. Oletetavaa on, että possuköhä tappaa 600 ihmistä. Voit valita kahdesta rokotusohjelmasta:

Ohjelma I: 200 ihmistä säästyy.
Ohjelma II: Todennäköisyydellä 1/3 600 ihmistä säästyy.

Kumman rokotusohjelman valitset?

Entä kumman rokotusohjelman valitset, jos vaihtoehdot ovat

Ohjelma I': 400 ihmistä kuolee.
Ohjelma II': Todennäköisyydellä 2/3 600 ihmistä kuolee.

6.2. Harjoitustehtävä. Tarkastelemme *Ellsbergin paradoksia.* Laatikossa on 90 palloa. Palloista 30 on punaisia, ja loput palloista ovat joko keltaisia tai mustia. Laatikosta nostetaan yksi pallo umpimähkään. Seuraavat palkkiovaihtoehdot ovat nyt tarjolla:

Vaihtoehto 1: Saat 1.000€, jos tulee punainen pallo.
Vaihtoehto 2: Saat 1.000€, jos tulee keltainen pallo.
Vaihtoehto 3: Saat 1.000€, jos tulee keltainen tai musta pallo.
Vaihtoehto 4: Saat 1.000€, jos tulee punainen tai musta pallo.

Useimmat ihmiset valitsevat vaihtoehdon 1 mieluummin kuin vaihtoehdon 2 ja vaihtoehdon 3 mieluummin kuin vaihtoehdon 4. Miksi tämä on epärationaalista?

6.3. Harjoitustehtävä. Tarkastelemme *Tverskyn ja Kahnemanin paradoksia.* Olkoon arpajaiset *tappioinen/voittoinen*

$$\begin{aligned} L_1 &= L(0{,}001\,,\ 5.000\$\ ;\ 0{,}999\,,\ 0\$), \\ L_2 &= L(1\,,\ 5\$), \\ L_3 &= L(0{,}001\,,\ -5.000\$;\ 0{,}999\,,\ 0\$), \\ L_4 &= L(1\,,\ -5\$). \end{aligned}$$

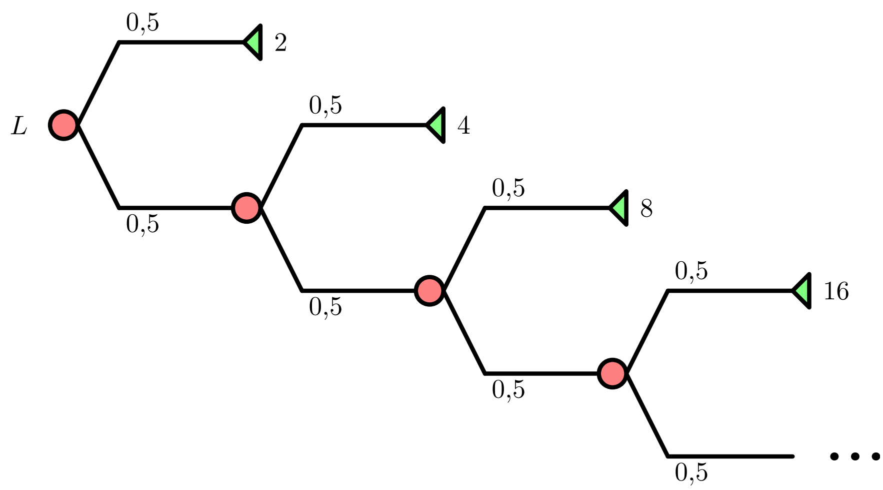
Tversky ja Kahneman pyysivät 72 henkilöä valitsemaan arpajaisten L_1 ja L_2 sekä L_3 ja L_4 väliltä. Yli 75% valitsi arpajaiset L_1 mieluummin kuin arpajaiset L_2 ja arpajaiset L_4 mieluummin kuin arpajaiset L_3.

(a) Miten riskineutraali päätöksentekijä arvottaisi arpajaiset?
(b) Miten riskiä rakastava päätöksentekijä arvottaisi arpajaiset?
(c) Miten riskiä kaihtava päätöksentekijä arvottaisi arpajaiset?
(d) Miten sinä järjestäisit arpajaiset?
(e) Miksi Tverskyn ja Kahnemanin koe on ristiriidassa Von Neumann–Morgenstern -hyötyteorian kanssa?
(f) Miten prospektiteoria tai ankkurointiefekti voi selittää Tverskyn ja Kahnemanin kokeen?

6.4. Harjoitustehtävä. Tarkastelemme *Pietarin paradoksia.* Olkoon L seuraavat (mahdollisesti äärettömät) arpajaiset: Reilua kolikkoa heitetään kunnes tulee ensimmäinen klaava. Jos klaava tulee n:nnellä heitolla, pelaaja saa 2^n euroa. Toisin sanoen L on äärettömät arpajaiset

$$\begin{aligned} L &= L\left(2^{-1}, 2^{1} \;;\; 2^{-2}, 2^{2} \;;\; 2^{-3}, 2^{3} \;;\; 2^{-4}, 2^{4} \;;\; \ldots\right) \\ &= L\,(0{,}5, 2 \;;\; 0{,}25, 4 \;;\; 0{,}125, 8 \;;\; 0{,}0625, 16 \;;\; \ldots)\,. \end{aligned}$$

Sama kuvallisesti:



(a) Mikä on suurin hinta, jonka riskineutraali päätöksentekijä suostuu maksamaan osallistumismaksuna arpajaisista L?
(b) Mikä on suurin hinta, jonka hyötyfunktion $u(r) = \log_2 r$ omaava päätöksentekijä on valmis maksamaan arpajaisista L?
(c) Mikä on suurin hinta, jonka hyötyfunktion $u(r) = \ln r$ omaava päätöksentekijä on valmis maksamaan arpajaisista L?

6.5. Harjoitustehtävä. Kokeessa sinulle tarjotaan kaksi mahdollisuutta:

Vaihtoehto 1: saat 5 €,
Vaihtoehto 2: saat 1.000 €.

Voit valita kumman tahansa, mutta jos valitset epärationaalisesti, niin kokeen järjestäjä antaa sinulle 1.000.000 €. Miten valitset?

6.6. Harjoitustehtävä. Etsi tästä kirjasta vähintään yksi painovirhe ja vähintään yksi “aito” virhe ja lähetä vastauksesi luennoijalle osoitteeseen `tommi.sottinen@uwasa.fi` otsikolla `ORMS2020-virheita`.

6.7. Harjoitustehtävä. Anna palautetta (kehuja, haukkuja, parannusehdotuksia) tästä kurssista ja/tai näistä luentomuistiinpanoista luennoijalle osoitteeseen `tommi.sottinen@uwasa.fi` otsikolla `ORMS2020-palaute`.

Kirjallisuutta

[1] Robert Clemen (1996) *Making Hard Decisions: An Introduction to Decision Analysis*, Second edition, Duxbury Press.

[2] Franz Kafka (1915) *Muodonmuutos.*

[3] Mika Koskenoja (2002) *Sattuman matematiikkaa I – klassinen todennäköisyys*, Solmu 2002:2.

[4] Howard Raiffa (1968) *Decision Analysis: Introductory Lectures on Choices under Uncertainty*, Random House.

[5] Tommi Sottinen (2008) *Todennäköisyysteoria: Teoria mitasta, mitallisuudesta, mitattomuudesta ja riippumattomuudesta*, Luentomuistiinpanot.

[6] Nassim Taleb (2004) *Satunnaisuuden hämäämä*, Terra Cognita.

[7] Nassim Taleb (2007) *Musta joutsen: Erittäin epätodennäköisen vaikutus*, Terra Cognita.

[8] Pekka Tuominen (1993) *Todennäköisyyslaskenta I*, 2. tarkistettu painos, Limes.

[9] Wayne Winston (2004) *Operations Research: Applications and Algorithms*, Fourth edition, Brooks/Cole.

Hakemisto

absoluuttinen riskiaversio, 87
affiinimuunnos, 84
alipuu, 44
Allais'n paradoksi, 93
ankkurointi, 96
arpajaiset, 78
arvofunktio, 30
asiantuntijainformaatio, 52
asiantuntijainformaation arvo, 52

Bayesin kaava, 9, 20, 50, 54
bayesläinen todennäköisyys, 9
binomijakauma, 16
binomikerroin, 15

ehdollinen todennäköisyys, 17
ei-stokastinen päätössääntö, 30
eksponenttinen hyöty, 87
Ellsbergin paradoksi, 97
entropia, 58
epätäydellinen informaatio, 52

fraktiili, 22
frekventistinen todennäköisyys, 9

geometrinen jakauma, 73
geometrinen todennäköisyys, 8

Hurwiczin päätössääntö, 32
hypergeometrinen jakauma, 15

indifferenssi, 79

jakauma, 21
juuri, 44

katumuksen kaihtaja, 31
klassinen todennäköisyys, 7
kognitiivinen harha, 96
kokonaistodennäköisyyden kaava, 20, 51, 53
Kolmogorovin aksioomat, 11
komplementtikaava, 11
konkaavi, 33, 87
konveksi, 33, 87
konveksi yhdistäminen, 34

lehti, 45
log-uskottavuus, 66

mediaani, 22
moodi, 22

odotetun hyödyn päätössääntö, 33
odotusarvo, 22
odotusarvosääntö, 32
optimismin mittari, 32
optimisti, 31
oraakkeli-informaatio, 55
oraakkeli-informaation arvo, 55
otanta ilman takaisinpanoa, 15
otanta takaisinpanolla, 16

palkkiomatriisi, 29
parametrinen tilastollinen päättely, 65
Pearson–Tukey-menetelmä, 71
pessimisti, 30
Pietarin paradoksi, 97
Poisson-jakauma, 69
posteriori, 9
preferenssi, 79
priori, 9
prospekti, 94
prospektiteoria, 94
päätösmatriisi, 29
päätössolmu, 44

rajahyöty, 33
rationaalinen päätöksenteko, 84
realisti, 32
reunaehto, 35
riippumattomuus, 19
riskineutraali päätössääntö, 32, 33
riskinkaihtaja, 33, 87
riskinrakastaja, 33, 87
riskiprofiili, 77
riskitoleranssi, 88

sattumasolmu, 44
satunnaismuuttuja, 21
stokastinen päätössääntö, 30
suhteellinen frekvenssi, 9
suhteellinen riskiaversio, 87

suhteellisten frekvenssien menetelmä, 61
summakaava, 12
suurimman uskottavuuden periaate, 65
suurten lukujen laki, 9

todennäköisyystiheys, 65
tulokaava, 17
Tverskyn ja Kahnemanin paradoksi, 97

uskottavuus, 9, 66

varianssi, 23
varmuusvastine, 95
Venn-diagrammi, 11
Von Neumann–Morgenstern-aksioomat, 84

yhdistetyt arpajaiset, 79
yksinkertainen tulokaava, 19
yleinen summakaava, 13
yleinen tulokaava, 18