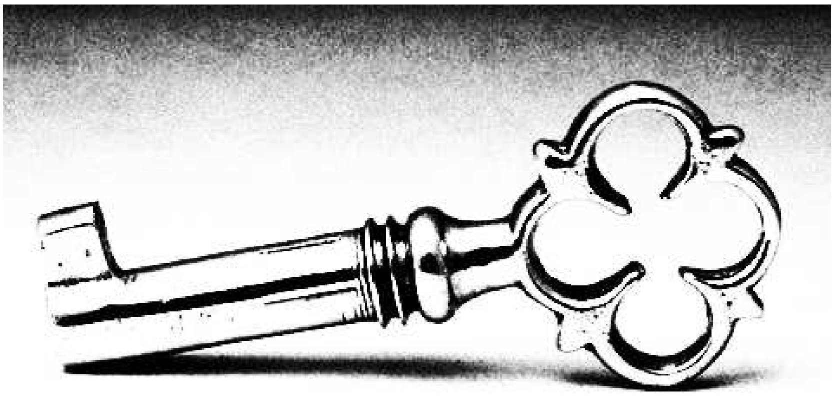
Malliavin-laskenta

eli gaussisten prosessien derivointi



Tommi Sottinen

tommi.sottinen@helsinki.fi
mathstat.helsinki.fi/~tsottine

3. huhtikuuta 2006

Sisältö

1 Gaussiset Hilbert-avaruudet **1**

1.1 Gaussiset satunnaismuuttujat 1

1.2 Isonormaali gaussinen prosessi 8

1.3 Brownin liike ja valkoinen häly 12

1.4 Hermiten polynomit 17

2 Wiener–Itô-kaaoskehitelmä **21**

2.1 Abstrakti kaaoskehitelmä 21

2.2 Moninkertaiset Wiener-integraalit 26

2.3 Valkoinen häly ja kaaoskehitelmä 33

2.4 Itô-integraalit ja Itô–Clark-esityslause 39

3 Malliavin-derivaatta **44**

3.1 Derivointi Banach-avaruuksissa 44

3.2 Derivointi Wiener-avaruudessa 48

3.3 Yleinen gaussinen määrittely 54

3.4 Kaaoskehitelmän derivaatta 66

4 Divergenssi eli Skorohod-integraali **74**

4.1 Liitto-operaattoreista 74

4.2 Divergenssi liitto-operaattorina 77

4.3 Kaaoskehitelmän divergenssi 82

4.4 Clark–Ocone-esityslause 84

Motivointi

Klassinen stokastinen analyysi on integrointia Brownin liikkeen suhteen. Malliavin-laskenta, eli stokastinen variaatiolaskenta, on derivointia Brownin liikkeen suhteen. Eräs keskeinen stokastisen analyysin tulos on, että Brownin liikkeeestä W määräytyvä satunnaismuuttuja F voidaan esittää stokastisena integraalina

$$F\big(W(\omega)\big) \;=\; \mathbf{E}\left[F(W)\right] + \int_0^1 \varphi_t(\omega)\,\mathrm{d}W_t(\omega).$$

Valitettavasti tämä esitys on olemassaolo- ja yksikäsitteisyystulos. Stokastinen analyysi ei kerro, mikä prosessi φ on. Malliavin-laskenta kertoo:

$$\varphi_t(\omega) \;=\; \mathbf{E}\left[D_t F | \mathcal{F}_t^W\right](\omega),$$

missä D on Malliavin-derivaatta. Tämä on **Clark–Ocone-esityslause** ja sillä on sovelluksia esimerkiksi rahoitusteoriassa.

Luku 1

Gaussiset Hilbert-avaruudet

Motto: Gaussisten satunnaisotusten teoria on Hilbert-avaruuksien teoriaa.

Osio 1.1 käsittelee gaussisia jakaumia erilaisissa avaruuksissa sekä kertailee Banach- ja Hilbert-avaruuksia. Osiossa 1.2 määritellään isonormaali gaussinen prosessi ja osio 1.3 käsittelee sen erikoistapauksia: Brownin liikettä ja valkoista hälyä. Osio 1.4 käsittelee gaussisen mitan suhteen ortogonaalisia polynomeja.

1.1 Gaussiset satunnaismuuttujat

Olkoon $\Omega = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ todennäköisyysavaruus.

Reaaliarvoinen satunnaismuuttuja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ on **gaussinen**, eli normaalisti jakautunut, jos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}[X \in dx] &:= \mathbf{P} \circ X^{-1}(dx) \\
&= \gamma(dx; \mu, \sigma^2) \\
&:= p(x; \mu, \sigma^2)\, dx \\
&:= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\} dx. \qquad (1.1.1)
\end{aligned}
$$

Tällöin odotusarvo $\mathbf{E}[X]$ ja varianssi $\mathbf{Var}[X]$ ovat

$$\mathbf{E}[X] := \int_{-\infty}^{\infty} x\, \mathbf{P}[X \in dx] = \mu,$$

$$\mathbf{Var}[X] := \mathbf{E}\left[\left(X - \mathbf{E}[X]\right)^2\right] = \sigma^2.$$

Kun X on jakautunut kaavan (1.1.1) mukaan, niin merkitsemme tavalliseen tapaan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Jos X on degeneroitunut pisteeseen μ eli $\mathbf{P}[X = \mu] = 1$, niin tulkitsemme, että X on $N(\mu, 0)$-jakautunut.

Jos $\mathbf{E}[X] = 0$, niin sanomme, että X on **keskitetty**.

Reaaliarvoisen gaussisen satunnaismuuttujan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ **karakteristinen funktio**, eli analyysin kielellä Fourier-muunnos, on

$$\begin{aligned} \varphi_X(\theta) &:= \mathbf{E}\left[e^{i\theta X}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x}\, \mathbf{P}[X \in dx] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x}\, p(x; \mu, \sigma^2)\, dx \\ &= \exp\left\{i\mu\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right\}. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Kaavan (1.1.2) voi perustella esimerkiksi analyyttisen kuvauksen $\theta \mapsto e^{i\theta x}$ sarjakehitelmän

$$e^{i\theta x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta x)^n}{n!}$$

avulla. Olkoon nimittäin $Y = (X - \mu)/\sigma$. Tällöin $Y \sim N(0, 1)$. Koska

$$\varphi_X(\theta) = e^{i\theta\mu}\varphi_Y(\sigma\theta),$$

niin riittää osoittaa, että

$$\varphi_Y(\theta) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\theta^2\right\}.$$

Olkoon $n!! := n(n-2)\cdots 1$. Olettamalla tunnetuksi kaavan

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/2}\, dx = (2n-1)!!$$

saamme lasketuksi

$$
\begin{aligned}
\varphi_Y(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} e^{-x^2/2}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta x)^n}{n!} e^{-x^2/2}\, dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/2}\, dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} (2n-1)!! \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}(2n)!}{(2n)!2^n n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\theta^2}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}\theta^2\right\}.
\end{aligned}
$$

Näin kaava (1.1.2) on perusteltu.

Gaussisen satunnaismuuttujan **momenttigeneroiva funktio**, eli analyysin kielellä Laplace-muunnos, on

$$
\nu_X(\theta) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x}\, \mathbf{P}[X \in dx] = \exp\left\{\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right\}. \tag{1.1.3}
$$

Kaava (1.1.3) on helppo perustella täsmälleen samalla tavalla kuin kaava (1.1.2).

Seuraavaksi yleistämme gaussisen jakauman käsitteen koskemaan ei-reaaliarvoisia satunnaismuuttujia.

Äärellisulotteinen gaussinen jakauma lienee kaikille tuttu: $\mathbb{R}^d$-arvoinen satunnaismuuttuja, siis satunnaisvektori, $X = (X_1, \ldots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ on gaussinen, jos kaikki lineaarikombinaatiot

$$
\sum_{j=1}^{d} a_j X_j, \qquad a_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, d, \tag{1.1.4}
$$

ovat gaussisia. Jos satunnaisvektori X ei ole degeneroitunut missään $\mathbb{R}^d$:n aliavaruudessa, niin sen jakauma voidaan esittää tiheyden avulla:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X \in dx] &:= \mathbf{P}[X_1 \in dx_1, \dots, X_d \in dX_d] \\ &= \gamma_d(dx_1, \dots, dx_d; \mu, K) \\ &:= p_d(x_1, \dots, x_d; \mu, K)\, dx_1 \cdots dx_n \\ &:= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |K|}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left\langle x-\mu, K^{-1}(x-\mu)\right\rangle_{\mathbb{R}^d}\right\} dx_1 \cdots dx_d, \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

missä $\mu_j = \mathbf{E}[X_j]$, $K_{ij} = \mathbf{E}[X_i X_j]$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^d}$ on normaali $\mathbb{R}^d$:n sisätulo ja $|K|$ on matriisin K determinantti. Jos X on jakautunut kaavan (1.1.5) niin merkitsemme $X \sim N(\mu, K)$. Mikäli $\mu = 0$ ja K on identiteettimatriisi Id, niin sanomme, että X on **standardoitu**. Gaussisen satunnaisvektorin X karakteristinen funktio on

$$\begin{aligned} \varphi_X(\theta) &:= \mathbf{E}\left[\exp\left\{i\langle \theta, X\rangle_{\mathbb{R}^d}\right\}\right] \\ &= \exp\left\{i\,\langle \theta, \mu\rangle_{\mathbb{R}^d} - \frac{1}{2}\,\langle \theta, K\theta\rangle_{\mathbb{R}^d}\right\}. \end{aligned}$$

Tässä μ ja K ovat samoja kuin kaavassa (1.1.5) ja $\theta \in \mathbb{R}^d$. Momenttigeneroiva funktio on vastaavasti

$$\begin{aligned} \nu_X(\theta) &:= \mathbf{E}\left[\exp\left\{\langle \theta, X\rangle_{\mathbb{R}^d}\right\}\right] \\ &= \exp\left\{\langle \theta, \mu\rangle_{\mathbb{R}^d} + \frac{1}{2}\,\langle \theta, K\theta\rangle_{\mathbb{R}^d}\right\}. \end{aligned}$$

1.1.6 Huomautus. Itse asiassa jokainen $N(\mu, K)$-jakautunut satunnaisvektori voidaan esittää muodossa

$$X = L\xi + \mu,$$

missä satunnaisvektori ξ on $N(0, \mathrm{Id})$-jakautunut ja L on matriisin K "neliöjuuri": $LL^T = K$ (luonnollisestikaan L ei ole yksikäsitteinen).

Ääretönulotteinen gaussinen jakauma, tai pikemminkin perhe jakaumia, määritellään äärellisulotteisten projektioiden kautta.

1.1.7 Määritelmä. Olkoon J joukko. Tällöin perhe $(X_j : j \in J)$ eli kuvaus $X : \Omega \to \mathbb{R}^J$ on gaussinen, jos sen kaikki äärellisulotteiset projektiot $(X_{j_1}, \ldots, X_{j_n}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $j_1, \ldots, j_n \in J$, ovat gaussisia.

Tarkastelemme lopuksi Banach- ja Hilbert-arvoisia gaussisia satunnaismuuttujia, jolloin voimme antaa analyyttisemmän määritelmän gaussisuudelle. Aloitamme kertaamalla käsitteitä.

Banach-avaruus $B = (B, \|\cdot\|_B)$ on normiavaruus, joka on täydellinen norminsa $\|\cdot\|_B$ suhteen. Toisin sanoen, jos $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono normissa $\|\cdot\|_B$ eli

$$\lim_{n,m\to\infty} \|b_n - b_m\|_B = 0,$$

niin on olemassa sellainen $b \in B$, että

$$\lim_{n\to\infty} \|b - b_n\|_B = 0.$$

Banach-avaruuden $B = (B, \|\cdot\|_B)$ **topologinen duaali** B^* on rajoitettujen, siis jatkuvien, lineaaristen funktionaalien $b^* : B \to \mathbb{R}$ joukko. Duaaliavaruus B^* on myös Banach-avaruus, kun se on varustettu normilla

$$\|b^*\|_{B^*} = \sup_{b\in B} \frac{|<b^*, b>|}{\|b\|_B}.$$

Käytimme tässä normaalia paritusmerkintää $<b^*, b> = b^*(b)$ ja tulkintaa $0/0 = 0$.

Banach-avaruuden jono $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ **suppenee vahvasti** eli normissa kohti alkiota $b \in B$, jos $\lim_{n\to\infty} \|b_n - b\|_B = 0$. Vastaavasti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ **suppenee heikosti** kohti alkiota $b \in B$, jos $\lim_{n\to\infty} <b^*, b_n> = <b^*, b>$ kaikilla $b^* \in B^*$. Nimitykset "vahva" ja "heikko" ovat korrekteja: jos jono suppenee vahvasti, niin se suppenee heikosti, mutta käänteinen ei päde. Lisäksi, jos $b_n \to b$ heikosti ja $b_n \to b'$ vahvasti, niin $b = b'$.

Banach-arvoiselle satunnaismuuttujalle $X : \Omega \to B$ määritelmä 1.1.7 voidaan lausua muodossa: $<b^*, X>$ on gaussinen kaikilla $b^* \in B$. Tämä on kaavan (1.1.4) luonnollinen yleistys.

1.1.8 Huomautus. Avaruus $\mathbb{R}^J$ itse on harvemmin Banach-avaruus. Usein on kuitenkin mahdollista löytää sellainen Banach-avaruus $B \subset \mathbb{R}^J$, että $\mathbf{P}[X \in B] = 1$. Tyypillinen esimerkki on tilanne, jossa $J = [0, 1]$ ja prosessilla $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ on jatkuvat polut. Tällöin siis $B = C([0, 1])$ varustettuna sup-normilla $\|b\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |b(t)|$.

Separoituvat Banach-arvoiset gaussiset satunnaismuuttujat voidaan määritellä myös käyttämällä **karakteristisia funktionaaleja.**

1.1.9 Propositio. *Olkoon* B *separoituva reaalinen Banach-avaruus. Satunnaismuuttuja* $X : \Omega \to B$ *on gaussinen jos ja vain jos*

$$\mathbf{E}\left[e^{i<b^*,X>}\right] = \exp\left\{i <b^*, \mu> - \frac{1}{2} <b^*, Kb^*>\right\}$$

kaikilla $b^* \in B^*$. *Tässä* $\mu \in B$ *ja lineaarinen operaattori* $K : B^* \to B$ *on symmetrinen ja positiivinen:* $<b_1^*, Kb_2^*> = <b_2^*, Kb_1^*>$ *ja* $<b^*, Kb^*> \geqslant 0$.

Jos Banach-avaruuden $H = (H, \|\cdot\|_H)$ normi $\|\cdot\|_H$ toteuttaa **suunnikassäännön**

$$2\|h\|_H^2 + 2\|h'\|_H^2 = \|h + h'\|_H^2 + \|h - h'\|_H^2,$$

niin kuvaus

$$\langle h, h' \rangle_H := \frac{1}{4}\left(\|h + h'\|_H^2 - \|h - h'\|_H^2\right)$$

on sisätulo. Tällöin $H = (H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ on **Hilbert-avaruus**.

Jos H on reaalinen Hilbert-avaruus, niin **Rieszin esityslauseen** nojalla sen topologinen duaali H^* voidaan samaistaa sen itsensä kanssa: kaikille $h^* \in H^*$ löytyy sellainen $h' \in H$, että $<h^*, h> = \langle h', h\rangle_H$ kaikilla $h \in H$. Lisäksi samaistus $h^* \mapsto h'$ on isometria. Tässä on tärkeää, että H on reaalinen. Kompleksisessa tapauksessa emme voi samaistaa avaruuksia H ja H^* isometrisesti (kompleksikonjugaatit pilaavat isometrian). Tällöin samaistus pitää tehdä avaruuksien H ja H^{**} välille.

Jatkossa kaikki vektoriavaruudet ovat reaalisia.

Erityisen hienoa gaussisissa satunnaismuuttujissa on se, että niiden muodostama joukko on suljettu $L^2(\Omega)$:ssa. Todistamme tämän reaaliarvoisille satunnaismuuttujille.

1.1.10 Lemma. *Olkoon* $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ *jono gaussisia satunnaismuuttujia, joka suppenee kohti satunnaismuuttujaa* Y *Hilbert-avaruudessa* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. *Tällöin myös* Y *on gaussinen.*

Todistus. Olkoot μ_n ja σ_n^2 satunnaismuuttujan X_n odotusarvo ja varianssi. Olkoot $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ ja $\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2$. Koska kuvaus

$$(\mu, \sigma^2) \quad \mapsto \quad \exp\left\{i\mu\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right\}$$

on jatkuva kaikilla θ, niin

$$\varphi_Y(\theta) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(\theta) \quad = \quad \exp\left\{i\mu\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right\}.$$

Siispä Y on gaussinen. □

Toinen hieno tulos kertoo, että gaussisten satunnaismuuttujien tapauksessa riippumattomuus ja korreloimattomuus tarkoittavat samaa.

1.1.11 Lemma. *Olkoon pari* $(X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *gaussinen. Tällöin* X_1 *ja* X_2 *ovat riippumattomia jos ja vain jos ne ovat korreloimattomia.*

Todistus. Tämän voi todistaa näppärästi käyttämällä karakteristisia funktioita. Kikan keksiminen jätetään harjoitustehtäväksi. □

1.1.12 Huomautus. On mahdollista, että X_1 ja X_2 ovat gaussisia ja jopa korreloimattomia, mutta (X_1, X_2) ei ole gaussinen. Olkoon nimittäin $X_1, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ riippumattomia siten, että X_1 on standardigaussinen ja $\mathbf{P}[Y=0] = \frac{1}{2} = \mathbf{P}[Y=1]$. Asetetaan $X_2 = X_1 \mathbf{1}_{\{Y=0\}} - X_1 \mathbf{1}_{\{Y=1\}}$. Nyt

$$\varphi_{X_2}(\theta) \quad = \quad \mathbf{E}\left[e^{i\theta X_1}\mathbf{1}_{\{Y=0\}}\right] + \mathbf{E}\left[e^{-i\theta X_1}\mathbf{1}_{\{Y=1\}}\right] \quad = \quad e^{-\frac{1}{2}\theta^2}.$$

Siis X_2 on standardigaussinen. Lisäksi

$$\mathbf{E}\left[X_1 X_2\right] \quad = \quad \frac{1}{2}\mathbf{E}\left[X_1^2\right] - \frac{1}{2}\mathbf{E}\left[X_1^2\right] \quad = \quad 0$$

eli X_1 ja X_2 ovat korreloimattomia. Olkoon nyt $Z = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$. Tällöin

$$\varphi_Z(\theta) \quad = \quad \mathbf{E}\left[e^{i\theta X_1}\mathbf{1}_{\{Y=0\}}\right] + \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_{\{Y=1\}}\right] \quad = \quad \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}\theta^2} + 1\right).$$

Siten Z ei ole gaussinen, joten (X_1, X_2) ei myöskään voi olla gaussinen.

1.2 Isonormaali gaussinen prosessi

Tässä osiossa määrittelemme varsin yleisen gaussisen prosessin, jonka suhteen voimme derivoida ja integroida. Jatkossa joudumme kuitenkin monin paikoin luopumaan tästä yleisyydestä: kaunis teoria koskee vain Brownin liikettä.

Olkoon $\Omega = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ täydellinen todennäköisyysavaruus. Tällöin siis kaikki $\mathbf{P}$-nollajoukot kuuluvat σ-algebraan $\mathcal{F}$. Tunnetusti jokainen todennäköisyysavaruus voidaan täydellistää yksikäsitteisesti asettamalla yksinkertaisesti $\mathbf{P}[A \cup N] = \mathbf{P}[A]$, kun $A \in \mathcal{F}$ ja N on jokin nollajoukon osajoukko. Siten oletus täydellisyydestä ei ole mitenkään erityisesti rajoittava.

Olkoon $H = (H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ separoituva reaalinen Hilbert-avaruus. Tällöin siis H:lla on numeroituva, mahdollisesti äärellinen, ortonormaali kanta $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ ja kaikki H alkiot voidaan kirjoittaa muodossa

$$h = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, e_i\rangle_H \, e_i. \tag{1.2.1}$$

Sarjan (1.2.1) suppeneminen tarkottaa tässä normin $\|\cdot\|_H = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_H}$ mukaista vahvaa suppenemista. Kannan $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ ollessa kiinnitetty on sarjakehitelmä (1.2.1) yksikäsitteinen. Tämän näkee käyttämällä (yleistettyä) **Parsevalin kaavaa**

$$\langle h, h'\rangle_H = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, e_i\rangle_H \langle h', e_i\rangle_H. \tag{1.2.2}$$

1.2.3 Määritelmä. Olkoon H separoituva reaalinen Hilbert-avaruus. Gaussinen perhe $W = (W(h) : h \in H)$ satunnaismuuttujia todennäköisyysavaruudelta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ on **isonormaali gaussinen prosessi,** jos

(i) $\mathbf{E}[W(h)] = 0$ kaikilla $h \in H$,

(ii) kaikille $h, h' \in H$ pätee $\mathbf{E}[W(h)W(h')] = \langle h, h'\rangle_H$.

Olkoon $\mathcal{H}_1$ joukon $\{W(h) : h \in H\}$ virittämä $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$:n suljettu aliavaruus:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \mathrm{cl}_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})} \operatorname{span}\{W(h) : h \in H\} \\ &= \mathrm{cl}_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i W(h_i) : h_i \in H, a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Ehto (ii) sanoo, että W on avaruuksien $\mathcal{H}_1$ ja H välinen isometria: siitä nimi **isonormaali** gaussinen prosessi.

1.2.4 Huomautus. (i) Avaruudesta $\mathcal{H}_1$ käytetään nimityksiä prosessin X **lineaarinen avaruus** ja prosessin X **ensimmäinen kaaos.**

(ii) Lemman 1.1.10 nojalla avaruuden $\mathcal{H}_1$ satunnaismuuttujat ovat gaussisia.

Jokaiselle separoituvalle Hilbert-avaruudelle H voidaan konstruoida sitä vastaava isonormaali gaussinen prosessi. Koska tämä ei ole aivan ilmiselvää, näytämme yhden konstruktion. Olkoon $(\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ riippumaton perhe $N(0,1)$-jakautuneita satunnaismuuttujia, ja olkoon $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ jokin avaruuden H ortonormaali kanta. Määrittelemme satunnaismuuttujat $W(e_i)$ yksinkertaisesti asettamalla $W(e_i) := \xi_i$. Yleiselle $h \in H$ määrittelemme satunnaismuuttujan $W(h)$ lineaarisesti laajentaen: jos h:lla on kehitelmä (1.2.1), siis

$$h = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, e_i \rangle_H \, e_i,$$

niin asetamme

$$\begin{aligned} W(h) &:= \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, e_i \rangle_H \, W(e_i) \\ &:= \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, e_i \rangle_H \, \xi_i. \end{aligned}$$

Lemman 1.1.10 nojalla satunnaismuuttuja $W(h)$ on gaussisten satunnaismuuttujien L^2-rajana myös gaussinen. Lisäksi $W(h)$ on keskitetty, koska kaikki $W(e_i)$:t ovat keskitettyjä. Perheen $(\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ riippumattomuuden nojalla ristitermeille pätee

$$\mathbf{E}\left[W(e_i)W(e_j)\right] \;=\; \mathbf{E}[\xi_i\xi_j] \;=\; 0,$$

kun $i \neq j$. Siten

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[W(h)W(h')\right] &= \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}\langle h, e_i\rangle_H\,\xi_j\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\langle h', e_j\rangle_H\;\xi_i\right)\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\langle h, e_i\rangle_H\,\langle h', e_j\rangle_H\;\xi_i\xi_j\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\langle h, e_i\rangle_H\,\langle h', e_j\rangle_H\;\mathbf{E}\left[\xi_i\xi_j\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\langle h, e_i\rangle_H\,\langle h', e_i\rangle_H\,.
\end{aligned}$$

Isometria $\mathbf{E}[W(h)W(h')] = \langle h, h'\rangle_H$ seuraa nyt Parsevalin kaavasta (1.2.2).

1.2.5 Huomautus. (i) Konstruktiomme on siinä mielessä yleinen, että jos W on isonormaali gaussinen prosessi ja jos $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ on H:n ortonormaali kanta, niin $(W(e_i))_{i=1}^{\infty}$ on riippumaton perhe $N(0,1)$-satunnaismuuttujia. Lisäksi kuvaus $h \mapsto W(h)$ on aina lineaarinen.

(ii) Määritelmässä 1.2.3 ei tarvitse olettaa, että W on gaussinen **perhe**. Riittää olettaa, että jokainen $W(h)$ on erikseen gaussinen.

(iii) Isonormaali gaussinen prosessi W voidaan tulkita myös H-arvoiseksi gaussiseksi satunnaismuuttujaksi, jonka karakteristinen funktionaali on

$$\mathbf{E}\left[e^{\langle h, W\rangle_H}\right] \;=\; \exp\left\{-\frac{1}{2}\|h\|_H^2\right\}.$$

Tällöin H-arvoisen satunnaismuuttujan W ja isonormaalin gaussisen prosessin $(W(h) : h \in H)$ yhteys on yksinkertaisesti $\langle h, W\rangle_H = W(h)$.

1.2.6 Esimerkki. (i) Olkoon $H = \mathbb{R}$ varustettuna normaalilla (sisä)tulolla. Tällöin $W(h) = hW(1)$, sillä alkio 1 muodostaa $\mathbb{R}$:n kannan. Isonormaali gaussinen prosessi määräytyy siis yhdestä standardinormaalista satunnaismuuttujasta $W(1) \sim N(0,1)$. Tämä esimerkki on siis varsin tylsä.

(ii) Olkoon $H = \mathbb{R}^d$ varustettuna normaalilla sisätulolla. Olkoon $(e_i)_{i=1}^d$ avaruuden $\mathbb{R}^d$ tavanomainen kanta. Tällöin $W(h) = h_1 W(e_i) + \cdots + h_n(e_n)$. Isonormaali gaussinen prosessi määräytyy siis standardigaussisesta vektrorista $W(e) = (W(e_1), \ldots, W(e_n)) \sim N(0, \mathrm{Id})$. Tämä esimerkki on vielä kohtalaisen tylsä, muttei niin triviaali kuin kohta (i).

(iii) Tarkastelemme kohtaa (ii) käänteisesti. Olkoon $X = (X_1, \cdots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ keskitetty gaussinen satunnaisvektori kovarianssilla K. Asetamme

$$\langle x, y \rangle_H \;:=\; \langle x, Ky \rangle_{\mathbb{R}^d}.$$

On helppo nähdä, että $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ on sisätulo avaruudella $\mathbb{R}^d$. Asetamme sitten $X(h) = h_1 X_1 + \cdots + h_d X_d$. Tällöin $(X(h) : h \in H)$ on isonormaali gaussinen prosessi. Perusteluksi riittää huomata, että

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X(h)X(h')] &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d h_i h_j' \mathbf{E}[W(e_i)W(e_j)] \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d h_i h_j' K_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d h_i h_j' \langle e_i, K e_j \rangle_{\mathbb{R}^d} \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d h_i h_j' \langle e_i, e_j \rangle_H \\
&= \langle h, h' \rangle_H
\end{aligned}$$

(iv) Tarkastelemme kohtaa (iii) äärettönulotteisesti. Olkoon $(X_t)_{t \in [0,1]}$ jokin keskitetty gaussinen prosessi. Olkoon K sen kovarianssifunktio:

$$K(t,s) \;:=\; \mathbb{E}\left[X_t X_s\right].$$

Täydellistämällä yksinkertaisten funktioiden muodostaman vektoriavaruuden sisätulon

$$\left\langle \mathbf{1}_{[0,t)}, \mathbf{1}_{[0,s)} \right\rangle_H \;:=\; K(t,s)$$

suhteen saamme Hilbert-avaruuden H. Jos K on jatkuva, niin H on separoituva. Tällöin $(X(h) : h \in H)$ on isonormaali gaussinen prosessi. Mikään ei muuten takaa, että H on funktioavaruus.

Isonormaali σ-algebra $\mathcal{G}$ on isonormaalin gaussisen prosessin W virittämä σ-algebra. Tällöin $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ on siis W:n luonnollinen, tai minimaalinen, todennäköisyysavaruus.

1.2.7 Huomautus. Olkoon $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ avaruuden H jokin ortonormaali kanta. Tällöin isonormaali σ-algebra $\mathcal{G}$ on satunnaismuuttujien $W(e_i)$, $i = 1, 2 \ldots$ generoima.

1.3 Brownin liike ja valkoinen häly

Tässä osiossa tarkastelemme keskitettyjä gaussisia prosesseja yli aikavälin $[0,1]$. Oletamme, että kaikki prosessit lähtevät liikkeelle nollasta.

Brownin liike voidaan määritellä monella eri tavalla. Yksinkertaisin, joskin epäinformatiivisin, tapa on seuraava:

1.3.1 Määritelmä. Gaussinen prosessi $W = (W_t)_{t\in[0,1]}$ on **Brownin liike**, jos

(i) $\mathbb{E}\left[W_t\right] = 0$ kaikilla $t \in [0,1]$,

(ii) $\mathbb{E}\left[W_t W_s\right] = \min(t,s)$.

Näin määritelty prosessi W on todellakin olemassa. Olkoon nimittäin

$$H \;:=\; L^2([0,1])$$

varustettuna tavanomaisella sisältulolla

$$\langle h, h' \rangle_{L^2([0,1])} = \int_0^1 h(t)h'(t)\,dt.$$

Olkoon $W = (W(h) : h \in H)$ isonormaali gaussinen prosessi. Määrittelemme prosessin $W = (W_t)_{t\in[0,1]}$ asettamalla

$$W_t := W\left(\mathbf{1}_{[0,t]}\right).$$

Selvästi nyt $\mathbf{E}[W_t] = 0$ ja

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[W_t W_s\right] &= \mathbf{E}\left[W\left(\mathbf{1}_{[0,t]}\right) W\left(\mathbf{1}_{[0,s]}\right)\right] \\ &= \left\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, \mathbf{1}_{[0,s]} \right\rangle_{L^2([0,1])} \\ &= \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,t]}(u)\mathbf{1}_{[0,s]}(u)\,du \\ &= \min(t,s). \end{aligned}$$

Siispä näin määritelty prosessi $W = (W_t)_{t\in[0,1]}$ on Brownin liike.

1.3.2 Huomautus. Valitsemalla avaruudelle $L^2([0,1])$ konkreettisen kannan

$$e_i(t) := \sqrt{2}\cos(i\pi t),$$

$i = 0, 1, \ldots$, saamme Brownin liikkeelle sarjakehitelmän riippumattoman $N(0,1)$-jakautuneen jonon $(\xi_i)_{i=0}^{\infty}$ avulla:

$$\begin{aligned} W_t &= \sum_{i=0}^{\infty} \left\langle \mathbf{1}_{[0,t]}, e_i(t) \right\rangle_{L^2([0,1])} \xi_i \\ &= \sqrt{2}\sum_{i=0}^{\infty} \int_0^t \cos(i\pi s)\,ds\,\xi_i \\ &= \sqrt{2}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sin(i\pi t)}{i\pi}\xi_i. \end{aligned}$$

Yleisesti ottaen ei ole helppoa osoittaa, että Brownin liike on olemassa. Käyttämällä funtionaalianalyyttistä lähestymistapaa pääsimme helpolla. Tämä helppous ei kuitenkaan ole ilmaista: toistaiseksi Browin liike on meille vain abstrakti "Hilbert-olio", jonka luonteesta emme ymmärrä mitään. Ymmärtääksemme paremmin, mistä Brownin liikkeessä on kyse, tarkastelemme sitä hieman martingaaliteorian kannalta. Aloitamme martingaalin määritelmästä.

1.3.3 Määritelmä. Olkoon $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}$ **historia**, toisin sanoen kasvava perhe σ-algebran $\mathcal{F}$ ali-σ-algebroja. Prosessi $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ on **$\mathbb{F}$-martingaali,** jos

$$\mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_s\right] = X_s$$

kaikilla $s \leqslant t$. Mikäli historia $\mathbb{F}$ on X:n **sisäinen historia**, siis $\mathcal{F}_t$ on satunnaismuuttujien X_s, $s \leqslant t$, generoima, niin sanomme lyhyesti, että X on **martingaali**. Prosessin sisäiselle historialle käytämme merkintää $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t\in[0,1]}$.

Martingaali on siis idealisoitu "häly": paras ennuste tulevaisuudelle on tämä hetki.

Martingaaliominaisuutta erityisempi, ja ehkä helpommin ymmärrettävä, on riippumattomien lisäysten käsite. Prosessilla X on **riippumattomat lisäykset**, jos kaikilla $s \leqslant t$ lisäys $X_t - X_s$ on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_s^X$. Riippumattomat lisäykset tarkoittavat siis sitä, että tieto prosessin historiasta ei anna mitään tietoa sen tulevaisuudessa tapahtuvista muutoksista.

Gaussisten prosessien tapauksessa riippumattomat lisäykset ja martingaaliominaisuus ovat siististi kytkeytyneet toisiinsa.

1.3.4 Propositio. *Olkoon $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ keskitetty gaussinen prosessi. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(i) X *martingaali,*

(ii) X*:llä on riippumattomat lisäykset,*

(iii) X*:llä on korreloimattomat lisäykset,*

(iv) X*:n kovarianssifunktio riippuu* s*:stä ja* t*:stä ainoastaan niiden minimin kautta:*

$$\mathbb{E}\left[X_t X_s\right] = f\Big(\min(t,s)\Big).$$

Todistus. Väite seuraa olennaisesti lemmasta 1.1.11. Jätämme yksityiskohdat harjoitustehtäväksi. □

Sanomme, että prosessilla X on (heikosti) **stationaariset lisäykset**, jos kaikilla $h \geqslant 0$ satunnaismuuttujan $X_{t+h} - X_t$ jakauma on riipumaton aikaparametrista t.

Voimme nyt karakterisoida Brownin liikkeen edellä esitettyjen käsitteiden avulla.

1.3.5 Propositio. *Keskitetty gaussinen prosessi $W = (W_t)_{t\in[0,1]}$ on multiplikatiivista vakiota vaille Brownin liike jos ja vain jos sillä on stationaariset riippumattomat lisäykset.*

Todistus. On ilmiselvää, että Brownin liikkeellä on riippumattomat ja stationaariset lisäykset. Olkoon sitten X prosessi, jolla on riippumattomat ja stationaariset lisäykset. Olkoon $s \leqslant t$. Proposition 1.3.4 nojalla $\mathbb{E}[X_t X_s] = f(s)$. Koska X:llä on stationaariset lisäykset, niin

$$\mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2\right] \;=\; \mathbb{E}\left[X_{t-s}^2\right].$$

Käyttämällä edellistä polarisaatiokaavaan

$$\mathbb{E}\left[X_t X_s\right] \;=\; \frac{1}{2}\left\{\mathbb{E}\left[X_t^2\right] + \mathbb{E}\left[X_s^2\right] - \mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2\right]\right\}$$

saamme tuloksen

$$f(s) \;=\; \frac{1}{2}\{f(t) + f(s) - f(t-s)\}.$$

Tämän yhtälön ainoa ratkaisu on lineaarinen funktio $f(s) = \sigma^2 s$. Siten X on vakiota σ^2 vaille Brownin liike. □

Jatkossa joudumme paikoitellen luopumaan yleisyydestä. Tällöin oletamme, että isonormaaliin prosessiin W liittyvä Hilbert-avaruus H on siisti L^2-avaruus:

$$H \;=\; L^2(T, \mathcal{B}, \mu),$$

missä μ on σ-äärellinen atomiton mitta eli $\mu(\{t\}) = 0$ kaikilla $t \in T$. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että W on jotakuinkin Brownin liike. Itse asiassa, jos merkitsemme $W(B) := W(\mathbf{1}_B)$, niin isonormaali prosessi W voidaan tässä tapauksessa karakterisoida gaussisen perheen $(W(B) : B \in \mathcal{B}, \mu(B) < \infty)$ avulla. Jos tulkitsemme, että $W(B)$ on $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$-arvoinen satunnaismitta, niin W on valkoinen häly.

1.3.6 Määritelmä. Olkoon $(T, \mathcal{B})$ mitallinen avaruus, ja olkoon μ on σ-äärellinen atomiton mitta avaruudella $(T, \mathcal{B})$. Merkitään $\mathcal{B}_0 := \{B \in \mathcal{B} : \mu(B) < \infty\}$. Satunnaismitta $W : (T, \mathcal{B}) \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ on **valkoinen häly**, jos

(i) $W(B)$ on $N\big(0, \mu(B)\big)$-jakautunut kaikilla $B \in \mathcal{B}_0$,

(ii) $W(B_1)$ ja $W(B_2)$ ovat riippumattomia, kun B_1 ja B_2 ovat erillisiä.

Mitta μ on hälyyn W liittyvä **kontrollimitta**.

1.3.7 Huomautus. Vaikka kutsummekin valkoista hälyä satunnaismitaksi, niin kiinnitetyllä $\omega \in \Omega$ joukkokuvaus $W(\cdot)(\omega)$ ei ole σ-additiivinen mitta T:llä. Siitä huolimatta, jos $h \in L^2(T)$, niin merkitsemme

$$\int_T h(t)\, dW_t \;:=\; W(h).$$

1.3.8 Esimerkki. (i) Olkoon $T = \mathbb{R}_+ \times \{1, \ldots, d\}$ ja μ Lebesguen mitta kertaa tasainen mitta joukolla $\{1, \ldots, d\}$. Siis

$$\mu(dt, A) \;:=\; dt \times \#(A).$$

Tällöin

$$H \;=\; L^2\left(\mathbb{R}_+ \times \{1, \ldots, d\}\right) \;\simeq\; L^2\left(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d\right)$$

ja

$$W_t^i \;:=\; W\big([0, t] \times \{i\}\big),$$

$t \in \mathbb{R}_+$, $i \in \{1, \ldots, d\}$ on d-ulotteinen Brownin liike eli keskitetty gaussinen prosessi $(W_t)_{t \geqslant 0} = (W_t^1, \ldots, W_t^d)_{t \geqslant 0}$, jonka kovarianssifunktio on

$$\mathbb{E}\left[W_t^i W_s^j\right] \;=\; \begin{cases} \min(t, s), & \text{kun } i = j, \\ 0, & \text{kun } i \neq j. \end{cases}$$

Tässä tapauksessa $W(h)$ voidaan tulkita Wiener-integraalina

$$W(h) \;=\; \sum_{i=1}^{d} \int_0^\infty h^i(t)\, dW_t^i.$$

(ii) Olkoon $T = \mathbb{R}_+^2$ ja μ kaksiulotteinen Lebesguen mitta. Tällöin

$$W_{t,s} := W\big([0,t] \times [0,s]\big),$$

$s, t \in \mathbb{R}_+$ on **Brownin lakana**. Se on siis keskitetty gaussinen kenttä, jonka kovarianssifunktio on

$$\mathbb{E}\left[W_{t,s} W_{t',s'}\right] = \min(t,t') \min(s,s').$$

(iii) Brownin lakana d-ulotteisessa ajassa saadaan valitsemalla $T = \mathbb{R}_+^d$ ja μ on d-ulotteinen Lebesguen mitta. Tällöin

$$W_{t_1,\ldots,t_d} := W\big([0,t_1] \times \cdots \times [0,t_d]\big)$$

on Brownin lakana d-ulotteisessa ajassa ja sen kovarianssifunktio on

$$\mathbb{E}\left[W_{t_1,\ldots,t_d} W_{t_1',\ldots,t_d'}\right] = \prod_{i=1}^{d} \min(t_i, t_i').$$

1.3.9 Huomautus. Olemme kuormittaneet merkintää W raskaasti. Nimittäin

$$W_t = W([0,t]) = W\left(\mathbf{1}_{[0,t]}\right).$$

Lisäksi W on joskus yleinen isonormaali prosessi, joskus valkoinen häly ja joskus Brownin liike. Toivomme hartaasti, ettei tästä kuormituksesta aiheennu sekaannusta.

1.4 Hermiten polynomit

Hermiten polynomit saadaan ortogonalisoimalla (mutta ei normalisoimalla) monomit $1, t, t^2, \ldots$ avaruudessa $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$, missä γ on standardisoitu gaussinen mitta

$$\gamma(dt) := \gamma(dt, 0, 1) = p(t, 0, 1)dt := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\} dt.$$

Sivuutamme tässä vaiheessa Gram–Schmidt-ortogonalisoinnin ja annamme määritelmän suoraan ns. **Rodriguezin kaavan** avulla.

1.4.1 Määritelmä. Astetta n oleva **Hermiten polynomi** on

$$H_n(x) \quad = \quad \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

kun $n \geqslant 1$ ja $H_0(x) = 1$.

1.4.2 Huomautus. Lukija luullee, että kirjoittajalla on vaikeuksia löytää näppäimistöltään muita kirjaimia kuin H. Näin ei ole: kirjoittaja vain ei halua lanseerata omia merkintöjään, vaikka tarvetta selvästi olisikin.

Ensimmäiset neljä Hermiten polynomia ovat

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x, \quad H_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad H_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x.$$

Näyttäisi siis ainakin siltä, että Hermiten polynomit ovat todellakin polynomeja.

Merkitään

$$F(x,t) \quad := \quad \exp\left\{tx - \frac{1}{2}t^2\right\}.$$

Tällöin Hermiten polynomit $H_n(x)$, $n \geqslant 0$, ovat funktion $F(x,\cdot)$ Taylorin sarjakehitelmän kertoimet. Toisin sanoen

$$F(x,t) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(x). \tag{1.4.3}$$

Käyttämällä tätä kehitelmää voimme osoittaa, että kaikille $n \geqslant 1$ pätee

$$\frac{dH_n}{dx}(x) \quad = \quad H_{n-1}(x), \tag{1.4.4}$$

$$(n+1)H_{n+1}(x) \quad = \quad xH_n(x) - H_{n-1}(x), \tag{1.4.5}$$

$$H_n(-x) \quad = \quad (-1)^n H_n(x). \tag{1.4.6}$$

Käyttämällä kaavaa (1.4.5) voimme vakuuttua siitä, että Hermiten polynomit ovat todellakin polynomeja. Lähemmällä tarkastelulla huomaamme, että H_n on n :nnen asteen polynomi, jonka korkein termi on $x^n/n!$. Itse asiassa voimme laskea, että

$$H_n(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!2^k} x^{n-2k}, \tag{1.4.7}$$

missä $\lfloor\cdot\rfloor$ tarkoittaa kokonaisosan ottamista. Lisäksi rekursiokaavasta (1.4.5) seuraa, että jokainen n:nnen asteen polynomi voidaan esittää Hermiten polynomien H_r, $r \leqslant n$, lineaarikombinaationa.

Seuraava lemma kertoo Hermiten polynomien ja gaussisten satunnaismuuttujien välisen suhteen.

1.4.8 Lemma. *Olkoon* $(X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *gaussinen satunnaimuuttujapari, jolle* $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 0$, $\mathbb{E}[X_1^2] = \mathbb{E}[X_2^2] = 1$, *ja* $\mathbb{E}[X_1X_2] = \rho$. *Tällöin jokaiselle* $n, m \geqslant 0$ *pätee*

$$\mathbb{E}\left[H_n(X_1)H_m(X_2)\right] = \begin{cases} 0 & \textit{jos} \quad n \neq m, \\ \frac{\rho^n}{n!} & \textit{jos} \quad n = m. \end{cases}$$

Todistus. Olkoon F kuten kaavassa (1.4.3). Käyttämällä parin $X = (X_1, X_2)$ momenttigeneroivaa funktiota näemme, että

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[F(X_1,\theta_1)\,F(X_2,\theta_2)\Big] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\theta_1 X_1 - \tfrac{1}{2}\theta_1^2\right\}\exp\left\{\theta_2 X_2 - \tfrac{1}{2}\theta_2^2\right\}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\langle\theta, X\rangle_{\mathbb{R}^2} - \tfrac{1}{2}\langle\theta,\theta\rangle_{\mathbb{R}^2}\right\}\right] \\ &= \nu_X(\theta)\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\langle\theta,\theta\rangle_{\mathbb{R}^2}\right\} \\ &= \exp\left\{\tfrac{1}{2}\left\langle\theta, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1\end{bmatrix}\theta\right\rangle_{\mathbb{R}^2}\right\}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\langle\theta,\theta\rangle_{\mathbb{R}^2}\right\} \\ &= \exp\{\theta_1\theta_2\rho\}. \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

Muistamme nyt, että

$$F(X_i, \theta_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_i^n H_n(X_i).$$

Derivoimalla saamme

$$\frac{\partial^{k+\ell}}{\partial\theta_1^k\partial\theta_2^\ell}F(X_1,\theta_1)F(X_2,\theta_2) = \sum_{n=k}^{\infty}\sum_{m=\ell}^{\infty} H_n(X_1)H_m(X_2)\frac{\partial^{k+\ell}}{\partial\theta_1^k\partial\theta_2^\ell}\theta_1^m\theta_2^m,$$

mistä näemme, että

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial\theta_1^n\partial\theta_2^m}F(X_1,\theta_1)F(X_2,\theta_2)\Big|_{\theta_1=\theta_2=0} = n!m!H_n(X_1)H_m(X_2).$$

Samoin näemme derivoimalla, että

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial\theta_1^n\partial\theta_2^m} e^{\theta_1\theta_2\rho}\Big|_{\theta_1=\theta_2=0} = \begin{cases} 0 & \text{jos} \quad n \neq m, \\ n!\rho^n & \text{jos} \quad n = m. \end{cases}$$

Siten väite seuraa ottamalla yhtälöstä (1.4.9) puolittain osittaisderivaatta $\partial^{n+m}/\partial\theta_1^n\partial\theta_2^m$ pisteessä $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Derivoinnin ja odotusarvon ottamisen järjestyksen voi vaihtaa esimerkiksi dominoidun konvergenssin nojalla. □

Lemmasta 1.4.8 seuraa, että normeeratut Hermiten polynomit $\sqrt{n!}H_n$, $n = 0, 1, \ldots$ muodostavat avaruuden $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$ ortonormaalin kannan. Nimittäin valitsemalla $X = X_1 = X_2$, eli $\rho = 1$, lemma 1.4.8 sanoo, että

$$\mathbf{E}[H_n(X)H_m(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)\,\gamma(dx) = \frac{1}{n!},$$

kun $n = m$ ja 0 muulloin. Siten Hermiten polynomit H_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ovat ortogonaalisia ja normeeratut Hermiten polynomit $\sqrt{n!}H_n$, $n = 0, 1, \ldots$, ovat ortonormaaleja. Se, että Hermiten polynomit virittävät koko avaruuden $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$ seuraa taas siitä, että Weierstraßin lauseen nojalla tavalliset polynomit virittävät koko avaruuden $L^2(\mathbb{R}, \gamma)$ ja tavalliset ja Hermiten polynomit virittävät toisensa.

Luku 2

Wiener–Itô-kaaoskehitelmä

Isonormaaliin prosessiin $W = (W(h) : h \in H)$ liittyvä L^2-avaruus $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ on separoituva Hilbert-avaruus. Siten sillä on numeroituvia ortonormaaleja kantoja. Konstruoimme erään tällaisen kannan. Kostruoimamme kanta antaa avaruudelle $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ Wiener–Itô-kaaoskehitelmän, joka puolestaan liittyy läheisesti martingaaliesityslauseeseen ja moninkertaisiin Wiener-integraaleihin.

Osio 2.1 käsittelee yleistä tapausta. Osioissa 2.2–2.4 isonormaali prosessi W on valkoinen häly.

2.1 Abstrakti kaaoskehitelmä

Hilbert-avaruuden $H = (H, \langle \cdot, \rangle_H)$ osajoukko A on **totaali**, jos vain nolla-alkio on kohtisuorassa sitä vastaan: $\langle h, a \rangle_H = 0$ kaikilla $a \in A$ implikoi $h = 0$. Voidaan osoittaa, että A on totaali jos ja vain jos $\mathrm{cl\,span} A = H$. Siispä totaalin joukon virittämä aliavaruus on tiheä joukko.

Yleinen "abstrakti Wiener–Itô-kaaoskehitelmä" perustuu seuraavaan tiheysominaisuuteen.

2.1.1 Lemma. *Joukko $\left\{e^{W(h)} : h \in H\right\}$ on totaali avaruudessa $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$.*

Lemman 2.1.1 todistus perustuu äärellisulotteiseen tarkasteluun, joka laajennetaan äärettömulotteiseksi separoituvuuden avulla. Laajennuksessa tarvitsemme **martingaalikonvergenssilausetta**: Olkoon $(X_n)_{n=1}^{\infty}$

tasaisesti integroituva martingaali historian $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ suhteen. Tällöin $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ on olemassa melkein varmasti ja $L^1(\Omega)$:ssa. Lisäksi $X_n = \mathbf{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$ ja X_∞ on $\mathcal{F}_\infty$-mitallinen.

Perheen $(X_j)_{j\in J}$ **tasainen integroituvuus** tarkoittaa: jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen K_ε, että

$$\sup_{j\in J} \mathbf{E}\left[|X_j|\mathbf{1}_{\{|X_j|>K_\varepsilon\}}\right] \quad < \quad \varepsilon.$$

Lemman 2.1.1 todistus. Olkoon $X \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ sellainen, että $\mathbf{E}\left[Xe^{W(h)}\right] = 0$ kaikilla $h \in H$. Haluamme osoittaa, että $X = 0$. Tällöin, totaalin joukon määritelmän nojalla, $\left\{e^{W(h)} : h \in H\right\}$ on totaali.

Olkoon aluksi H äärellisulotteinen ja $(e_i)_{i=1}^{d}$ sen ortonormaali kanta. Olkoon

$$\begin{aligned} \gamma_d(dx) \quad &:= \quad \gamma^d(dx) \\ &= \quad \gamma(dx_1; 0, 1)\cdots\gamma(dx_d; 0, 1) \end{aligned}$$

d-ulotteinen standardigaussinen mitta. Tällöin X voidaan kirjoittaa muodossa $f(\xi_1, \ldots, \xi_d)$, missä $\xi_i = W(e_i)$ ja $f \in L^2(\mathbb{R}^d, \gamma_d)$. Tässä siis $(\xi_i)_{i=1}^{d}$ on riippumaton perhe $N(0,1)$-jakautuneita satunnaismuuttujia. Koska kuvaus $h \mapsto W(h)$ on lineaarinen, niin

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \quad \mathbf{E}\left[X \exp\left\{\sum_{i=1}^{d} t_i\xi_i\right\}\right] \\ &= \quad \mathbf{E}\left[f(\xi_1, \ldots, \xi_d) \exp\left\{\sum_{i=1}^{d} t_i\xi_i\right\}\right] \\ &= \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \ldots, x_d) e^{i\langle t,x\rangle_{\mathbb{R}^d}} \gamma_d(dx) \end{aligned}$$

kaikilla $(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$. Tämä tarkoittaa sitä, että jakauman $f d\gamma_d$:n momenttigeneroiva funktio on identtisesti nolla. Siten f on myös identtisesti nolla.

Tarkastelkaamme sitten ääretönulotteista tapausta. Avaruuden H separoituvuuden nojalla $\mathcal{G} = \sigma(W(e_i) : i = 1, 2, \ldots)$, missä $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ on avaruuden H ortonormaali kanta. Olkoon H_d kannan alkioiden

$(e_i)_{i=1}^d$ virittämä H:n äärellisulotteinen aliavaruus ja $\mathcal{G}_d$ satunnaismuuttujien $\xi_i = W(e_i)$, $i = 1, \ldots, d$ virittämä $\mathcal{G}$:n ali-σ-algebra. Tällöin $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}_d] \in L^2(\Omega, \mathcal{G}_d, \mathbf{P})$ ja kaikilla $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}\left[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}_d] \exp\left\{\sum_{i=1}^d t_i \xi_i\right\}\right] = 0.$$

Äärellisulotteisen tapauksen perusteella siis $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}_d] = 0$. Lopuksi huomaamme, että martingaalikonvergenssilauseen nojalla

$$X_d := \mathbf{E}[X|\mathcal{G}_d] \to \mathbf{E}[X|\mathcal{G}_\infty] =: X_\infty$$

melkein varmasti (ja monessa muussakin mielessä). Mutta

$$X_\infty = \mathbf{E}[X|\mathcal{G}_\infty] = \mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = X.$$

Siten $X = 0$. □

2.1.2 Määritelmä. Olkoon $n \geqslant 1$. Avaruuden $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ **n:s kaaos** $\mathcal{H}_n$ on satunnaismuuttujien

$$\left\{ H_n\big(W(h)\big) : h \in H, \|h\|_H = 1 \right\}$$

virittämä $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$:n suljettu aliavaruus. Vakioiden joukko on 0 :s kaaos $\mathcal{H}_0$.

2.1.3 Määritelmä. Olkoon $V = (V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ Hilbert-avaruus ja $V_0, V_1, \ldots$ sen suljettuja aliavaruuksia. Tällöin **ortogonaalinen summaesitys**

$$V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$$

tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että

(i) kun $n \neq m$, aliavaruudet V_n ja V_m ovat ortogonaalisia eli $\langle v_n, v_m\rangle_V = 0$ kaikilla $v_n \in V_n$ ja $V_m \in v_m$,

(ii) jos $v \in V$, niin se voidaan esittää sarjana

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(v),$$

missä $\pi_n(v) \in V_n$.

2.1.4 Huomautus. Määritelmässä 2.1.3 kuvaus π_n on ortoprojektio V:ltä sen aliavaruudelle V_n :

$$\pi_n(v) = \operatorname*{argmin}_{v_n \in V_n} \|v - v_n\|_V.$$

Yleinen Hilbert-avaruuksia koskeva totuus on, että tällainen minimoiva alkio todellakin on olemassa ja se on yksikäsitteinen.

2.1.5 Esimerkki. Olkoon $V_1 = \mathbb{R}$ ja $V_2 = \mathbb{R}^2$. Tällöin $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, ja jokaisella $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ on esitys

$$\begin{aligned} x &= v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 \\ &= v_1 e_1 + \{v_2 e_2 + v_3 e_3\} \\ &= \pi_1(v) + \pi_2(v), \end{aligned}$$

missä (e_1, e_2, e_3) on $\mathbb{R}^3$:n tavanomainen kanta.

Lemman 1.4.8 nojalla aliavaruudet $\mathcal{H}_n$ ja $\mathcal{H}_m$ ovat ortogonaalisia, kun $n \neq m$, ja lemman 2.1.1 nojalla voimme hajottaa avaruuden $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ kaaoksiin. Seuraava teoreema on **abstrakti kaaoskehitelmä**.

2.1.6 Teoreema. *Avaruus* $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ *voidaan esittää ortogonaalisena summana:*

$$L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n. \tag{2.1.7}$$

Todistus. Tiedämme jo, että $\mathcal{H}_n$:t ovat ortogonaalisia. Pitää enää osoittaa, että ne muodostavat totaalisen systeemin. Olkoon siis $X \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ sellainen, että se on ortogonaalinen kaikille $\mathcal{H}_n$. Toisin sanoen

$$\mathbf{E}\left[XH_n(W(h))\right] = 0 \tag{2.1.8}$$

kaikilla $h \in H$, joille $\|h\|_H = 1$. Haluamme osoittaa, että $X = 0$. Koska x^n voidaan esittää Hermiten polynomien $H_r(x)$, $r \leqslant n$ lineaarikombinaationa, niin oletuksesta (2.1.8) seuraa, että

$$\mathbf{E}\left[XW(h)^n\right] = 0$$

kaikilla $n \geqslant 0$. Käyttämällä eksponenttifuktion sarjakehitelmää tästä seuraa, että

$$\mathbb{E}\left[X \exp\{W(h)\}\right] = 0.$$

Siten lemman 2.1.1 nojalla $X = 0$. □

Jos H on ääretönulotteinen, niin myös jokainen kaaos $\mathcal{H}_n$ on ääretönulotteinen. Etsimme nyt ortonormaalin kannan jokaiselle kaaokselle $\mathcal{H}_n$.

Jono $a = (a_i)_{i=1}^{\infty}$, $a_i \in \mathbb{N}$, on **multi-indeksi** , jos $a_i \neq 0$ vain äärellisen monella indeksillä $i \in \mathbb{N}$. Siten esimerkiksi $(7, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$ on multi-indeksi, mutta $(1, 1, 1, 1, \ldots)$ ei ole. Merkitsemme multi-indeksien joukkoa symbolilla Λ. Lisäksi merkitsemme

$$a! := \prod_{i=1}^{\infty} a_i!,$$

$$|a| := \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Multi-indeksiä $a \in \Lambda$ vastaava **yleistetty Hermiten polynomi** on

$$H_a(x) := \prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}(x_i), \qquad x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

2.1.9 Lemma. *Olkoon $a \in \Lambda$ ja $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ avaruuden H ortonormaali kanta. Merkitään*

$$\Phi_a := \sqrt{a!} \prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}\big(W(e_i)\big).$$

Tällöin satunnaismuuttujakokoelma $(\Phi_a)_{a \in \Lambda}$ on ortonormaali systeemi.

Todistus. Satunnaismuuttujat $W(e_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ ovat riippumattomia. Tästä seuraa, että myös satunnaismuuttujat $H_{a_i}\left(W(e_i)\right) H_{b_i}\left(W(e_i)\right)$, $i = 1, 2, \ldots,$ ovat riippumattomia. Siispä voimme seuraavassa pyörityksessä vaihtaa tulon ja odotusarvon järjestystä.

Saamme

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\Phi_a\Phi_b\right] &= \sqrt{a!b!}\mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}\left(W(e_i)\right)\prod_{j=1}^{\infty} H_{b_j}\left(W(e_j)\right)\right] \\
&= \sqrt{a!b!}\mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}\left(W(e_i)\right) H_{b_i}\left(W(e_i)\right)\right] \\
&= \sqrt{a!b!}\prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[H_{a_i}\left(W(e_i)\right) H_{b_i}\left(W(e_i)\right)\right].
\end{aligned}$$

Mutta lemman 1.4.8 nojalla tämä viimeinen lauseke on 1, jos $a = b$ ja 0 muulloin. □

2.1.10 Propositio. *Olkoon* $n \geqslant 1$. *Tällöin kokoelma* $(\Phi_a)_{a\in\Lambda,|a|=n}$ *on avaruuden* $\mathcal{H}_n$ *ortonormaali kanta.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Yhdistämällä $\mathcal{H}_n$:ien kannat saamme tietysti kannan koko avaruudelle $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$.

2.1.11 Propositio. *Kokoelma* $(\Phi_a)_{a\in\Lambda}$ *on avaruuden* $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ *ortonormaali kanta.*

2.2 Moninkertaiset Wiener-integraalit

Edellinen osio oli varsin abstrakti. Tässä osiossa käsittelemme kohtalaisen konkreettista otusta: moninkertaista Wiener-integraalia. Sen avulla esitämme seuraavassa osiossa ymmärrettävämmän version kaaoskehitelmästä.

Tästä eteenpäin aina kappaleen loppuun asti avaruus H on L^2-avaruus $L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$, missä μ on σ-äärellinen atomiton mitta. Toisin sanoen isonormaali prosessi W on valkoinen häly.

Olkoon $m \geqslant 1$ ja $B_0 = \{B \in \mathcal{B} : \mu(B) < \infty\}$ kuten aiemminkin. Haluamme määritellä m-kertaisen stokastisen integraalin $I_m(f)$ funktiolle $f \in L^2(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$. Aloitamme luonnolliseen tapaan yksinkertaisista funktioista.

2.2.1 Määritelmä. Funktio $f : T^m \to \mathbb{R}$ on **yksinkertainen**, jos se on muotoa

$$f(t_1, \dots, t_m) = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_m} \mathbf{1}_{B_{i_1}\times\cdots\times B_{i_m}}(t_1, \dots, t_m), \tag{2.2.2}$$

missä $B_1, B_2, \dots, B_n$ ovat erillisiä $\mathcal{B}_0$:n joukkoja ja vakiot $a_{i_1,\dots,i_m}$ ovat nollia, jos mitkä tahansa idekseistä $i_1, \dots, i_m$ ovat samoja. Merkitsemme yksinkertaisten funktioiden luokkaa symbolilla $\mathcal{E}_m$.

2.2.3 Esimerkki. Olkoon $m = 2$ ja $T = [0, 1]$. Funktio $f = \mathbf{1}_{[0,b_1]\times[0,b_2]}$ ei ole yksinkertainen, jos $b_1 b_2 > 0$. Funktio $f = \mathbf{1}_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]}$ sen sijaan on yksinkertainen, jos $a_2 < b_2 < a_1 < b_1$.

2.2.4 Huomautus. (i) Joukko $\mathcal{E}_m$ on mitä ilmeisimmin avaruuden $L^2(T^m)$ lineaarinen aliavaruus.

(ii) Se, että yksinkertaiset funktiot f häviävät diagonaaleilla $\{t_i = t_j, i \neq j\}$, on keskeistä integraalin laajennuksen kannalta. Ilman sitä lemman 2.2.9 isometria (ii) ei päde.

Jos f on yksinkertainen ja sillä on esitys (2.2.2), niin määrittelemme m-kertaisen Wiener-integraalin kaavalla

$$I_m(f) := \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_m} W(B_{i_1}) \cdots W(B_{i_m}).$$

Wiener-integraali on hyvin määritelty: se ei riipu mistään erityisestä f:n esityksestä (2.2.2). Lisäksi I_m on lineaarinen.

2.2.5 Huomautus. Wiener-integraalit $I_1(f)$ ovat gaussisia, sillä ne ovat lineaarikombinaatioita gaussisesta otuksesta W. Korkeammat Wiener-integraalit eivät yleensä ole gaussisia. Tämä johtuu siitä, että riippumattomien gaussisten satunnaismuuttujien tulot eivät ole gaussisia.

Huomionarvoista on, että I_m on olennaisesti määritelty symmetrisille funktioille.

2.2.6 Määritelmä. Funktio $f : T^m \to \mathbb{R}$ on **symmetrinen**, jos

$$f(t_1, \dots, t_m) = f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(m)})$$

kaikilla joukon $\{1, 2, \dots, m\}$ permutaatioilla σ. Jos $f \in L^2(T^m)$ on symmetrinen, niin merkitsemme $f \in \tilde{L}^2(T^m)$. Funktion f **symmetrisaatio** $\tilde{f}$ on

$$\tilde{f}(t_1, \dots, t_m) := \frac{1}{m!} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(m)}),$$

missä σ käy läpi kaikki joukon $\{1, 2, \dots, m\}$ permutaatiot.

Symmetrisaation määritelmä korrekti: $\tilde{f}$ on symmetrinen funktio, ja jos f on jo valmiiksi symmetrinen, niin $\tilde{f} = f$.

2.2.7 Esimerkki. Jos

$$f(t_1, t_2, t_3) = t_1^2 t_2 t_3,$$

niin

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t_1, t_2, t_3) &= \frac{1}{6} \left\{ t_1^2 t_2 t_3 + t_1^2 t_3 t_2 + t_2^2 t_1 t_3 + t_2^2 t_3 t_1 + t_3^2 t_1 t_2 + t_3^2 t_2 t_1 \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ t_1^2 t_2 t_3 + t_2^2 t_1 t_3 + t_3^2 t_1 t_2 \right\}. \end{aligned}$$

2.2.8 Huomautus. (i) Esimerkistä 2.2.7 näemme, että jo symmetristen argumenttien suhteen ei tarvitse symmetrisoida. Siten, jos esimerkiksi $f : T^m \to \mathbb{R}$ on jo valmiiksi symmetrinen ensimmäisen $m - 1$ argumentin suhteen, niin

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(t_1, \dots, t_m) \\ &= \frac{1}{m} \Big\{ f(t_1, \dots, t_m) + f(t_1, \dots, t_m, t_{m-1}) + \cdots + f(t_2, \dots, t_m, t_1) \Big\}. \end{aligned}$$

(ii) Symmetrisaatiot liittyvät luonnollisella tavalla moninkertaiseen, tai iteroituun, integrointiin. Nimittäin esimerkiksi tilanteessa $m = 2$ ja

$\mathsf{T} = [0, 1]$ saamme

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 f(t_1, t_2)\, \mu(dt_1)\mu(dt_2) \\
&= \int_0^1 \int_0^{t_2} f(t_1, t_2)\, \mu(dt_1)\mu(dt_2) + \int_0^1 \int_{t_2}^1 f(t_1, s_2)\, \mu(dt_1)\mu(dt_2) \\
&= \int_0^1 \int_0^{t_2} f(t_1, t_2)\, \mu(dt_1)\mu(dt_2) + \int_0^1 \int_0^{t_1} f(t_1, t_2)\, \mu(dt_2)\mu(dt_1) \\
&= \int_0^1 \int_0^{t_2} f(t_1, t_2)\, \mu(dt_1)\mu(dt_2) + \int_0^1 \int_0^{t_2} f(t_2, t_1)\, \mu(dt_1)\mu(dt_2) \\
&= \int_0^1 \int_0^{t_2} \Big\{ f(t_1, t_2) + f(t_2, t_1) \Big\}\, \mu(dt_1)\mu(dt_2) \\
&= 2\int_0^1 \int_0^{t_2} \tilde{f}(t_1, t_2)\, \mu(dt_1)\mu(dt_2) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \tilde{f}(t_1, t_2)\, \mu(dt_1)\mu(dt_2).
\end{aligned}
$$

Samoin on helppo nähdä, että tapauksessa $\mathsf{T}^m = [0, 1]^m$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{0 \leqslant t_1, \ldots, t_m \leqslant 1} f(t_1, \ldots, t_m)\, \mu^m(dt_1, \ldots\, dt_m) \\
&= m! \int\limits_{0 \leqslant t_1 < \cdots < t_m \leqslant 1} f(t_1, \ldots, t_m)\, \mu^m(dt_1, \ldots, dt_m) \\
&= \int\limits_{0 \leqslant t_1, \ldots, t_m \leqslant 1} \tilde{f}(t_1, \ldots, t_m)\, \mu^m(dt_1, \ldots, dt_m).
\end{aligned}
$$

2.2.9 Lemma. *Olkoon* $f \in \mathcal{E}_m$ *ja* $g \in \mathcal{E}_k$ *ja* $\tilde{f}$ *ja* $\tilde{g}$ *niiden symmetrisaatiot. Tällöin*

(i) $I_m(f) = I_m(\tilde{f})$,

(ii) $\mathbf{E}\left[I_m(f) I_k(g)\right] = m! \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2(\mathsf{T}^m)}$, *jos* $m = k$, *ja nolla muulloin.*

Todistus. (i) Lineaarisuuden nojalla voimme olettaa, että $f = \mathbf{1}_{B_{i_1}\times\cdots\times B_{i_m}}$. Tällöin väite on triviaali.

(ii) Yhdistämällä f:n ja g:n on esityksissä olevat ositukset voimme olettaa, että ne on esitetty saman osituksen $B_1, B_2, \ldots, B_n$ avulla. Jos $m \neq k$, niin tulos seuraa siitä, että $\mathbf{E}[W(B)] = 0$ kaikilla $B \in \mathcal{B}_0$. Olkoon sitten $m = k$ ja f annettu kehitelmän (2.2.2) avulla. Olkoon g:n kehitelmä

$$g(t_1, \ldots, t_m) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} b_{i_1,\ldots,i_m} \mathbf{1}_{B_{i_1}\times\cdots\times B_{i_m}}(t_1, \ldots, t_m).$$

Väite seuraa nyt suoralla laskulla:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[I_m(f) I_m(g)\right] &= \mathbf{E}\Bigg[\sum_{i_1<\cdots<i_m} m! a_{i_1,\cdots,i_m} W(B_{i_1})\cdots W(B_{i_m}) \\
&\qquad \times \sum_{i_1<\cdots<i_m} m! b_{i_1,\cdots,i_m} W(B_{i_1})\cdots W(B_{i_m})\Bigg] \\
&= (m!)^2 \sum_{i_1<\cdots<i_m} a_{i_1,\cdots,i_m} b_{i_1,\cdots,i_m} \mu(B_{i_1})\cdots\mu(B_{i_m}) \\
&= m! \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} a_{i_1,\cdots,i_m} b_{i_1,\cdots,i_m} \mu(B_{i_1})\cdots\mu(B_{i_m}) \\
&= m! \langle f, g\rangle_{L^2(T^m)}.
\end{aligned}$$

Isometria (ii) seuraa nyt kohdasta (i). □

Lemman 2.2.9 kohta (ii) sanoo, että operaattori I_m (tai oikeammin operaattori $\frac{1}{m!} I_m$) on avaruuksien $\mathcal{E}_m$ ja $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ välinen isometria, sillä $\langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle_{L^2(T^m)} = \langle f, g\rangle_{L^2(T^m)}$. Siten se laajenee välittömästi avaruuden $\mathcal{E}_m$ sulkeumaan. Nimittäin Hilbert-avaruuksien välinen lineaarinen operaattori $T : H_0 \subset H \to H'$, joka toteuttaa isometrian

$$\|Th\|_{H'} = \|h\|_H \tag{2.2.10}$$

voidaan laajentaa yksikäsitteisesti H_0:n sulkeumaan siten, että isometria (2.2.10) pätee laajennetulle operaattorille. Itse asiassa määrittelemme tylysti

$$Th := \lim_{n\to\infty} Th_n,$$

kun $h_n \to h$. Nyt isometria (2.2.10) takaa, että $Th \in H'$ ja että raja-arvo on yksikäsitteinen. Nimittäin $(Th_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono avaruudessa H' isometrian (2.2.10) nojalla. Siten raja-arvo $Th \in H'$. Lisäksi, jos $\tilde{h}_n \to h$, niin

$$\begin{aligned}\|Th_n - T\tilde{h}_n\|_{H'} &= \|T(h_n - \tilde{h}_n)\|_{H'} \\ &= \|h_n - \tilde{h}_n\|_H \\ &\to 0,\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Siten $\lim_{n\to\infty} T\tilde{h}_n = Th$.

Olemme onnellisessa asemassa: $\mathcal{E}_m$:n sulkeuma on funktioavaruus $L^2(T^m)$. Tässä on keskeistä, että μ on atomiton mitta. Muuten diagonaalien poisto pilaisi tiheysominaisuuden.

2.2.11 Lemma. *Avaruus $\mathcal{E}_m$ on tiheä $L^2(T^m)$:ssä.*

Todistus. Sellaiset yksinkertaiset funktiot, jotka eivät välttämättä katoa diagonaaleilla ovat tiheässä $L^2(T^m)$:ssä. Siten riittää osoittaa, että voimme aproksimoida [1] indikaattorifunktion $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{A_1\times\cdots\times A_m}$, $A_i \in \mathcal{B}_0$, yksinkertaisilla funktiolla avaruudesta $\mathcal{E}_m$ sisätulon $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(T^m)}$ suhteen. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska mitalla μ ei ole atomeja, niin löydämme sellaiset erilliset $B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{B}_0$, että $\mu(B_i) < \varepsilon$ ja jokainen A_i voidaan esittää joukoista B_j koostuvana yhdisteenä. Tällöin siis

$$\mathbf{1}_A = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \epsilon_{i_1,\ldots,i_m} \mathbf{1}_{B_{i_1}\times\cdots\times B_{i_m}}, \tag{2.2.12}$$

missä $\epsilon_{i_1,\ldots,i_m}$ on joko 0 tai 1. Jaamme nyt summan (2.2.12) kahteen osaan. Olkoon I niiden m-jonojen joukko $(i_1,\ldots,i_m)$, joissa mitkään kaksi indeksiä eivät ole samoja. Joukkoon J kuuluvat loput summattavat m-jonot. Asetetaan

$$\mathbf{1}_B := \sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in I} \epsilon_{i_1,\ldots,i_m} \mathbf{1}_{B_{i_1}\times\cdots\times B_{i_m}}.$$

[1] Yrittäkääpä lausua approksimoida. Suomen kieltä kirjoitetaan niin kuin lausutaan.

Tällöin $\mathbf{1}_B$ kuuluu avaruuteen $\mathcal{E}_m$, $B \subset A$ ja

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B\|^2_{L^2(T^m)} &= \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in J} \epsilon_{i_1,\dots,i_m}\, \mu(B_{i_1})\cdots\mu(B_{i_m}) \\
&\leqslant \binom{m}{2} \sum_{i=1}^n \mu(B_i)^2 \left(\sum_{i=1}^n \mu(B_i)\right)^{m-2} \\
&\leqslant \binom{m}{2} \varepsilon \sum_{i=1}^n \mu(B_i) \left(\sum_{i=1}^n \mu(B_i)\right)^{m-2} \\
&= \binom{m}{2} \varepsilon \left(\sum_{i=1}^n \mu(B_i)\right)^{m-1} \\
&= \binom{m}{2} \varepsilon\mu \left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right)^{m-1} \\
&\leqslant \binom{m}{2} \varepsilon\mu \left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right)^{m-1}.
\end{aligned}$$

Väite seuraa siitä, että ε oli mielivaltainen. □

Näin siis integraali I_m voidaan laajentaa jatkuvaksi lineaariseksi operaattoriksi funktioavaruudelta $L^2(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$ satunnaismuuttujien avaruudelle $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$. Käytämme tälle laajennetulle operaattorille samaa merkintää I_m. Lisäksi käytämme merkintää

$$\int_{T^m} f(t_1,\dots,t_m)\, dW_{t_1}\cdots dW_{t_m} \quad := \quad I_m(f).$$

Tämä on sopusoinnussa Stokastisen Itô-integroinnin kanssa, kuten tulemme myöhemmin huomaamaan.

2.2.13 Huomautus. On selvää, että $I_1(h)$ on vain toinen tapa merkitä $W(h)$.

2.3 Valkoinen häly ja kaaoskehitelmä

Esitämme nyt moninkertaisten Wiener-integraalien avulla konkreettisemman version abstraktista kaaoskehitelmästä (2.1.7).

Tarvitsemme aluksi pari käsitettä ja lemmaa.

2.3.1 Määritelmä. Olkoot $f \in L^2(T^p)$ ja $g \in L^2(T^q)$, $p, q \in \mathbb{N}$. Funktioiden f ja g **tensoritulo** on funktio $f \otimes g \in L^2(T^{p+q})$, joka on määritelty kaavalla

$$(f \otimes g)(t_1, \ldots, t_p, t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}) \;:=\; f(t_1, \ldots, t_p)\, g(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q}).$$

Olkoon $r \leqslant \min(p, q)$. Funktioiden f ja g **supistettu tensoritulo** on funktio $f \otimes_r g \in L^2\left(T^{p+q-2r}\right)$, joka on määritelty kaavalla

$$\begin{aligned}
&(f \otimes_r g)(t_1, \ldots, t_{p+q-2r}) \\
&\quad = \int_{T^r} f(t_1, \ldots, t_{p-r}, s_1, \ldots, s_r)\, g(s_1, \ldots, s_r, t_{p+1-r}, \ldots, t_{p+q-2r}) \\
&\qquad \times \mu^r(ds_1, \ldots ds_r).
\end{aligned}$$

Funktion f **tensoripotenssi** $f^{\otimes m}$ on lyhennysmerkintä $f^{\otimes m} := f \otimes \cdots \otimes f$.

Tensoritulot $f \otimes g$ ja $f \otimes_r g$ eivät välttämättä ole symmetrisiä, vaikka funktiot f ja g olisivatkin. Merkitsemme niiden symmetrisaatiota symboleilla $f \tilde{\otimes} g$ ja $f \tilde{\otimes}_r g$. **Symmetrinen tensoritulo** $\tilde{\otimes}$ ja sen supistettu versio $\tilde{\otimes}_p$ on siis määritelty kaavoilla

$$f \tilde{\otimes} g \;:=\; \widetilde{f \otimes g} \qquad \text{ja} \qquad f \tilde{\otimes}_r g \;:=\; \widetilde{f \otimes_r g}.$$

2.3.2 Esimerkki. Olkoon $T = [0, 1]$, μ Lebesguen mitta ja

$$\begin{aligned}
f(t_1, t_2) &= t_1 t_2^2 + t_1^2 t_2, \\
g(t_1, t_2, t_3) &= t_1 t_2 t_3.
\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
(f \otimes g)(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) &= \left(t_1 t_2^2 + t_1^2 t_2\right)(t_3 t_4 t_5) \\
&= t_1 t_2^2 t_3 t_4 t_5 + t_1^2 t_2 t_3 t_4 t_5.
\end{aligned}$$

Siten, vaikka f ja g ovat symmetrisiä, $f \otimes g$ ei ole symmetrinen. Symmetrisaation $f\tilde{\otimes}g$ laskeminen on suoraviivaista, mutta työlästä. Jätämme laskun harjoitustehtäväksi "työn sankareille". Sen sijaan laskemme supistetun tensoritulon $f \otimes_1 g$:

$$\begin{aligned}(f \otimes_1 g)(t_1, t_2, t_3) &= \int_0^1 \left(t_1 s^2 + t_1^2 s\right)(s t_2 t_3)\, ds \\ &= t_2 t_3 \int_0^1 \left\{t_1 s^3 + t_1^2 s^2\right\} ds \\ &= t_2 t_3 \left(\frac{t_1}{4} + \frac{t_1^2}{3}\right).\end{aligned}$$

Näemme, että myöskään $f \otimes_1 g$ ei ole symmetrinen. Itse asiassa

$$(f\tilde{\otimes}_1 g)(t_1, t_2, t_3) = \frac{t_2 t_3}{3}\left(\frac{t_1}{4}+\frac{t_1^2}{3}\right) + \frac{t_1 t_3}{3}\left(\frac{t_2}{4}+\frac{t_2^2}{3}\right) + \frac{t_1 t_2}{3}\left(\frac{t_3}{4}+\frac{t_3^2}{3}\right).$$

Käsitteet on käsitelty. Siirrymme lemmoihin.

2.3.3 Lemma. *Olkoon* $f \in \tilde{L}^2(T^p)$ *ja* $g \in L^2(T)$. *Tällöin*

$$I_p(f) I_1(g) = I_{p+1}(f \otimes g) + p I_{p-1}(f \otimes_1 g). \tag{2.3.4}$$

Ennen lemman 2.3.3 todistusta valaisemme hieman esimerkillä, mitä kaava (2.3.4) tarkoittaa.

2.3.5 Esimerkki. Olkoon $p = 1$, $T = [0, 1]$, ja $g = f$. Tällöin kaava (2.3.4) saa muodon

$$\left(\int_0^1 f(t)\, dW_t\right)^2 = \int_0^1 \int_0^1 f(s) f(t)\, dW_s dW_t + \int_0^1 f(t)^2\, \mu(dt).$$

Huomattavaa on, että tavalliselle integraalille pätee

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(t)\, \mu(dt)\right)^2 &= \int_0^1 f(s)\, \mu(ds) \int_0^1 f(t)\, \mu(dt) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(s) f(t)\, \mu(ds) \mu(dt) \\ &= \int_{[0,1]^2} f^{\otimes 2}(s, t)\, \mu^2(ds, dt).\end{aligned}$$

Wiener-integroinnissa esiintyy siis ylimääräinen "trace-termi"

$$\int_0^1 f(t)^2\,\mu(dt).$$

Lemman 2.3.3 todistus. Koska yksinkertaiset funktiot ovat tiheässä avaruudessa $L^2(T^p)$ ja koska ongelma on lineaarinen, voimme olettaa, että f on jonkin indikaattorifunktion $\mathbf{1}_A$ symmetrisaatio. Tässä $A = A_1 \times \cdots \times A_p$, missä A_i:t ovat $\mathcal{B}_0$:n erillisiä osajoukkoja. Voimme olettaa myös, että g on yksinkertainen. Itse asiassa voimme olettaa, että g on joko $\mathbf{1}_{A_1}$ tai $\mathbf{1}_{A_0}$, missä A_0 on erillinen joukoista $A_1, \ldots, A_p$.

Jos $g = \mathbf{1}_{A_0}$, niin väite on selvä. Nimittäin tällöin $f \otimes g \in \mathcal{E}_{p+1}$ ja $f \otimes_1 g = 0$.

Olkoon siten $g = \mathbf{1}_{A_1}$. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Muodostamme joukolle A sellaisen osituksen $B_1, \ldots, B_n$, että $\mu(B_i) < \varepsilon$. Tarkoituksemme on aproksimoida funktiota $f \otimes g = \mathbf{1}_{A_1 \times A_1 \times \cdots \times A_n}$ hävittämällä joukon A_1 diagonaali. Aproksimaatiomme on

$$h_\varepsilon \;:=\; \sum_{i \neq j} \mathbf{1}_{B_i \times B_j \times A_2 \times \cdots \times A_p}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
I_p(f)I_1(g) &= W(A_1)^2 W(A_2)\cdots W(A_p) \\
&= \sum_{i\neq j} W(B_i)W(B_j) \times W(A_2)\cdots W(A_p) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \left\{ W(B_i)^2 - \mu(B_i) \right\} \times W(A_2)\cdots W(A_p) \qquad (2.3.6) \\
&\quad + \mu(A_1) W(A_2)\cdots W(A_p).
\end{aligned}$$

Olkoon R_ε summa (2.3.6). Koska

$$f \otimes_1 g \;=\; \frac{1}{p}\tilde{\mathbf{1}}_{A_2 \times \cdots \times A_p}\mu(A_1),$$

niin

$$I_p(f)I_1(g) \;=\; I_{p+1}(h_\varepsilon) + R_\varepsilon + pI_{p-1}(f \otimes_1 g).$$

Väitteen todistamiseksi pitää enää osoittaa, että $h_\varepsilon \to f \otimes g$ avaruudessa $L^2(T^{p+1})$ ja $R_\varepsilon \to 0$ avaruudessa $L^2(\Omega)$. Tässä siis $\varepsilon \to 0$. Ensimmäinen suppeneminen seuraa arviosta

$$\begin{aligned} \|h_\varepsilon - f \otimes g\|^2_{L^2(T^{p+1})} &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)^2 \times \mu(A_2)\cdots\mu(A_p) \\ &\leqslant \varepsilon\mu(A_1)\mu(A_2)\cdots\mu(A_p). \end{aligned}$$

Jälkimmäinen suppeneminen saadaan arvioimalla samalla tavalla

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[R_\varepsilon^2\right] &= \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\{W(B_i)^2 - \mu(B_i)\}\right)^2\right]\mathbf{E}\left[(W(A_2)\cdots W(A_p))^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left[\{W(B_i)^2 - \mu(B_i)\}^2\right] \times \mu(A_2)\cdots\mu(A_p) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)^2 \times \mu(A_2)\cdots\mu(A_p) \\ &\leqslant 2\varepsilon\mu(A_1)\mu(A_2)\cdots\mu(A_p), \end{aligned}$$

ja huomaamalla, että R_ε on keskitetty. □

Lemma 2.3.3 yleistyy seuraavaan muotoon.

2.3.7 Lemma. *Olkoon* $f \in \tilde{L}^2(T^p)$ *ja* $g \in \tilde{L}^2(T^q)$. *Tällöin*

$$I_p(f)I_q(g) = \sum_{r=0}^{\min(p,q)} r!\binom{p}{r}\binom{q}{r} I_{p+q-2r}(f \otimes_r g).$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Voimme nyt esittää moninkertaisten Wiener-integraalien ja Hermiten polynomien välisen suhteen.

2.3.8 Propositio. *Olkoon* $h \in L^2(T)$ *sellainen, että* $\|h\|_{L^2(T)} = 1$. *Tällöin*

$$\begin{aligned} H_m(W(h)) &= \frac{1}{m!} I_m\left(h^{\otimes m}\right) \\ &= \frac{1}{m!} \int_{T^m} h(t_1) \cdots h(t_m)\, dW_{t_1} \cdots dW_{t_m}. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Todistus. Todistamme kaavan (2.3.9) induktiolla m:n suhteen. Jos $m = 1$, niin väite on triviaali. Olettakaamme sitten, että (2.3.9) pätee arvoilla $1, 2, \ldots, m$. Käyttämällä moninkertaisen Wiener-integraalin tulokaavaa (2.3.4), induktio-oletusta arvoilla m ja $m-1$ ja Hermiten polynomien rekursiokaavaa (1.4.5) saamme

$$\begin{aligned} I_{m+1}\left(h^{\otimes(m+1)}\right) &= I_m\left(h^{\otimes m}\right) I_1(h) - m I_{m-1}\left(h^{\otimes(m-1)} \int_T h(t)^2\, \mu(dt)\right) \\ &= m! H_m(W(h))\, W(h) - m(m-1)! H_{m-1}(W(h)) \\ &= m!(m+1) H_{m+1}(W(h)) \\ &= (m+1)! H_{m+1}(W(h)). \end{aligned}$$

Väite seuraa siten induktio-oletuksesta. □

2.3.10 Huomautus. Propositiosta 2.3.8 seuraa, että m. kaaos $\mathcal{H}_m$ on satunnaismuuttujien

$$\left\{ I_m\left(h^{\otimes m}\right) : h \in \mathcal{H}, \|h\|_H = 1 \right\}.$$

virittämä $L^2(\Omega)$:n aliavaruus.

Lopulta olemme valmiit esittämään konkreettisen version kaaoskehitelmästä (2.1.7) eli **Wiener–Itô-kaaoskehitelmän**.

2.3.11 Teoreema. *Moninkertainen Wiener-integraali* I_m *kuvaa funktioavaruuden* $L^2(T^m)$ *Wiener-kaaokselle* $\mathcal{H}_m$. *Jos* $F \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$, *niin se voidaan esittää avaruudessa* $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ *suppenevana sarjana*

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m). \tag{2.3.12}$$

Tässä $f_0 = \mathbf{E}[F]$ *ja* I_0 *on identiteettioperaattori. Lisäksi pätee*

$$\mathbf{E}\left[F^2\right] = \sum_{m=0}^{\infty} m!\|f_m\|^2_{L^2(T^m)}. \tag{2.3.13}$$

Voimme olettaa, että funktiot $f_m \in L^2(T^m)$, $m = 1, 2, \ldots$, *ovat symmetrisiä, ja tässä tapauksessa ne ovat yksikäsitteisiä.*

Todistus. Olkoon $f \in \tilde{L}^2(T^m)$. Isometriasta

$$\mathbf{E}\left[I_m(f)^2\right] = m!\|f_m\|^2_{L^2(T^m)}$$

seuraa, että $I_m(\tilde{L}^2(T^m))$ on suljettu. Kaavasta (2.3.9) taas seuraa, että $I_m(\tilde{L}^2(T^m))$ sisältää satunnaismuuttujat $H_m(W(h))$, $h \in H$, $\|h\|_H = 1$. Siten $\mathcal{H}_m \subset I_m(\tilde{L}^2(T^m))$. Koska eri kertalukua olevat moninkertaiset Wiener-integraalit ovat ortogonaalisia, niin $I_m(\tilde{L}^2(T^m))$ on ortogonaalinen $\mathcal{H}_n$:n kanssa kaikilla $n \neq m$. Siten $I_m(\tilde{L}^2(T^m)) \subset \mathcal{H}_m$. Kehitelmä (2.3.12) seuraa siten abstraktista kehitelmästä (2.1.7). Kaava (2.3.13) seuraa taas suoraan ortogonaalisuudesta. Esityksen (2.3.12) yksikäsitteisyys taas seuraa kaavasta (2.3.13). Jätämme yksityiskohdat harjoitustehtäväksi. □

2.3.14 Esimerkki. (i) Olkoon $T = [0, 1]$, μ Lebesguen mitta ja $F = W_1^2$. Koska

$$H_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \qquad \text{ja} \qquad H_0(x) = 1,$$

niin

$$\begin{aligned} W_1^2 &= 2H_2(W_1) + H_0(W_1) \\ &= 2H_2\left(W\left(\mathbf{1}^{\otimes 2}_{[0,1]}\right)\right) + I_0(1). \end{aligned}$$

Koska $\|\mathbf{1}_{[0,1]}\|^2_{L^2([0,1])} = 1$, niin kaavasta (2.3.9) seuraa, että

$$W_1^2 = I_0(1) + I_2\left(\mathbf{1}^{\otimes 2}_{[0,1]}\right).$$

Samalla tavalla voimme laskea kaaoskehitelmän satunnaismuuttujille, jotka ovat muotoa

$$F = \sum_{i=1}^{m} a_i W_{t_i}^{n_i},$$

$a_i, \in \mathbb{R}$, $n_i, m \in \mathbb{N}$, $t_i \in [0, 1]$.

(ii) Olkoon $T = [0, 1]$ ja $h \in H$ sellainen, että $\|h\|_H = 1$. Olkoon $F = \exp\{W(h)\}$. Kehitelmän (1.4.3) nojalla

$$\exp\left\{W(h) - \frac{1}{2}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n\left(W(h)\right).$$

Siten, käyttämällä kaavaa (2.3.9), saamme kaaoskehitelmän

$$\exp\{W(h)\} = \sum_{n=0}^{\infty} I_n\left(\frac{\sqrt{e}}{n!} h^{\otimes n}\right).$$

2.4 Itô-integraalit ja Itô–Clark-esityslause

Tässä osiossa joukko T on joko jokin kompakti väli $[0, t_0]$ tai koko positiivinen reaaliakseli $\mathbb{R}_+$. Jonolla $\mathbf{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\in T}$ tarkoitamme valkoisen hälyn W sisäistä historiaa: $\mathcal{G}_t := \sigma(W_s : s \leqslant t)$.

Kertaamme aluksi lyhyesti, mistä Itô-integroinnissa on kyse. Tarkemmin Itô-integrointia käsitellään kurssilla "Stokastinen analyysi".

Stokastinen Itô-integraali määritellään periaatteessa samalla tavalla kuin yksinkertainen Wiener-integraali: yksinkertaiset integrandit on vain korvattava ennustettavilla yksinkertaisilla integrandeilla.

2.4.1 Määritelmä. Prosessi $u : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ on **yksinkertainen ja ennustettava**, jos se on muotoa

$$u_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n} F_i(\omega)\mathbf{1}_{(t_{i-1},t_i]}(t), \tag{2.4.2}$$

missä $t_i \in T$ ja F_i on $\mathcal{G}_{t_{i-1}}$-mitallinen satunnaismuuttuja. Oletamme lisäksi, että $\mathbf{E}\left[F_i^2\right] < \infty$. Merkitsemme tällaisten prosessien muodostamaa vektoriavaruutta symbolilla $\mathcal{E}_a$.

Jos u on annettu kaavalla (2.4.2), niin on luonnollista määritellä

$$\int_T u_t \, dW_t := \sum_{i=1}^{n} F_i \, \Delta W_{t_i}$$

$$:= \sum_{i=1}^{n} F_i \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right). \tag{2.4.3}$$

Kuten Wiener-integraalien tapauksessa on helppo nähdä, että stokastinen Itô-integraali on lineaarinen, eikä se riipu u:n esityksestä. Lisäksi se toteuttaa **Itôn isometrian**

$$\mathbf{E}\left[\int_T u_t \, dW_t \int_T v_t \, dW_t\right] = \mathbf{E}\left[\int_T u_t v_t \, \mu(dt)\right]. \tag{2.4.4}$$

2.4.5 Määritelmä. Avaruus $L^2_a(T \times \Omega)$ koostuu neliöintegroituvista $\mathbf{G}$-sopivista prosesseista. Toisin sanoen $u \in L^2_a(T \times \Omega)$, jos

(i) $\mathbf{E}\left[\int_T u_t^2 \, \mu(dt)\right] < \infty$,

(ii) u_t on $\mathcal{G}_t$-mitallinen.

Voidaan, joskin kohtalaisen vaivannäyön jälkeen, osoittaa että $\mathcal{E}_a$ on avaruuden $L^2_a(T \times \Omega)$ tiheä aliavaruus. Siten isometriasta (2.4.4) seuraa, että Itô-integraali laajenee jatkuvaksi lineaariseksi operaattoriksi prosessiluokalta $L^2_a(T \times \Omega)$ satunnaismuuttujien avaruudelle $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ ja tämä laajennettu operaattori toteuttaa myös Itôn isometrian (2.4.4).

Merkitsemme

$$\int_s^t u_r \, dW_r := \int_T u_r \mathbf{1}_{(s,t]}(r) \, dW_r.$$

Tällöin on ilmeistä, että Itô-integraali on additiivinen integroimisalueensa suhteen:

$$\int_{t_1}^{t_2} u_s \, dW_s = \int_{t_1}^{t} u_s \, dW_s + \int_t^{t_2} u_s \, dW_s.$$

Lisäksi voidaan osoittaa, että prosessi

$$(t, \omega) \mapsto \int_0^t u_s(\omega) \, dW_s(\omega)$$

on martingaali.

Keskeinen, ja itse asiassa ainoa, työkalu Itô-integraalien laskemiseksi on **Itôn kaava**.

2.4.6 Propositio. *Olkoon* $f \in C^{1,2}(T \times \mathbb{R})$. *Tällöin kaikilla* $s \leqslant t$ *pätee*

$$\begin{aligned} f(t, W_t) - f(s, W_s) &= \int_s^t \frac{\partial f}{\partial t}(r, W_r) \, dr + \int_s^t \frac{\partial f}{\partial x}(r, W_r) \, dW_r \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_s^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r, W_r) \, \mu(dr). \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Todistus. Tämä on loistava harjoitustehtävä, esimerkiksi graduksi. □

2.4.8 Esimerkki. (i) Olkoon W Brownin liike. Toisin sanoen $T = [0,1]$ ja μ on Lebesguen mitta. Laskemme integraalin

$$\int_0^1 W_t \, dW_t.$$

Käytämme Itôn kaavaa seuraavasti. Haluamme, että

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) \quad = \quad x.$$

Valitsemme siis

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{2}x^2.$$

Tällöin Itôn kaava sanoo, että

$$\frac{1}{2}W_1^2 \quad = \quad \int_0^1 W_t \, dW_t + \frac{1}{2}\int_0^1 dt.$$

Siispä

$$\int_0^1 W_t \, dW_t \quad = \quad \frac{1}{2}\left(W_1^2 - 1\right).$$

Tätä tulosta kannattanee verrata esimerkkiin 2.3.14 (i). Nimittäin

$$\frac{1}{2}\left(W_1^2 - 1\right) \quad = \quad H_2(W_1).$$

(ii) Olkoon $u \in L_a^2(T \times \Omega)$. Asetetaan

$$\mathfrak{E}(u)_t \quad := \quad \exp\left\{\int_0^t u_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t u_s^2 \, \mu(ds)\right\}.$$

Tällöin Itôn kaavasta seuraa, että $\mathfrak{E}(u)$ toteuttaa stokastisen differentiaaliyhtälön (tai oikeammin integraaliyhtälön)

$$d\mathfrak{E}(u)_t \quad = \quad \mathfrak{E}(u)_t u_t dW_t \tag{2.4.9}$$

alkuarvolla $\mathfrak{E}(u)_0 = 1$. Tästä syystä operaattoria $\mathfrak{E}$ kutsutaan nimellä **stokastinen eksponentti**.

Olemme nyt, lopultakin, valmiit todistamaan **Itô–Clark-esityslauseen**.

2.4.10 Teoreema. *Olkoon* $F \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$. *Tällöin on olemassa yksikäsitteinen* $u \in L^2_a(T \times \Omega)$ *siten, että* F *voidaan esittää muodossa*

$$F = \mathbf{E}[F] + \int_T u_t \, dW_t. \tag{2.4.11}$$

Todistus. Olkoon $G \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ sellainen, että $\mathbf{E}[G] = 0$. Teoreeman 2.4.10 väite seuraa, jos siitä, että G on ortogonaalinen kaikkia integraaleja

$$\int_T u_t \, dW_t, \qquad u \in L^2_a(T \times \Omega),$$

vastaan seuraa, että $G = 0$. Kaavan (2.4.9) nojalla G on ortogonaalinen eksponentteja

$$\mathfrak{E}(h)_{\sup T} = \exp\left\{ \int_T h(t) \, dW_t - \frac{1}{2} \int_T h(t)^2 \, \mu(dt) \right\}, \qquad h \in L^2(T),$$

vastaan. Siten $G = 0$, koska lemman 2.1.1 nojalla nämä eksponentit muodostavat avaruuden $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ totaalin joukon. $\square$

Vertaamme lopuksi estyslauseita 2.1.6 ja 2.4.10. Haluamme tulkita moninkertaisen Wiener-integraalin Itô-integraalina.

2.4.12 Esimerkki. Olkoon $T = [0, 1]$, $m = 2$ ja $f \in L^2([0, 1]^2)$. Asettamalla naiivisti

$$\begin{aligned} I_2(f) &= \int_{[0,1]^2} f(t_1, t_2) \, dW_{t_1} dW_{t_2} \\ &=: \int_0^1 \left\{ \int_0^1 f(t_1, t_2) \, dW_{t_1} \right\} dW_{t_2} \end{aligned}$$

joudumme ongelmiin. Nimittäin vaikka sisempi integraali

$$u_{t_2} := \int_0^1 f(t_1, t_2) \, dW_{t_1}$$

onkin hyvin määritelty Itô-integraalina, niin satunnaismuuttuja u_{t_2} ei ole enää $\mathcal{G}_{t_2}$-mitallinen. Siten integraali

$$\int_0^1 u_{t_2} \, dW_{t_2}$$

ei ole Itô-mielessä olemassa, koska prosessi u ei ole $\mathbf{G}$-sopiva, eikä siten kuulu avaruuteen $L^2_a(T \times \Omega)$.

Esimerkin 2.4.12 ongelma on itse asiassa hyvin helppo ratkaista. Koska $I_m(f) = I_m(\tilde{f})$, niin voimme ajatella, että f on määritelty ainoastaan alakolmiossa $\{t_1 < t_2 < \cdots < t_m\}$. Tällöin voimme tulkita

$$I_m(f) \quad = \quad m! \int_T \int_0^{t_m} \cdots \int_0^{t_2} f(t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m) \, dW_{t_1} \cdots dW_{t_{m-1}} dW_{t_m}.$$

Tämä on hyvin määritelty iteroituna Itô-integraalina, sillä prosessi

$$\begin{aligned} u \quad &:= \quad u(t_{k+1}, \cdots, t_m) \\ &:= \quad \int_0^{t_k} \cdots \int_0^{t_2} f(t_1, \ldots, t_{k-1}, \cdot, t_{k+1}, \cdots, t_m) \, dW_{t_1} \cdots dW_{t_{k-1}} \end{aligned}$$

kuuluu avaruuteen $L_a^2(T \times \Omega)$ kaikilla $k \leqslant m$ ja kaikilla $t_{k+1}, \cdots, t_m \in T$.

Luku 3

Malliavin-derivaatta

Pitkänpuoleisen johdannon jälkeen pääsemme lopulta itse aiheeseen eli derivointiin.

Osiossa 3.1 käsittelemme yleisesti derivointia ääretönulotteisissa avaruuksissa. Jatkon kannalta tämä osio ei ole tarpeellinen, mutta "näkemyksen" kannalta se voi olla varsin hyödyllinen. Samat kommentit koskevat myös osiota 3.2. Varsinainen yleinen Malliavin-derivaatan määritelmä annetaan vasta osiossa 3.3. Osiossa 3.4 palaamme yleisyydestä takaisin valkoiseen hälyyn.

3.1 Derivointi Banach-avaruuksissa

Kertaamme aluksi kaikille varmaan tutun äärellisulotteisen tapauksen.

Funktiolla $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on **suunnattu derivaatta** suuntaan $y \in \mathbb{R}^n$ pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$, jos raja-arvo

$$\nabla_y f(x) \;:=\; \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon y) - f(x)}{\varepsilon}$$

on olemassa. Tässä tapauksessa kutsumme lukua $\nabla_y f(x) \in \mathbb{R}$ funktion f suunnatuksi derivaataksi (suuntaan y pisteessä x). Jos $(e_i)_{i=1}^n$ on $\mathbb{R}^n$:n tavanomainen ortonormaali kanta, niin

$$\nabla_{e_i} f(x) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on **differentioituva** pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$, jos on olemassa sellainen vektori $a(f, x) \in \mathbb{R}^n$, että

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - \langle a(f,x), h \rangle_{\mathbb{R}^n}|}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \;=\; 0.$$

Tässä tapauksessa kutsumme vektoria $a(f, x) \in \mathbb{R}^n$ funktion f derivaataksi pisteessä x ja merkitsemme

$$\nabla f(x) \;:=\; a(f, x).$$

Differentioituvuuden ja suunnatun derivoituvuuden välinen yhteys on hyvin tunnettu.

3.1.1 Propositio. (i) *Jos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on differentioituva pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$, niin sillä on suunnatut derivaatat pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ kaikkiin suuntiin $y \in \mathbb{R}^n$. Lisäksi tällöin*

$$\nabla_y f(x) \;=\; \langle \nabla f(x), y \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

(ii) *Kääntäen, jos f:llä on pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ kaikki osittaisderivaatat ja nämä osittaisdervaatat ovat jatkuvia x:n suhteen, niin f on differentioituva pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ ja tällöin*

$$\nabla f(x) \;=\; \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right]_{i=1,\ldots,n}.$$

Suunnattu derivoituvuus ja differentioituvuus voidaan määritellä äärettönulotteisissa avaruuksissa formaalisti samalla tavalla, kuin äärellisulotteisessa tapauksessa.

Suunnattua derivaattaa vastaa Gâteaux-derivaatta.

3.1.2 Määritelmä. Olkoon B Banach-avaruus ja $f : B \to \mathbb{R}$. Funktiolla f on **Gâteaux-derivaatta** pisteessä $x \in B$ suuntaan $y \in B$, jos raja-arvo

$$\nabla_y f(y) \;:=\; \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon y) - f(x)}{\varepsilon}$$

on olemassa. Tässä tapauksessa kutsumme lukua $\nabla_y f(x) \in \mathbb{R}$ funktion f Gâteaux-derivaataksi (suuntaan y pisteessä x).

3.1.3 Esimerkki. (i) Jos $f : B \to \mathbb{R}$ on lineaarinen, niin

$$f(x+\varepsilon y) - f(x) \;=\; f(x) + f(\varepsilon y) - f(x) \;=\; \varepsilon f(y).$$

Siten f on Gâteaux-derivoituva ja

$$\nabla_y f(x) \;=\; f(y).$$

Emme muuten olettaneet, että f on jatkuva (eli tässä tapauksessa rajoitettu).

(ii) Olkoon B jokin funktioavaruus ja $f(x) = x(t)^2$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+\varepsilon y) - f(x)}{\varepsilon} &= \frac{\big(x(t) + \varepsilon y(t)\big)^2 - x(t)^2}{\varepsilon} \\
&= \frac{x(t)^2 + 2\varepsilon x(t)y(t) + \varepsilon^2 y(t)^2 - x(t)^2}{\varepsilon} \\
&\to 2x(t)y(t).
\end{aligned}$$

Siten f on Gâteaux-derivoituva ja

$$\nabla_y f(x) \;=\; x(t)y(t).$$

(iii) Olkoon A Banach-avaruuden B osajoukko ja $f = \mathbf{1}_A$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+\varepsilon y) - f(x)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\Big\{\mathbf{1}_A(x+\varepsilon y) - \mathbf{1}_A(x)\Big\} \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\Big\{\mathbf{1}_{A-\varepsilon y}(x) - \mathbf{1}_A(x)\Big\}.
\end{aligned}$$

Siten f on Gâteaux-derivoituva (kaikkiin suuntiin $y \in B$) ainoastaan A:n reunan ulkopuolella ja tällöin

$$\nabla_y f(x) \;=\; 0.$$

Differentioituvuutta vastaa ääretönulotteisessa tapauksessa Fréchet-differentioituvuus.

3.1.4 Määritelmä. Olkoon B Banach-avaruus. Funktio $f : B \to \mathbb{R}$ on **Fréchet-differentioituva** pisteessä $x \in B$, jos on olemassa sellainen $a(f,x) \in B^*$, että

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - <a(f,x), h>|}{\|h\|_B} = 0.$$

Tässä tapauksessa kutsumme funktionaalia $a(f,x) \in B^*$ funktion f derivaataksi pisteessä x ja merkitsemme

$$\nabla f(x) := a(f,x).$$

3.1.5 Huomautus. Fréchet-differentioituvat funktiot $f : B \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia. Tämän näkee suoraan määritelmästä. Gâteaux-dervioituvat funktiot taas voivat olla epäjatkuvia. Tämän näimme esimerkissä 3.1.3 (i).

Propositiolla 3.1.1 on seuraava äärettömulotteinen vastine.

3.1.6 Propositio. (i) *Jos $f : B \to \mathbb{R}$ on Fréchet-differentioituva pisteessä $x \in B$, niin se on myös Gâteaux-derivoituva pisteessä $x \in B$ kaikkiin suuntiin $y \in B$. Lisäksi tällöin*

$$\nabla_y f(x) = <\nabla f(x), y> .$$

(ii) *Kääntäen, jos f on Gâteaux-derivoituva pisteessä $x \in B$ kaikkiin suuntiin $y \in B$ ja lineaarinen kuvaus*

$$y \mapsto \nabla_y f(x)$$

on jatkuva kaikilla $x \in B$, niin tällöin on olemassa sellainen $\tilde{\nabla} f(x) \in B^*$, että

$$\nabla_y f(x) = <\tilde{\nabla} f(x), y> . \tag{3.1.7}$$

Jos kuvaus $x \mapsto \tilde{\nabla} f(x)$ on jatkuva, niin f on Fréchet-differentioituva pisteessä $x \in B$ ja $\tilde{\nabla} f(x) = \nabla f(x)$.

3.1.8 Esimerkki. Olkoon $f : B \to \mathbb{R}$ kuten esimerkissä 3.1.3 (i) (siis lineaarinen). Koska Fréchet-differentioituvat funktiot ovat jatkuvia, niin f on Fréchet-differentioituva jos ja vain jos se on rajoitettu, eli $f \in B^*$. Esimerkin 3.1.3 nojalla tiedämme, että $\nabla_y f(x) = f(y)$. Siten $\nabla f(x) = f$.

3.2 Derivointi Wiener-avaruudessa

Tässä osiossa sovellamme edellisen osion käsitteitä Brownin liikkeeseen, jonka käsitämme niin sanottuna Wiener-avaruutena. Tässä osiossa siis $H = L^2([0,1])$ ja $\mu(dt) = dt$.

Brownin liikkeellä $W = (W_t)_{t\in[0,1]}$ on melkein varmasti jatkuvat polut eli kuvaus $t \mapsto W_t(\omega)$ on jatkuva melkein kaikilla $\omega \in \Omega$ (tämän voi nähdä esimerkiksi käyttämällä Kolmogorovin jatkuvuuslausetta). Tarkastelemme nyt Brownin liikettä kanonisessa todennäköisyysavaruudessa. Polkujen jatkuvuuden nojalla voimme valita perusjoukoksi jatkuvien funktioiden avaruuden: $\Omega := C([0,1])$. Kanoniseksi, tai isonormaaliksi, σ-algebraksi $\mathcal{G}$ valitsemme minimaalisen σ-algebran, jonka suhteen koordinaattikuvaukset $\omega \mapsto \omega(t)$, $t \in [0,1]$, ovat mitallisia. Tällöin σ-algebra $\mathcal{G}$ generoituu sylinterijoukoista

$$\Big\{\omega \in C([0,1]) \,:\, \omega(t_1) \in B_1, \dots, \omega(t_n) \in B_n\Big\},$$

missä $n \in \mathbb{N}$, $t_1 < \cdots < t_n \in [0,1]$ ja $B_1, \dots, , B_n$ ovat $\mathbb{R}$:n Borel-joukkoja. Tälle σ-algebralle käytetään tavallisesti merkintää $\mathcal{C}([0,1])$. Todennäköisyysmitaksi valitsemme **Wiener-mitan** $\mathbf{P} := \mathbf{P}_W$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_W\Big[\Big\{\omega \in C([0,1]) \,:\, \omega(t_1) \in dx_1, \dots, \omega(t_n) \in dx_n\Big\}\Big] \\ &\quad := \mathbf{P}\Big[W_{t_1} \in dx_1, \dots, W_{t_n} \in dx_n\Big]. \end{aligned}$$

Itse asiassa, käyttämällä Brownin liikkeen Markoviaanisuutta ja lisäysten stationaarista, voimme esittää Wiener-mitan gaussisen tiheyden

$$p(x;y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-y}{t}\right)^2\right\}$$

avulla:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_W\Big[\Big\{\omega \in C([0,1]) \,:\, \omega(t_1) \in dx_1, \dots, \omega(t_n) \in dx_n\Big\}\Big] \\ &:= p(x_1;0,t_1)p(x_2;x_1,t_2-t_1)\cdots p(x_n;x_{n-1},t_n-t_{n-1})\, dx_1\cdots dx_n. \end{aligned}$$

Nimittäin

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Big[W_{t_1} \in dx_1, \ldots, W_{t_n} \in dx_n\Big] \\
&= \mathbf{P}\Big[W_{t_1} \in dx_1, \ldots, W_{t_{n-1}} \in dx_{n-1}\Big] \\
&\quad \times \mathbf{P}\Big[W_{t_n} \in dx_n \Big| W_{t_1} = x_1, \ldots, W_{t_{n-1}} = x_{n-1}\Big] \\
&= \mathbf{P}\Big[W_{t_1} \in dx_1, \ldots, W_{t_{n-1}} \in dx_{n-1}\Big]\mathbf{P}\Big[W_{t_n} \in dx_n \Big| W_{t_{n-1}} = x_{n-1}\Big] \\
&= \mathbf{P}\Big[W_{t_1} \in dx_1, \ldots, W_{t_{n-1}} \in dx_{n-1}\Big]\mathbf{P}\Big[W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \in dx_n - x_{n-1}\Big] \\
&= \mathbf{P}\Big[W_{t_1} \in dx_1, \ldots, W_{t_{n-1}} \in dx_{n-1}\Big]\mathbf{P}\Big[W_{t_n - t_{n-1}} \in dx_n - x_{n-1}\Big] \\
&\vdots \\
&= \mathbf{P}\Big[W_{t_1} \in dx_1\Big]\mathbf{P}\Big[W_{t_2 - t_1} \in dx_2 - x_1\Big] \cdots \mathbf{P}\Big[W_{t_n - t_{n-1}} \in dx_n - x_{n-1}\Big].
\end{aligned}
$$

Tällöin Brownin liike W on koordinaattikuvaus kanonisella todennäköisyysavaruudella, eli **Wiener-avaruudelta**, $(C([0,1]), \mathcal{C}([0,1]), \mathbf{P}_W)$:[1]

$$W_t(\omega) \;=\; \omega(t).$$

Jatkuvien funktioiden avaruuden $C([0,1])$ topologinen duaali on merkkisten mittojen avaruus. Tyypillinen $C([0,1])^*$:n alkio on siis muotoa

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{t_i},$$

missä $a_i \in \mathbb{R}$, $t_i \in [0,1]$ ja δ_{t_i} on Diracin delta-massa pisteessä t_i. Emme kuitenkaan kehitä derivointiteoriaa tähän suuntaan, koska se "ei-Hilbert-teoriana" olisi käytännön laskuissa lähes käyttökelvotonta. Sen sijaan rakennamme Hilbert-teoriaa $C([0,1])$:tä laajemman avaruuden $L^2([0,1])$ avulla.

[1] Huomaa, että Wiener-avaruuden σ-algebra ei ole $C([0,1])$:n normin mukainen Borelin σ-algebra, vaan jotain paljon köyhempää.

Peruslähtökohtana derivoinnissa on Wiener-integraali

$$\begin{aligned} W(h)(\omega) &= \int_0^1 h(t)\, dW_t(\omega) \\ &= \int_0^1 h(t)\, d\omega(t). \end{aligned}$$

Koska Wiener-integraali on määritelty $L^2(\Omega)$-mielessä, niin erityisesti se on määritelty vain $\mathbf{P}_W$-melkein varmasti. Tämä aiheuttaa ongelman suunnatun derivaatan määrittelyssä. Nimittäin erotusosamäärässä

$$\frac{W(h)(\omega + \varepsilon\eta) - W(h)(\omega)}{\varepsilon}$$

on koordinaattiprosessia $t \mapsto \omega(t) + \varepsilon\eta(t)$ vastaavan todennäköisyysmitan $\mathbf{P}_W^{\varepsilon\eta}$ oltava ekvivalentti Wiener-mitan $\mathbf{P}_W$ kanssa (siis $\mathbf{P}_W^{\varepsilon\eta}$:lla ja $\mathbf{P}_W$:llä on oltava samat nollajoukot). Muuten Wiener-integraalin

$$W(h)(\omega + \varepsilon\eta) = \int_0^1 h(t)\, d\left(\omega(t) + \varepsilon\eta(t)\right)$$

määritelmä on mieletön. Tämä johtaa siihen, että voimme derivoida vain tiettyihin suuntiin. Itse asiassa **Girsanovin lauseen** nojalla sallitut suunnat ovat muotoa

$$\eta(t) = \int_0^t \dot{\eta}(t)\, dt, \tag{3.2.1}$$

jollekin $\dot{\eta} \in L^2([0,1])$.

Tarkalleen ottaen (eräs) Girsanovin lause on seuraava.

3.2.2 Propositio. *Olkoon W Brownin liike ja A sellainen prosessi, että A_t on $\mathcal{F}_t^W$-mitallinen kaikilla $t \in [0,1]$. Tällöin prosessin $X := W + A$ jakauma $\mathbf{P}_X$ on ekvivalentti Wiener-mitan $\mathbf{P}_W$ kanssa jos ja vain jos*

(i) *prosessi A on muotoa*

$$A_t = \int_0^t \dot{A}_s\, ds,$$

(ii) *prosessi* M, *joka on määritelty kaavalla*

$$M_t \;=\; \exp\left\{-\int_0^t \dot{A}_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \dot{A}_s^2\, ds\right\},$$

on $\mathbf{F}^W$*-martingaali mitan* $\mathbf{P}_W$ *suhteen.*

Lisäksi, jos (i) ja (ii) pätevät, niin

$$M_t \;=\; \mathbf{E}\left[\frac{d\mathbf{P}_X}{d\mathbf{P}_W}\Big|\mathcal{F}_t^W\right].$$

3.2.3 Huomautus. Niiden funktioiden η avaruutta, jotka ovat muotoa (3.2.1) kutsutaan **Cameron–Martin-avaruudeksi** tai (Brownin liikkeen) **reprodusoivan ytimen Hilbert-avaruudeksi**. Joskus myös Girsanovin lausetta kutsutaan Cameron–Martin-lauseeksi, vaikka tarkkaan ottaen niillä onkin hienoinen ero.

Suunnattu derivaatta Wiener-avaruudessa määritellään nyt siis Cameron–Martin-suuntiin.

3.2.4 Määritelmä. Olkoon $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttuja ja olkoon

$$\eta(t) \;=\; \int_0^t \dot{\eta}(s)\, ds$$

jollekin $\dot{\eta} \in L^2([0,1])$. Tällöin F:llä on **suunnattu Malliavin-derivaatta $\mathbf{D}_\eta$** pisteessä $\omega \in C([0,1])$ suuntaan η jos raja-arvo

$$\mathbf{D}_\eta F(\omega) \;:=\; \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(\omega+\varepsilon\eta) - F(\omega)}{\varepsilon}$$

on olemassa avaruudessa $L^2(\Omega)$.

3.2.5 Esimerkki. Olkoon $h \in L^2([0,1])$ ja F Wiener-integraali

$$F(\omega) \;:=\; W(h)(\omega) \;=\; \int_0^1 h(t)\, d\omega(t).$$

Tällöin

$$
\begin{aligned}
F(\omega + \varepsilon\eta) &= \int_0^1 h(t)\, d\left(\omega(t) + \varepsilon\eta(t)\right) \\
&= \int_0^1 h(t)\, d\omega(t) + \varepsilon \int_0^1 h(t)\, d\eta(t) \\
&= \int_0^1 h(t)\, d\omega(t) + \varepsilon \int_0^1 h(t)\dot{\eta}(t)\, dt.
\end{aligned}
$$

Siten

$$
\frac{F(\omega + \varepsilon\eta) - F(\omega)}{\varepsilon} = \int_0^1 h(t)\dot{\eta}(t)\, dt.
$$

Siispä F on Malliavin-suuntaderivoituva kaikkiin Cameron–Martin-suuntiin ja

$$
\mathbf{D}_\eta F(\omega) = \mathbf{D}_\eta W(h)(\omega) = \langle h, \dot{\eta} \rangle_{L^2([0,1])}.
$$

Tätä esimerkkiä kannattaa verrata edellisen osion esimerkkiin 3.1.3.

Suuntaamaton Malliavin-derivaatta määritellään kaavan (3.1.7) Hilbert-analogialla.

3.2.6 Määritelmä. Olkoon satunnaismuuttujalla $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ suunnatut Malliavin-derivaatat kaikkiin Cameron–Martin-suuntiin kaikissa pisteissä $\omega \in C([0,1])$. Jos on olemassa sellainen prosessi $\psi \in L^2([0,1] \times \Omega)$, että

$$
\mathbf{D}_\eta F(\omega) = \int_0^1 \psi_t(\omega)\dot{\eta}(t)\, dt,
$$

niin sanomme, että F on **Malliavin-differentioituva**. Tällöin asetamme

$$
\mathbf{D}_t F(\omega) := \psi_t(\omega).
$$

Sanomme, että prosessi $\mathbf{D}F = (\mathbf{D}_t F)_{t\in[0,1]}$ on satunnaismuuttujan F **Malliavin-derivaatta**.

3.2.7 Esimerkki. Olkoon $h \in L^2([0,1])$. Esimerkin 3.2.5 nojalla Wiener-integraali $W(h)$ on Malliavin-derivoituva ja

$$
\mathbf{D}W(h)(\omega) = h.
$$

Erityisesti, jos asetamme $h = \mathbf{1}_{[0,\tau]}$, niin näemme että

$$\mathbf{D}_t W_\tau(\omega) \;=\; \mathbf{D}_t \omega(\tau) \;=\; \mathbf{1}_{[0,\tau]}(t)$$

Seuraava propositio mahdollistaa Malliavin-derivaatan yleisen, topologiasta riippumattoman, määritelmän.

3.2.8 Propositio. *Olkoon* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *polynomi eli muotoa*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n},$$

missä $m \in \mathbb{N}$ *ja* $a_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathbb{R}$. *Olkoot satunnaismuuttujat* $\theta_i : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *Wiener-integraaleja:*

$$\theta_i(\omega) \;=\; \int_0^1 h_i(t)\, d\omega(t),$$

jollakin $h_i \in L^2([0,1])$. *Tällöin satunnaismuuttuja*

$$F \;:=\; f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$$

on Malliavin-differentioituva ja

$$\mathbf{D}_t F(\omega) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(\theta_1(\omega), \ldots, \theta_n(\omega)\big) \cdot h_j(t).$$

Todistus. Koska

$$\sup_{t\in[0,1]} \mathbf{E}\Big[|W_t|^m\Big] \;<\; \infty$$

kaikilla $m \in \mathbb{N}$, niin voimme jatkossa vaihtaa rajankäyntiä turvallisin mielin. Nyt

$$\begin{aligned}
\theta_i(\omega + \varepsilon\eta) \;&=\; \int_0^1 h_i(t)\, d\,(\omega(t) + \varepsilon\eta(t)) \\
&=\; \int_0^1 h_i(t) d\omega(t) + \varepsilon \int_0^1 h_i(t)\dot{\eta}(t)\, dt \\
&=\; \theta_i(\omega) + \varepsilon \langle h_i, \dot{\eta} \rangle_{L^2([0,1])}.
\end{aligned}$$

Siten, jos $\langle\cdot,\cdot\rangle := \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2([0,1])}$, niin

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\Big\{F(\omega+\varepsilon\eta)-F(\omega)\Big\} \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\Big\{f\big(\theta_1(\omega)+\varepsilon\langle h_1,\dot\eta\rangle,\dots,\theta_n(\omega)+\varepsilon\langle h_n,\dot\eta\rangle\big)-f\big(\theta_1(\omega),\dots,\theta_n(\omega)\big)\Big\} \\
&\to \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\theta_1(\omega),\dots,\theta_n(\omega)\big)\cdot\langle h_i,\dot\eta\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\theta_1(\omega),\dots,\theta_n(\omega)\big)\cdot\mathbf{D}_\eta(\theta_i)(\omega).
\end{aligned}
$$

Merkitään

$$
\psi_t(\omega) := \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\big(\theta_1(\omega),\dots,\theta_n(\omega)\big)\cdot h_i(t).
$$

Koska

$$
\mathbf{D}_t\theta_i(\omega) = h_i(t),
$$

niin selvästi

$$
\mathbf{D}_\eta F(\omega) = \int_0^1 \psi_t(\omega)\dot\eta(t)\,dt.
$$

Siten $F = f(\theta_1,\dots,\theta_n)$ on Malliavin-differentioituva ja sen Malliavin-derivaatta on ψ. □

3.3 Yleinen gaussinen määrittely

Tässä osiossa määrittelemme Malliavin-derivaatan yleisesti ottamatta kantaa satunnaisavaruuden $\Omega = (\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ topologiseen rakenteeseen. Isonormaali prosessi W ei siis ole välttämättä valkoinen häly, eikä Hilbert-avaruus $H = (H,\langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ole välttämättä mikään L^2-avaruus (millään luonnollisella tulkinnalla; kaikki separoituvat Hilbert-avaruudethan ovat yksi ja sama ℓ^2).

3.3.1 Määritelmä. Olkoon $\mathcal{S}$ sellaisten satunnaismuuttujien F joukko, jotka ovat muotoa

$$F \;=\; f\big(W(h_1),\ldots,W(h_n)\big), \tag{3.3.2}$$

missä $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on polynomi ja $h_1,\ldots,h_n \in H$. Jos $F \in \mathcal{S}$, niin sanomme että F on **sileä satunnaismuuttuja** tai **Wiener-polynomi**.

Nimitys Wiener-polynomi johtuu siitä, että Brownin liikkeen tapauksessa $H = L^2([0,1])$ ja $W(h)$ on Wiener-integraali:

$$W(h) \;=\; \int_0^1 h(t)\,dW_t.$$

Siten Wiener-polynomi on polynomi, jonka argumentit ovat Wiener-integraaleja.

3.3.3 Huomautus. (i) Sileät satunnaismuuttujat $F \in \mathcal{S}$ ovat äärellisulotteisesti määriteltyjä. Itse asiassa kaava voidaan (3.3.2) voidaan tulkita niin, että

$$\begin{aligned} F &= f(n\text{-ulotteinen gaussinen satunnaismuuttuja}) \\ &= \tilde{f}(n\text{-ulotteinen standardoitu gaussinen satunnaismuuttuja}). \end{aligned}$$

Funktio $\tilde{f}$ muodostetaan funktiosta f ortogonalisoimalla gaussinen satunnaisvektori $(W(h_1),\ldots,W(h_n))$. Jätämme tämän Gram–Schmidt-ortogonalisoinnin yksityiskohdat harjoitustehtäväksi. Keskeisintä tässä huomiossa on kuitenkin, että voimme jatkossa olettaa satunnaismuuttujan $F \in \mathcal{S}$ olevan muotoa

$$F \;=\; f\big(W(e_1),\ldots,W(e_n)\big),$$

missä $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on polynomi ja $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ on avaruuden H ortonormaali kanta.

(ii) Eräässä mielessä sileät satunnaismuuttujat ovat “testisatunnaismuuttujia”, joiden avulla ääretönulotteinen analyysi palautetaan äärellisulotteiseen tapaukseen.

(iii) Sileät satunnaismuuttujat ovat hyvin integroituvia:

$$\mathcal{S} \subset L^{\infty-}(\Omega) := \bigcap_{p \geqslant 1} L^p(\Omega).$$

Lisäksi, koska polynomit muodostavat algebran, niin $\mathcal{S}$ on algebra.

Jos $F \in \mathcal{S}$, niin määrittelemme Malliavin-derivaatan ottamalla lähtökohdaksi edellisen osion proposition 3.2.8.

3.3.4 Määritelmä. Olkoon $F \in \mathcal{S}$ annettu kaavalla (3.3.2). Sen **Malliavin-derivaatta** on H-arvoinen satunnaismuuttuja DF, joka on annettu kaavalla

$$DF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), \dots, W(h_n)) \cdot h_i.$$

Määritelmä 3.3.4 on korrekti: se ei riipu mistään erityisestä F:n esityksestä (3.3.2).

3.3.5 Huomautus. (i) Jatkossa tulkitsemme H-arvoisen satunnaismuuttujan DF tyypillisesti avaruuden $L^2(\Omega; H)$ alkioksi ($L^2(\Omega; H)$ on niiden H-arvoisten satunnaismuuttujien u joukko, joille $\langle h, u\rangle_H \in L^2(\Omega)$ kaikilla $h \in H$). Itse asiassa jos $F \in \mathcal{S}$, niin

$$DF \in L^{\infty-}(\Omega; H) := \bigcap_{p \geqslant 1} L^p(\Omega; H).$$

Jos H voidaan tulkita funktioavaruuden $\mathbb{R}^T$ lineaariseksi aliavaruudeksi, niin voimme tulkita Malliavin-derivaatan DF stokastiseksi prosessiksi $(D_tF)_{t \in T}$. Tällöin nimittäin $L^2(\Omega; H) \simeq L^2(T \times \Omega)$ ja

$$D_tF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), \dots, W(h_n)) \cdot h_i(t).$$

(ii) Määritelmän 3.3.4 kannalta ei ole olennaista, että satunnaismuuttujan $F \in \mathcal{S}$ määritettelyssä (3.3.2) esiintyvä f on polynomi. Tärkeää on että f on sileä ja että satunnaismuuttuja F kuuluu avaruuteen $L^p(\Omega)$ jollakin (mieluiten kaikilla) $p \geqslant 1$ ja, että DF kuuluu tällöin avaruuteen $L^p(\Omega; H)$. Lisäksi on suotavaa, että $\mathcal{S}$ on algebra.

Malliavin-derivaatalla on tavallisen derivaatan luonnolliset ominaisuudet.

3.3.6 Propositio. *Olkoot* $F, G \in \mathcal{S}$ *ja* $a, b \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

(i) $aF + bG \in \mathcal{S}$ *ja*

$$D\left(aF + bG\right) = aDF + bDG,$$

(ii) $FG \in \mathcal{S}$ *ja*

$$D\left(FG\right) = FDG + GDF,$$

(iii) *jos* F *ei riipu* ω*:sta, niin* $DF = 0$.

(iv) *jos* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *on polynomi, niin* $g(F) \in \mathcal{S}$ *ja*

$$D(g(F)) = \frac{dg}{dx}(F)DF.$$

Todistus. Väitetyt ominaisuudet seuraavat tavallisen derivaatan vastaavista ominaisuuksista ja siitä, että $\mathcal{S}$ on algebra. Jätämme kohdat (i)–(iii) harjoitustehtäviksi ja esitämme kohdan (iv).

Lineaarisuuden nojalla voimme oletaa, että $g(x) = x^j$ jollakin $j \in \mathbb{N}$ ja että $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ joillakin $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$. Merkitsemme $\theta_i = W(h_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Selvästi $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on polynomi, joten $(g \circ f)(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathcal{S}$. Lisäksi jokaiselle $i = 1, \ldots, n$ pätee

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{k_i}{x_i} f(x_1, \ldots, x_n)$$

ja

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{jk_i}{x_i} f(x_1, \ldots, x_n)^j.$$

Siten, kun $F = f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, saamme

$$\begin{aligned} D(g(F)) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(\theta_1, \ldots, \theta_n) \cdot h_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{jk_i}{\theta_i} f(\theta_1, \ldots, \theta_n)^j \cdot h_i. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx}(F)DF &= jf(\theta_1,\dots,\theta_n)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{\theta_i}f(\theta_1,\dots,\theta_n)\cdot h_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{jk_i}{\theta_i}f(\theta_1,\dots,\theta_n)^j\cdot h_i \\ &= D(g(F)).\end{aligned}$$

Väite seuraa. □

Seuraava **osittaisintegrointikaava** on erityisen tärkeä jatkon kannalta. Sen avulla voimme laajentaa Malliavin-derivaatan määrittelyjoukkoa.

3.3.7 Lemma. *Olkoon* $F \in \mathcal{S}$ *ja* $h \in H$. *Tällöin*

$$\mathbf{E}\Big[\langle DF, h\rangle_H\Big] = \mathbf{E}\Big[FW(h)\Big]. \tag{3.3.8}$$

Todistus. Huomaamme aluksi, että voimme normeerata yhtälön (3.3.8) siten, että voimme olettaa että $\|h\|_H = 1$. Lisäksi voimme olettaa, että

$$F = f\big(W(e_1),\dots,W(e_n)\big),$$

missä $h = e_1$ ja $e_1,\dots,e_n$ ovat ortonormaaleja H:n alkioita.

Näillä oletuksilla

$$\begin{aligned}\langle DF, h\rangle_H &= \left\langle \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(W(e_1),\dots,W(e_n))\, e_i\,,\, e_1\right\rangle_H \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(W(e_1),\dots,W(e_n))\,\langle e_i, e_1\rangle_H \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(W(e_1),\dots,W(e_n)).\end{aligned}$$

Siten

$$\mathbf{E}\Big[\langle DF, h\rangle_H\Big] = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n)p^n(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n, \tag{3.3.9}$$

missä

$$p^n(x_1,\dots,x_n) \;:=\; p(x_1;0,1)\cdots p(x_n;0,1)$$

on standardi n-ulotteinen gaussinen tiheys.

Käyttämällä kaavaan (3.3.9) perinteistä osittaisintegrointikaavaa ja gaussisen tiheyden ominaisuutta

$$\frac{\partial p^n}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) \;=\; -x_i p^n(x_1,\dots,x_n)$$

saamme

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big[\langle DF,h\rangle_H\Big] &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n)p^n(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial p^n}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_n)x_1p^n(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n \\
&= \mathbf{E}\Big[FW(e_i)\Big].
\end{aligned}$$

Väite seuraa nyt muistamalla, että $e_1 = h$. □

Soveltamalla lemmaa 3.3.7 tuloon FG voimme osoittaa yleisemmän tuloksen, joka jo muistuttaakin hieman perinteistä osittaisintegrointikaavaa

$$FG \;=\; \int \Big(GF' + FG'\Big).$$

3.3.10 Lemma. *Olkoon* $F, G \in \mathcal{S}$ *ja* $h \in H$. *Tällöin*

$$\mathbf{E}\Big[FGW(h)\Big] \;=\; \mathbf{E}\Big[G\langle DF,h\rangle_H + F\langle DG,h\rangle_H\Big]. \tag{3.3.11}$$

Todistus. Väite seuraa osittaisintegrointikaavasta (3.3.8) ja tulon derivointisäännöstä $D(FG) = FDG + GDF$. Nimittäin

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big[FGW(h)\Big] &= \mathbf{E}\Big[\langle D(FG), h\rangle_H\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[\langle GDF + FDG, h\rangle_H\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[\langle GDF, h\rangle_H + \langle FDG, h\rangle_H\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[G\langle DF, h\rangle_H + F\langle DG, h\rangle_H\Big],
\end{aligned}$$

missä käytimme sisätulon $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ bilineaarisuutta (satunnaismuuttujat F ja G ovat H:ssa vakioita). □

3.3.12 Huomautus. Olkoon isonormaali prosessi W Brownin liike. Perustelemme osittaisintegrointikaavan (3.3.8) osion 3.2 kanonisessa avaruudessa. Olkoon $\dot\eta \in H = L^2(T)$ ja η sen Cameron–Martin-vastine:

$$\eta(t) = \int_0^t \dot\eta(s)\, ds.$$

Tällöin

$$\mathbf{E}\big[\langle DF, \dot\eta\rangle_H\big] = \mathbf{E}\big[\mathbf{D}_\eta F\big].$$

Olkoon sitten $\mathbf{P}_W^{-\varepsilon\eta}$ sellainen todennäköisyysmitta kanonisella avaruudella $\Omega = C([0,1])$, että kuvaus $t \mapsto \omega(t) - \varepsilon\eta(t)$ on Brownin liike. Tällöin

$$\int_\Omega F(\omega + \varepsilon\eta)\, \mathbf{P}_W(d\omega) = \int_\Omega F(\omega)\, \mathbf{P}_W^{-\varepsilon\eta}(d\omega).$$

Girsanovin lauseen (propositio 3.2.2) nojalla poikkeutetun ja tavallisen Wiener-mitan välinen Radon–Nikodym-derivaatta on

$$\frac{d\mathbf{P}_W^{-\varepsilon\eta}}{d\mathbf{P}_W}(\omega) = \exp\left\{\varepsilon\int_0^1 \dot\eta(t)\, d\omega(t) - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1 \dot\eta(t)^2\, dt\right\}.$$

Seuraavassa käytämme merkintää

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big[F(\omega + \varepsilon\eta)\Big]_{\varepsilon=0} := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(\omega + \varepsilon\eta) - F(\omega)}{\varepsilon},$$

minkä voi myös hyvin tulkita funktion $\varepsilon \mapsto F(\omega + \varepsilon\eta)$ tavalliseksi derivaataksi pisteessä nolla (niin kuin notaatio antaakin ymmärtää).

Vaihtelemalla todennäköisyysmittaa sekä odotusarvon ja derivoinnin järjestystä samme,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[\mathbf{D}_\eta F\big] &= \int_\Omega \frac{d}{d\varepsilon}\Big[F(\omega+\varepsilon\eta)\Big]_{\varepsilon=0} \mathbf{P}_W(d\omega) \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_\Omega F(\omega+\varepsilon\eta)\,\mathbf{P}_W(d\omega)\right]_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_\Omega F(\omega)\,\mathbf{P}_W^{-\varepsilon\eta}(d\omega)\right]_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_\Omega F(\omega)\,\frac{\mathbf{P}_W^{-\varepsilon\eta}}{\mathbf{P}_W}(\omega)\,\mathbf{P}_W(d\omega)\right]_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\left[\int_\Omega F(\omega)\exp\left\{\varepsilon\int_0^1 \dot\eta(t)d\omega(t) - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1 \dot\eta(t)^2 dt\right\}\mathbf{P}_W(d\omega)\right]_{\varepsilon=0} \\
&= \int_\Omega F(\omega)\frac{d}{d\varepsilon}\left[\exp\left\{\varepsilon\int_0^1 \dot\eta(t)d\omega(t) - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1 \dot\eta(t)^2 dt\right\}\right]_{\varepsilon=0}\mathbf{P}_W(d\omega) \\
&= \int_\Omega F(\omega)\left[\int_0^1 \dot\eta(t)\,d\omega(t)\right]\mathbf{P}_W(d\omega) \\
&= \mathbf{E}\big[FW(\dot\eta)\big].
\end{aligned}
$$

Tämä perustelu antaa vihjeen, miksi Malliavin-laskentaa kutsutaan myös stokastiseksi variaatiolaskennaksi.

Siirrymme nyt käsittelemään Malliavin-derivaatan määrittelyjoukon laajentamista.

Toistaiseksi

$$D : \mathcal{S} \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega; H),$$

missä $p \geqslant 1$. On totta, että $\mathcal{S}$ on avaruuden $L^p(\Omega)$ tiheä osajoukko. Emme silti voi laajentaa lineaarisesti operaattoria D jatkuvuuden nojalla koko avaruuteen $L^p(\Omega)$. Syy on ilmiselvä: operaattori D on rajoittamaton normissa $\|\cdot\|_p$. Rajoitetuksi D saadaan, kun valitsemme normiksi

$$\|F\|_{1,p} := \Big\{\mathbf{E}\big[|F|^p\big] + \mathbf{E}\big[\|DF\|_H^p\big]\Big\}^{1/p}.$$

Avaruus $\mathbb{D}^{1,p} = \mathbb{D}^{1,p}(\Omega)$ on Malliavin-derivaatan määrittelyjoukko $L^p(\Omega)$:ssa eli se on sileiden satunnaismuuttujien $\mathcal{S}$ sulkeuma normin $\|\cdot\|_{1,p}$ suhteen. Toisin sanoen $F \in \mathbb{D}^{1,p} \subset L^p(\Omega)$ jos ja vain jos voimme aproksimoida sitä $L^p(\Omega)$:ssa sellaisella jonolla $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ sileitä satunnaismuuttujia, että $(DF_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee avaruudessa $L^p(\Omega; H)$.

3.3.13 Huomautus. (i) Avaruus $\mathbb{D}^{1,p}$ on eräänlainen ääretönulotteinen Sobolev-avaruus sillä erotuksella, että emme voi puhua heikoista derivaatoista.

(ii) Avaruus $\mathbb{D}^{1,2}$ on Hilbert-avaruus, kun se varustetaan sisätulolla

$$\langle F, G\rangle_{1,2} := \mathbb{E}\big[FG\big] + \mathbb{E}\big[\langle DF, DG\rangle_H\big].$$

Jos $F \in \mathbb{D}^{1,p}$, niin on houkuttelevaa määritellä

$$DF := \lim_{n\to\infty} DF_n. \tag{3.3.14}$$

Periaatteessa meillä on kuitenkin seuraava ongelma: määritteleekö kaava (3.3.14) derivaatan DF yksikäsitteisesti. Toisin sanoen, onko D **sulkeutuva**. Meidät pelastaa lemma 3.3.7.

3.3.15 Propositio. *Malliavin-derivaatta on sulkeutuva operaattori avaruudelta* $L^p(\Omega)$ *avaruudelle* $L^p(\Omega; H)$ *kaikilla* $p \geqslant 1$. *Toisin sanoen, jos* $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ *on sellainen jono sileitä satunnaismuuttujia, että*

(i) $F_n \to 0$ *avaruudessa* $L^p(\Omega)$,

(ii) $(DF_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee avaruudessa* $L^p(\Omega; H)$,

niin $DF_n \to 0$ *avaruudessa* $L^p(\Omega; H)$.

Todistus. Merkitään

$$\eta := \lim_{n\to\infty} DF_n.$$

Olkoon $h \in H$ ja $G \in \mathcal{S}$. Koska $(DF_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee avaruudessa $L^p(\Omega; H)$ ja $G \in L^{\infty-}(\Omega)$ niin odotusarvon ja rajankäynnin vaihto on sallittua. Saamme

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big[\langle \eta, h\rangle_H G\Big] &= \mathbf{E}\Big[\Big\langle \lim_{n\to\infty} DF_n, h\Big\rangle_H G\Big] \\ &= \mathbf{E}\Big[\lim_{n\to\infty} \langle DF_n, h\rangle_H G\Big] \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\Big[\langle DF_n, h\rangle_H G\Big]\end{aligned}$$

Toisaalta osittaisintegrointikaavan (3.3.11) nojalla

$$\mathbf{E}\Big[\langle DF_n, h\rangle_H G\Big] = \mathbf{E}\Big[-F_n\langle DG, h\rangle_H + F_n G W(h)\Big].$$

Mutta

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\Big[-F_n\langle DG, h\rangle_H + F_n G W(h)\Big] = 0,$$

sillä $F_n \to 0$ avaruudessa $L^p(\Omega)$ ja $\langle DG, h\rangle_H$ ja $FW(h)$ kuuluvat avaruuteen $L^{\infty-}(\Omega)$. Siispä

$$\mathbf{E}\Big[\langle \eta, h\rangle_H G\Big] = 0$$

kaikilla $h \in H$ ja $G \in \mathcal{S}$. Koska $\mathcal{S} \subset L^p(\Omega)$ on tiheä, niin tästä seuraa, että $\langle \eta, h\rangle_H = 0$ kaikilla $h \in H$. Siten $\eta = 0$. □

Proposition 3.3.15 nojalla voimme siis laajentaa Malliavin-derivaatan yksikäsitteisesti avaruudelle $\mathbb{D}^{1,p}$ kaavalla (3.3.14).

Osittaisintegrointikaavat (3.3.8) ja (3.3.11) laajentuvat nyt satunnaismuuttujille $F \in \mathbb{D}^{1,p}$, $p \geqslant 1$. Jätämme todistukset harjoitustehtäväksi. Samoin proposition 3.3.6 kohdat (i) ja (iii) laajenevat välittömästi avaruuksiin $\mathbb{D}^{1,p}$ ja kohta (ii) laajenee, kun integroivuudesta pidetään huolta esimerkiksi vaatimalla, että $F, G \in \mathbb{D}^\infty$, missä

$$\mathbb{D}^\infty := \bigcap_{p\geqslant 1} \mathbb{D}^{1,p}.$$

Proposition 3.3.6 kohta (iv), ketjusääntö, ei ole aivan triviaali. Eräs tapa laajentaa ketjusääntöä on seuraava.

3.3.16 Propositio. *Olkoon* $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *jatkuvasti derivoituva funktio, jonka osittaisderivaatat ovat rajoitettuja. Olkoon* $p \geqslant 1$. *Olkoon* $F = (F^1, \ldots, F^m)$ *satunnaisvektori, jonka komponentit kuuluvat avaruuteen* $\mathbb{D}^{1,p}$. *Tällöin* $g(F)$ *kuuluu avaruuteen* $\mathbb{D}^{1,p}$ *ja*

$$D\big(g(F)\big) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i}(F) DF^i. \tag{3.3.17}$$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

3.3.18 Huomautus. Brownin liikkeen tapauksessa suunnattu Malliavin-derivaatta saatiin suuntaamattomasta derivaatasta kaavalla

$$\mathbf{D}_\eta F = \langle DF, \dot{\eta} \rangle_{L^2([0,1])}.$$

Tässä $\dot{\eta} \in L^2([0,1])$ ja η on sen Cameron–Martin-vastine

$$\eta(t) = \int_0^t \dot{\eta}(s)\, ds.$$

Yleisessä tapauksessa, missä $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ on jokin keskitetty jatkuva gaussinen prosessi, vastaava kaava on

$$D_\eta F = \langle DF, \hat{\eta} \rangle_H.$$

Tässä $\hat{\eta} \in H$ ja η on sen vastine niin sanotussa **reprodusoivan ytimen Hilbert-avaruudessa.** Tämä avaruus saadaan aikaiseksi samaistamalla $X_t \in \mathcal{H}_1$ isometrisesti funktion $K(t, \cdot)$ kanssa. Tässä siis K on kovarianssifunktio $K(t,s) = \mathbf{E}[X_t X_s]$.

Iteroitu Malliavin-derivaatta D^k määritellään formaalisti tensoroimalla

$$\text{“}\, D^k := D^{\otimes k} \,\text{”}.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että iteroitu Malliavin-derivaatta D^k kuvaa reaaliarvoiset satunnaismuuttujat $H^{\otimes k}$-arvoisiksi satunnaismuuttujiksi. Avaruus $H^{\otimes k}$ on myös Hilbert-avaruus. Itse asiassa se on tensoreiden $h = h_1 \otimes \cdots \otimes h_k$, $h' = h'_1 \otimes \cdots \otimes h'_k$, $h_i, h'_i \in H$, $i = 1, \ldots, k$, sulkeuma sisätulon

$$\langle h, h' \rangle_{\tilde{H}} := \prod_{i=1}^{k} \langle h_i, h'_i \rangle_H$$

suhteen. Nyt iteroitu Malliavin-derivaatta voidaan ajatella tavalliseksi Malliavin-derivaataksi, kun määrittelemme uuden isonormaalin gaussisen prosessin $\tilde{W}$ Hilbert-avaruuden

$$\tilde{H} := H^{\otimes k}$$

yli.

3.3.19 Esimerkki. Jos $H = L^2(T)$, niin $H^{\otimes k} \simeq L^2(T^k)$. Tällöin D^k voidaan tulkita pisteittäin $\mu \times \mathbf{P}$-melkein varmasti:

$$D^k_{t_1,\dots,t_k} F(\omega) = D_{t_1} \cdots D_{t_k} F(\omega)$$

Avaruuksia $\mathbb{D}^{1,p}$, $p \geqslant 1$, vastaavat iteroidussa tapauksessa Sobolev-avaruudet $\mathbb{D}^{k,p}$, $k \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$, jotka saadaan täydentämällä sileiden satunnaismuuttujien avaruus $\mathcal{S}$ normin

$$\|F\|_{k,p} := \left\{ \mathbf{E}\left[|F|^p\right] + \sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}\left[\|D^j F\|^p_{H^{\otimes j}} \right] \right\}^{1/p}$$

suhteen. Tässä siis varmistutaan, että jos D^k on olemassa avaruudessa $\mathbb{D}^{k,p}$, niin D^{k-1} on olemassa avaruudessa $\mathbb{D}^{k-1,p}$. Tämä takaa sen, että D^k voidaan ajatella iteroidusti ja derivointijärjestystä voidaan vaihdella.

3.3.20 Propositio. *Normit $\|\cdot\|_{k,p}$ toteuttavat seuraavat ominaisuudet:*

(i) $\|F\|_{k,p} \leqslant \|F\|_{j,q}$, *kun* $p \leqslant q$ *ja* $k \leqslant j$,

(ii) *operaattori* D^k *on sulkeutuva avaruudelta* $\mathcal{S} \subset L^p(\Omega)$ *avaruudelle* $L^p(\Omega; H^{\otimes k})$,

(iii) *jos jono* $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ *suppenee normissa* $\|\cdot\|_{k,p}$ *ja se on Cauchy normissa* $\|\cdot\|_{j,q}$, *niin se suppenee myös normissa* $\|\cdot\|_{j,q}$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Näin osion lopuksi on hyvä muistella edellistä osiota. Nimittäin tarkalleen ottaen meillä on nyt kaksi määritelmään Malliavin-derivaatalle: yleinen D ja Wiener-avaruuden $\mathbf{D}$. Seuraavan proposition nojalla nämä määritelmät ovat kuitenkin sopusoinnussa keskenään.

3.3.21 Propositio. *Olkoon W Brownin liike ja $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Olkoon lisäksi F Malliavin-differentioituva määritelmän 3.2.6 mielessä. Tällöin $\mathrm{D}F = \mathbf{D}F$.*

Todistus. Olkoon $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ jono sileitä satunnaismuuttujia, joka suppenee kohti satunnaismuuttujaa $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ normissa $\|\cdot\|_{1,2}$.

Olkoon $G \in \mathcal{S}$ mielivaltainen. Nyt osittaisintegrointikaavasta (3.3.11) seuraa, että

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[(\mathbf{D}_\eta F_n - \mathbf{D}_\eta F)G\big] &= \mathbb{E}\big[\mathbf{D}_\eta (F_n - F)G\big] \\
&= \mathbb{E}\left[\langle \mathbf{D}(F_n - F), \dot\eta\rangle_{L^2([0,1])} G\right] \\
&= \mathbb{E}\big[(F_n - F)GW(\dot\eta)\big] - \mathbb{E}\big[(F_n - F)\mathbf{D}_\eta G\big] \\
&\to 0.
\end{aligned}
$$

Tämä tarkoittaa, että $\mathbf{D}_\eta F_n \to \mathbf{D}_\eta F$ heikosti avaruudessa $L^2(\Omega)$, sillä $\mathcal{S}$ on avaruuden $L^2(\Omega)$ tiheä aliavaruus. Toisaalta $\mathrm{D}F_n \to \mathrm{D}F$ vahvasti avaruudessa $L^2([0,1] \times \Omega)$. Siten, kaikilla $\dot\eta \in L^2([0,1])$,

$$
\langle \mathrm{D}F_n, \dot\eta\rangle_{L^2([0,1])} \to \langle \mathrm{D}F, \dot\eta\rangle_{L^2([0,1])}
$$

heikosti (itse asiassa myös vahvasti) avaruudessa $L^2(\Omega)$. Proposition 3.2.8 ja määritelmän 3.3.4 nojalla jokaiselle aproksimaatiolle $n \in \mathbb{N}$ ja suunnalle $\dot\eta \in L^2([0,1])$ pätee

$$
\mathbf{D}_\eta F_n = \langle \mathbf{D}F_n, \dot\eta\rangle_{L^2([0,1])} = \langle \mathrm{D}F_n, \dot\eta\rangle_{L^2([0,1])}.
$$

Siten rajalla on välttämättä pädettävä

$$
\langle \mathbf{D}F, \dot\eta\rangle_{L^2([0,1])} = \langle \mathrm{D}F, \dot\eta\rangle_{L^2([0,1])}.
$$

Koska tämä pätee kaikille $\dot\eta \in L^2([0,1])$, niin $\mathbf{D}F = \mathrm{D}F$. □

3.4 Kaaoskehitelmän derivaatta

Tässä osiossa isonormaali prosessi W on valkoinen häly, taas. Erityisesti Malliavin-derivaatta on siis prosessi $(\mathrm{D}_t F)_{t\in T} \in L^p(\Omega; H) \simeq L^p(T \times \Omega)$ jollakin $p \geqslant 1$.

Wiener–Itô-kaaoskehitelmän (teoreema 2.3.11) nojalla jokainen neliöintegroituva satunnaismuuttuja $F \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ voidaan esittää muodossa

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m), \tag{3.4.1}$$

missä $f_m \in \tilde{L}^2(T^m) := \tilde{L}^2(T^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$. On luonnollista kysyä, mitä tulee vaatia funktioilta f_m, $m \geqslant 0$, jotta F olisi Malliavin-derivoituva. Seuraava luonnollinen kysymys on, voimmeko esittää F:n Malliavin-derivaatan sen kaaoskehitelmän (3.4.1) avulla. Seuraava teoreema antaa lopullisen vastauksen näihin kysymyksiin. Itse asiassa valkoisen hälyn tapauksessa se voidaan ottaa Malliavin-derivaatan määritelmäksi.

3.4.2 Teoreema. *Olkoon* $F \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$*, jonka kaaoskehitelmä on (3.4.1). Tällöin* $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ *jos ja vain jos*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\, m! \|f_m\|^2_{L^2(T^m)} < \infty. \tag{3.4.3}$$

Tällöin

$$D_t F = \sum_{m=1}^{\infty} m I_{m-1}\Big(f_m(\cdot, t)\Big). \tag{3.4.4}$$

Lisäksi DF*:n normi voidaan laskea kaavalla*

$$\mathbf{E}\left[\|DF\|_H^2\right] = \mathbf{E}\left[\int_T (D_t F)^2\, \mu(dt)\right] = \sum_{m=1}^{\infty} m\, m! \|f_m\|^2_{L^2(T^m)}.$$

Ennen teoreeman 3.4.2 todistusta valaisemme mitä se sanoo hiukan esimerkillä.

3.4.5 Esimerkki. Kaavan (3.4.4) sanoma itse asiassa aika selvä. Olkoon esimerkiksi $T = [0, 1]$ ja $F = I_3(f_3)$. Tällöin voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f_3(t_1, t_2, t_3)\, dW_{t_1} dW_{t_2} dW_{t_3} \\ &= 6 \int_0^1 \left\{ \int_0^{t_3} \left\{ \int_0^{t_2} f_3(t_1, t_2, t_3)\, dW_{t_1} \right\} dW_{t_2} \right\} dW_{t_3}. \end{aligned}$$

Satunnaismuuttujan F Malliavin-derivaatta saadaan nyt "vapauttamalla" uloin (tai symmetrian nojalla mikä hyvänsä) integrointi:

$$\begin{aligned} D_t F &= 6\int_0^1 \left\{ \int_0^{t_2} f_3(t_1, t_2, t)\, dW_{t_1} \right\} dW_{t_2} \\ &= 3\int_0^1 \int_0^1 f_3(t_1, t_2, t)\, dW_{t_1} dW_{t_2}. \end{aligned}$$

Teoreeman 3.4.2 todistus. Tämä todistus koostuu kolmesta askeleesta, kahdesta suorasta ja yhdestä käänteisestä.

Askel 1. Olkoon F muotoa

$$F = H_m(W(h)), \tag{3.4.6}$$

missä $h \in H = L^2(T^m)$ on sellainen, että $\|h\|_H = 1$. Koska H_m on polynomin, niin $F \in \mathcal{S}$. Siten, suoraan Malliavin-derivaatan määritelmän 3.3.4 ja Hermiten polynomeja koskevan kaavan (1.4.4) nojalla,

$$D_t F = \frac{\partial H_m}{\partial x}\big(W(h)\big)h(t) = H_{m-1}\big(W(h)\big)h(t).$$

Toisaalta, proposition 2.3.8 nojalla,

$$F = H_m(W(h)) = I_m(f_m),$$

missä $f_m = h^{\otimes m}/m!$. Siten

$$\begin{aligned} D_t F &= H_{m-1}\big(W(h)\big)h(t) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} I_{m-1}\left(h^{\otimes(m-1)}\right) h(t) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} I_{m-1}\left(h^{\otimes(m-1)} h(t)\right) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} I_{m-1}\Big(m! f_m(\cdot, t)\Big) \\ &= m I_{m-1}\Big(f_m(\cdot, t)\Big). \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Selvästi kaava (3.4.4) pätee nyt muotoa (3.4.6) olevien satunnaismuuttujien lineaarikombinaatioille. Siten kaaos $\mathcal{H}_m$ sisältyy avaruuteen $\mathbb{D}^{1,2}$. Itse asiassa kaavasta (3.4.7) seuraa $\mathcal{H}_m$:n satunnaismuuttujille isometria

$$\mathbf{E}\left[\|DF\|_H^2\right] = m\mathbf{E}\left[F^2\right].$$

Askel 2. Olkoon sitten $F \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$, jolla on esitys (3.4.1). Oletamme, että ehto (3.4.3) pätee. Olkoon

$$F_N := \sum_{m=0}^{N} I_m(f_m). \tag{3.4.8}$$

Mitä ilmeisimmin F_N suppenee kohti satunnaismuuttujaa F avaruudessa $L^2(\Omega)$. Askeleen 1 nojalla tiedämme, että jokainen F_N kuuluu avaruuteen $\mathbb{D}^{1,2}$ ja, että

$$D_t F_N = \sum_{m=1}^{N} m I_{m-1}\Big(f_m(\cdot, t)\Big).$$

Lisäksi ehto (3.4.3) takaa sen, että DF_N suppenee avaruudessa $L^2(T \times \Omega)$ kohti yhtälön (3.4.4) oikeaa puolta. Siten $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ ja kaava (3.4.4) pätee.

Askel 3. Tämä on se käänteinen askel. Olkoon $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Tarkoituksenamme on osoittaa, että F toteuttaa ehdon (3.4.3). Olkoon $G = I_n(g)$, missä $g \in \tilde{\mathcal{E}}_n$. Olkoon $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ ja F_N sen kaavan (3.4.8) mukainen aproksimaatio. Jos $N > n$, niin askelten 1 ja 2 nojalla

$$\mathbf{E}\Big[\langle DF_N, h\rangle_H\, G\Big] = \mathbf{E}\left[(n+1)I_n\left(\int_T f_{n+1}(\cdot, t)h(t)\,\mu(dt)\right) G\right].$$

Siten satunnaismuuttujan $\langle DF, h\rangle_H$ projektio Wiener-kaaokselle $\mathcal{H}_n$ on

$$(n+1)I_n\left(\int_T f_{n+1}(\cdot, t)h(t)\,\mu(dt)\right),$$

koska eri kertalukua olevat Wiener-integraalit ovat ortogonaalisia. Siten, jos $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ on $L^2(T)$:n ortonormaali kanta, niin

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} m\, m! \|f_m\|^2_{L^2(T^m)} \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(m I_{m-1}\left(\int_T f_m(\cdot,t)e_i(t)\,\mu(dt)\right)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\langle DF, e_i\rangle_H^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\|DF\|^2_{L^2(T\times\Omega)}\right] \\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

millä väite on todistettu. □

Mikäli satunnaismuuttuja F on "loputtomasti Malliavin-derivoituva", niin saamme kaaosfunktioille f_n, $n = 1, 2\ldots$, seuraavan tulkinnan.

3.4.9 Propositio. *Olkoon* $F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m)$. *Jos* $F \in \mathbb{D}^{\infty,2} := \cap_{N=1}^{\infty}\mathbb{D}^{N,2}$, *niin silloin pätee* ***Stroockin kaava***

$$
f_m(t_1,\ldots,t_m) = \frac{1}{m!}\mathbb{E}\left[D^m_{t_1,\ldots,t_m}F\right]
$$

kaikilla $m \in \mathbb{N}$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Tarkastelemme osion lopuksi Malliavin-derivaatan ehdollistamista, tai "mitallistamista". Yleisesti nimittäin on niin, että prosessi $(D_tF)_{t\in[0,1]}$ ei ole mitallinen valkoisen hälyn historian $\mathbf{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\in[0,1]}$ suhteen. Itse asiassa se harvemmin on. Olkoon esimerkiksi $F = W_1^k$ jollakin $k \geqslant 2$. Tällöin, ketjusäännön nojalla,

$$\begin{aligned} D_t F &= D_t\big(W_1^k\big) \\ &= k W_1^{k-1} D_t W_1 \\ &= k W_1^{k-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(t) \\ &= k W_1^{k-1}. \end{aligned}$$

Siten satunnaismuuttuja $D_t F$ ei ole mitallinen minkään σ-algebran $\mathcal{G}_t$, $t < 1$, suhteen.

Olkoon $B \in \mathcal{B}$. Tällöin $\mathcal{G}_B$ on satunnaismuuttujien

$$\{W(B') \,:\, B' \subset B, B' \in \mathcal{B}_0\}$$

virittämä σ-algebra, joka on täydellistetty nolla-joukkojen suhteen. Tällöin σ-algebra $\mathcal{G}_B$ vastaa siis tietoa valkoisen hälyn realisaatiosta joukossa B.

Ehdollistamisen ydin on seuraava lemma, joka kertoo miten ehdollistaminen näkyy Wiener–Itô-kaaoskehitelmässä.

3.4.10 Lemma. *Olkoon* $F \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$. *Olkoon sen kaaoskehtelmä*

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m),$$

missä $f_m \in \tilde{L}^2(T^m)$. *Olkoon* $B \in \mathcal{B}$. *Tällöin*

$$\mathbf{E}\big[F \,\big|\, \mathcal{G}_B\big] = \sum_{m=0}^{\infty} I_m\left(f_m \mathbf{1}_B^{\otimes m}\right). \tag{3.4.11}$$

Todistus. Ongelman lineaarisuuden nojalla riittää tarkastella tilannetta, jossa

$$F = I_m(f_m)$$

jollakin $m \in \mathbb{N}$. Lisäksi voimme olettaa, että f_m on muotoa

$$f_m = \mathbf{1}_A,$$

missä $A = A_1 \times \cdots \times A_m$ ja $A_1, \ldots, A_m$ ovat $\mathcal{B}_0$:n erillisiä joukkoja.

Nyt väite on helppo tarkistaa suoralla laskulla erottamalla $\mathcal{G}_B$-mitalliset ja $\mathcal{G}_B$-riippumattomat osat. Nimittäin

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[F \,\middle|\, \mathcal{G}_B\right] &= \mathbf{E}\left[W(A_1)\cdots W(A_m) \,\middle|\, \mathcal{G}_B\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{m}\Big(W(A_i\cap B)+W(A_i\cap B^c)\Big) \,\middle|\, \mathcal{G}_B\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{m} W(A_i\cap B) \,\middle|\, \mathcal{G}_B\right] + \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{m} W(A_i\cap B^c) \,\middle|\, \mathcal{G}_B\right] \\
&\quad + \text{ristitermejä, joissa esiintyy } B \text{ ja } B^c \\
&= \prod_{i=1}^{m} W(A_i\cap B) + \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{m} W(A_i\cap B^c)\right] \\
&= \prod_{i=1}^{m} W(A_i\cap B) + \prod_{i=1}^{m}\mathbf{E}\left[W(A_i\cap B^c)\right] \\
&= I_m\left(\mathbf{1}_{(A_1\cap B)\times\cdots\times(A_m\cap B)}\right) \\
&= I_m\left(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B^{\otimes m}\right).
\end{aligned}
$$

Kun avasimme tulon, jätimme ristitermit suosiolla pois. Ne nimittäin häviävät samalla tavalla, kuin joukkoon B^c liittyvä tulo:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[W(A_i\cap B)W(A_j\cap B^c) \,\middle|\, \mathcal{G}_B\right] &= W(A_i\cap B)\mathbf{E}\left[W(A_j\cap B^c) \,\middle|\, \mathcal{G}_B\right] \\
&= W(A_i\cap B)\mathbf{E}\left[W(A_j\cap B^c)\right] \\
&= W(A_i\cap B)\cdot 0.
\end{aligned}
$$

Väite seuraa. □

Ehdollisen odotusarvon Malliavin-derivaatta saadaan nyt yhdistämällä kaava (3.4.11) kaavaan (3.4.4).

3.4.12 Propositio. *Olkoon* $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ *ja* $B \in \mathcal{B}$. *Tällöin ehdollinen odotusarvo* $\mathbf{E}[F \mid \mathcal{G}_B]$ *kuuluu myös avaruuteen* $\mathbb{D}^{1,2}$ *ja*

$$D_t\Big(\mathbf{E}\big[F \mid \mathcal{G}_B\big]\Big) = \mathbf{E}\big[D_t F \mid \mathcal{G}_B\big]\mathbf{1}_B(t)$$

$\mu \times \mathbf{P}$*-melkein kaikilla* (t, ω).

Todistus. Olkoon F:llä kaaoskehitelmä

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m),$$

missä $f_m \in \tilde{L}^2(T^m)$. Lemman 3.4.10 ja teoreeman 3.4.2 nojalla

$$\begin{aligned}
D_t\Big(\mathbf{E}\big[F \mid \mathcal{G}_B\big]\Big) &= \sum_{m=1}^{\infty} m I_{m-1}\left(f_m(\cdot, t)\mathbf{1}_B^{\otimes m}(\cdot, t)\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m I_{m-1}\left(f_m(\cdot, t)\mathbf{1}_B^{\otimes(m-1)}\right)\mathbf{1}_B(t) \\
&= \mathbf{E}\big[D_t F \mid \mathcal{G}_B\big]\mathbf{1}_B(t).
\end{aligned}$$

Näin väite on todistettu. □

3.4.13 Huomautus. Proposition 3.4.12 nojalla $\mathcal{G}_B$-mitallisen satunnaismuuttujan $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ Malliavin-derivaatta $(t, \omega) \mapsto D_t F(\omega)$ häviää melkein kaikkialla joukossa $B^c \times \Omega$.

Luku 4

Divergenssi eli Skorohod-integraali

Divergenssioperaattori, jota myös Skorohod-integraaliksi kutsutaan, on Malliavin-derivaatan liitto-operaattori. Se siis kuvaa prosessit, tai yleisemmin H-arvoiset satunnaismuuttujat, reaaliarvoisiksi satunnaismuuttujiksi.

Osiossa 4.1 kertaamme liitto-operaattorin määritelmän ja joitakin sen perusominaisuuksia. Osiossa 4.2 annamme divergenssin varsinaisen määritelmän. Osio 4.3 käsittelee valkoista hälyä. Tässä osiossa perustelemme myös, miksi divergenssi ansaitsee nimen "integraali", ja miksi se ei ansaitse nimeä "integraali". Osio 4.4 on Grande Finale: johdamme lopulta motivoinnissa mainitun Clark–Ocone-esityslauseen.

4.1 Liitto-operaattoreista

Olkoot $X = (X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$ ja $Y = (Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ Hilbert-avaruuksia ja $T : \mathrm{Dom}\, T \subset X \to Y$ lineaarinen, mahdollisesti rajoittamaton, operaattori. Emme siis oleta, että T on määritelty koko avaruudessa X.

4.1.1 Huomautus. Selvästi voimme olettaa, että $\mathrm{Dom}\, T$ on lineaarinen (mahdollisesti ei-suljettu) aliavaruus.

Operaattorin T **liitto-operaattori** on lineaarinen, mahdollisesti rajoittamaton operaattori $T^* : \mathrm{Dom}\, T^* \subset Y \to X$. Se määräytyy parituskaavasta

$$\langle Tx, y\rangle_Y \;=\; \langle x, y^*\rangle_X \;=:\; \langle x, T^*y\rangle_X. \tag{4.1.2}$$

Luonnollisesti emme oleta, että T^* on määritelty koko avaruudessa Y.

4.1.3 Huomautus. Yleisesti, jos X ja Y ovat Banach-avaruuksia, niin liitto-operaattori T^* on kuvaus Y^*:n aliavaruudelta X^*:lle.

Parituskaavassa (4.1.2) on seuraava pienoinen ongelma: $y \in Y$ ei välttämättä määrää liitto-otustaan $y^* =: T^*y \in X$ yksikäsitteisesti. Toisin sanoen liitto-operaattori T^* ei ole välttämättä hyvin määritelty. Itse asiassa tilanne on seuraava.

4.1.4 Propositio. *Kaava (4.1.2) määrää operaattorin* $T^* : \mathrm{Dom}\, T^* \subset Y \to X$ *yksikäsitteisesti jos ja vain jos* $\mathrm{Dom}\, T \subset X$ *on tiheä.*

Todistus. Jos $\mathrm{Dom}\, T \subset X$ ei ole tiheä, niin se ei ole totaali. Siten on olemassa sellainen $x_0 \notin \mathrm{Dom}\, T$, että $x_0 \neq 0$ ja

$$\langle x, x_0\rangle_X \;=\; 0$$

jollakin $x \in \mathrm{Dom}\, T$. Mutta tällöin

$$\begin{aligned}
\langle Tx, y\rangle_Y &= \langle x, y^*\rangle_X \\
&= \langle x, y^*\rangle_X + \langle x, x_0\rangle_X \\
&= \langle x, y^* + x_0\rangle_X.
\end{aligned}$$

Siten liitto-otus y^* ei ole yksikäsitteinen.

Olkoon sitten $\mathrm{Dom}\, T$ tiheä. Se on siis totaali eli jos $\langle x, x_0\rangle_X = 0$ kaikilla $x \in \mathrm{Dom}\, T$, niin $x_0 = 0$. Siten, jos

$$\langle x, y_1^*\rangle_X \;=\; \langle x, y_2^*\rangle_X$$

kaikilla $x \in \mathrm{Dom}\, T$, niin

$$\langle x, y_1^* - y_2^*\rangle_X \;=\; 0$$

kaikilla $x \in \mathrm{Dom}\, T$. Mutta koska $\mathrm{Dom}\, T$ on totaali, niin tämä tarkoittaa sitä, että $y_1^* - y_2^* = 0$. Näin ollen suhde $y \leftrightarrow y^*$ on yksikäsitteinen. $\square$

Oletamme siis, että operaattori T on tiheästi määritelty, jolloin T^* on hyvin määritelty. Seuraava ongelma on karakterisoida jotenkin operaattorin T^* määrittelyjoukko $\operatorname{Dom} T^* \subset Y$. Vastauksen meille antaa Rieszin esityslause.

4.1.5 Propositio. *Alkio* $y \in \operatorname{Dom} T^*$ *jos on olemassa sellainen vakio* $c = c(y)$, *että*

$$\langle Tx, y\rangle_Y \leqslant c\|x\|_X \tag{4.1.6}$$

kaikilla $x \in \operatorname{Dom} T$.

Todistus. Olkoon $y \in Y$ sellainen, että epäyhtälö (4.1.6) pätee. Määrittelemme lineaarisen funktionaalin $T_y : X \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$T_y x := \langle Tx, y\rangle_Y.$$

Epäyhtälö (4.1.6) sanoo, että lineaarinen funktionaali T_y on jatkuva. Siten Rieszin esityslauseen nojalla on olemassa sellainen (yksikäsitteinen) $y^* \in X$, että

$$T_y x = \langle x, y^*\rangle_X.$$

Tämä $y^* \in X$ on siis alkion $y \in Y$ liitto-otus: $y^* = T^* y$. □

Juurikaan tämän enempää meidän ei tarvitse tietää liitto-operaattoreista. Tosin, jotta lukijalle jäisi jotain pientä tehtävää, toteamme vielä yhden seikan. (Muistutamme, että operaattori $T : X \to Y$ on **suljettu**, jos sen graafi $\{(x, Tx) : x \in \operatorname{Dom} T\}$ on suljettu avaruudessa $X \times Y$. Vastaavasti operaattori on **sulkeutuva**, jos sillä on yksikäsitteinen suljettu jatke eli operaattorin graafin sulkeuma on jonkin operaattorin graafi.)

4.1.7 Propositio. *Liitto-operaattorit ovat aina suljettuja.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

4.2 Divergenssi liitto-operaattorina

Määrittelemme nyt Skorohod-integraalin eli divergessin Malliavin-derivaatan liitto-operaattorina. Lähtökohtana on Hilbert-avaruuden $L^2(\Omega)$ Hilbert-aliavaruus $\mathbb{D}^{1,2}$ ja sen tiheä aliavaruus $\mathcal{S}$.

4.2.1 Määritelmä. Skorohod-integraali eli **divergenssi** δ on Malliavin-derivaatan D liitto-operaattori. Toisin sanoen se on rajoittamaton operaattori avaruudelta $L^2(\Omega; H)$ avaruudelle $L^2(\Omega)$, ja

(i) operaattorin δ määrittelyjoukkoon $\operatorname{Dom}\delta$ kuuluvat ne $u \in L^2(\Omega; H)$, jotka toteuttavat ehdon

$$\mathbf{E}\left[\langle DG, u\rangle_H\right] \leqslant c\sqrt{\mathbf{E}[G^2]} \tag{4.2.2}$$

kaikilla $G \in \mathcal{S}$. Tässä c on ainoastaan H-arvoisesta satunnaismuuttujasta u riippuva vakio.

(ii) Jos $u \in \operatorname{Dom}\delta$, niin $\delta(u) \in L^2(\Omega)$ ja se määräytyy **paritussuhteesta**

$$\mathbf{E}\left[G\delta(u)\right] = \mathbf{E}\left[\langle DG, u\rangle_H\right] \tag{4.2.3}$$

kaikilla $G \in \mathcal{S}$.

Jos $u \in \operatorname{Dom}\delta$, niin sanomme myös, että u on **Skorohod-integroituva**.

4.2.4 Huomautus. Olkoon g sileä kompaktikantajainen skalaarikenttä $\mathbb{R}^n$:llä ja $u = (u^1, \ldots, u^n)$ vastaavasti sileä vektorikenttä $\mathbb{R}^n$:llä. Tällöin Lebesgue-integraaleille $\mathbb{R}^n$:ssä pätee osittaisintegrointikaava

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g \operatorname{div} u \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} g \nabla \cdot u \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(g\frac{\partial u^1}{\partial x_1} + \cdots + g\frac{\partial u^n}{\partial x_n} \right) dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}u^1 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_n}u^n \right) dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla g \cdot u \, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla g, u\rangle_{\mathbb{R}^n} \, dx.
\end{aligned}$$

Vertaamalla tätä paritussuhteeseen (4.2.3) näemme, miksi operaattoria δ kutsutaan divergenssiksi (modulo miinus-merkki).

Joskus Skorohod-integraalille käytetään merkintää

$$\int u\,\delta W \;:=\; \delta(u).$$

Tämä merkintä antaa ymmärtää, että $\delta(u)$ on, nimensä mukaisesti, jonkinlainen integraali. Eräässä mielessä onkin perusteltua kutsua divergenssiä δ integraaliksi. Eräässä toisessa mielessä taas näin ei ole. Integraalinimityksen puolesta puhuu seuraava propositio, joka sanoo, että Skorohod-integraali on Wiener-integraalin laajennus.

4.2.5 Propositio. *Olkoon* $h \in H$. *Tällöin* $h \in \operatorname{Dom}\delta$ *ja*

$$\delta(h) \;=\; W(h).$$

Todistus. Jos h on Skorohod-integroituva, niin yhteys $\delta(h) = W(h)$ seuraa siitä, että tässä tapauksessa paritussuhde (4.2.3) on osittaisintegrointikaava (3.3.8). Toisaalta osittaisintegrointikaavasta (3.3.8) ja Schwarzin epäyhtälöstä seuraa kaikille $G \in \mathcal{S}$, että

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\big[\langle DG, h\rangle_H\big] &= \mathbf{E}\big[G W(h)\big] \\ &\leqslant \sqrt{\mathbf{E}[W(h)^2]}\sqrt{\mathbf{E}[G^2]} \\ &= \|h\|_H \sqrt{\mathbf{E}[G^2]}. \end{aligned}$$

Siten ehto (4.2.2) pätee eli $h \in \operatorname{Dom}\delta$. □

Seuraava propositio puhuu integraalinimitystä vastaan.

4.2.6 Propositio. *Olkoon* $u \in \operatorname{Dom}\delta$ *ja* $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. *Oletamme, että*

$$F\|u\|_H \;\in\; L^2(\Omega).$$

Tällöin

$$\delta(Fu) \;=\; F\delta(u) - \langle DF, u\rangle_H. \tag{4.2.7}$$

Kaava (4.2.7) tulee ymmärtää tässä niin, että tulo Fu *on Skorohod-integroituva jos ja vain jos* $F\delta(u) - \langle DF, u\rangle_H \in L^2(\Omega)$.

Ennen kun todistamme proposition 4.2.6 perustelemme, miksi se puhuu integraalinimitystä vastaan.

4.2.8 Esimerkki. Olkoon W Brownin liike. Tällöin siis $H = L^2([0,1])$. Olkoon sitten H-arvoinen satunnaismuuttuja u, eli tässä tapauksessa prosessi $(u_t)_{t\in[0,1]}$, yksinkertaisesti muotoa

$$u_t = Fh(t),$$

missä $F \in \mathcal{S}$ ja $h \in L^2([0,1])$. Mitä ilmeisimmin tällainen u on Skorohod-integroituva.

Integraali on lineaarinen operaattori. Tämänhän hyväksyvät kaikki.

Nyt, proposition 4.2.6 nojalla,

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_t\,\delta W_t &= \delta(u)\\ &= \delta\,(Fh)\\ &= FW(h) - \langle F, Dh\rangle_H\\ &= F\int_0^1 h(t)\,dW_t - \int_0^1 D_tF\,h(t)\,dt\\ &= F\int_0^1 h(t)\,\delta W_t - \int_0^1 D_tF\,h(t)\,dt.\end{aligned}$$

Jos sitten valitsemme

$$F \;:=\; \frac{1}{2}W_1^2,$$

niin

$$D_tF \;=\; W_1.$$

Oletamme, että h ei häviä integroitaessa. Tällöin saamme

$$\begin{aligned}\int_0^1 Fh(t)\,\delta W_t &= F\int_0^1 h(t)\,\delta W_t + \int_0^1 W_1 h(t)\,dt\\ &= F\int_0^1 h(t)\,\delta W_t + W_1\int_0^1 h(t)\,dt\\ &\neq F\int_0^1 h(t)\,\delta W_t\end{aligned}$$

Skorohod-integraali on siis kummallisen epälineaarinen ollakseen integraali.

Proposition 4.2.6 todistus. Kaava (4.2.7) seuraa, jos

$$\mathbf{E}\Big[G\delta(Fu)\Big] = \mathbf{E}\Big[G\big(F\delta(u) - \langle DF, u\rangle_H\big)\Big] \tag{4.2.9}$$

tiheän monella $G \in L^2(\Omega)$. Valitsemme satunnaismuuttujan G olemaan muotoa

$$G = f_0\big(W(h_1), \ldots, W(h_n)\big),$$

missä $h_i \in H$, $i = 1, \ldots, n$, ja $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on sileä ja kompaktikantajainen. Tällaiset G:t ovat tiheässä $L^2(\Omega)$:ssa. Lisäksi nyt $FG \in \mathbb{D}^{1,2}$ (tähän tarvittiin sitä, että f_0:lla on kompakti kantaja) ja tulon derivointikaava

$$D(FG) = FDG + GDF \tag{4.2.10}$$

pätee (harjoitustehtävä).

Kaava (4.2.9) seuraa nyt paritussuhteesta (4.2.3) ja tulon derviointisäännöstä (4.2.10). Nimittäin

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big[G\delta(Fu)\Big] &= \mathbf{E}\Big[\langle DG, Fu\rangle_H\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[\langle FDG, u\rangle_H\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[\langle D(FG) - GDF, u\rangle_H\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[\langle D(FG), u\rangle_H\Big] - \mathbf{E}\Big[\langle GDF, u\rangle_H\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[FG\delta(u)\Big] - \mathbf{E}\Big[G\langle DF, u\rangle_H\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[G\big(F\delta(u) - \langle DF, u\rangle_H\big)\Big].
\end{aligned}$$

Väite seuraa. □

Edellisen nojalla siis kenenkään ei tulisi kutsua Skorohod-integraalia “integraaliksi”. Integraalinimitys juontunee seuraavasta propositiosta, joka yleistää propositiota 4.2.5.

4.2.11 Propositio. *Olkoon* W *valkoinen häly. Tällöin* $L^2_a(T \times \Omega) \subset \operatorname{Dom}\delta$ *ja operaattorin* δ *rajoittuma avaruuteen* $L^2_a(T \times \Omega)$ *on Itô-Integraali:*

$$\begin{aligned}\delta(u) &= \int_T u_t\,\delta W_t \\ &= \int_T u_t\,dW_t\end{aligned}$$

Todistus. Tämä väite seuraa olennaisesti propositiosta 4.2.6 aproksimoimalla prosessia u ennustettavilla ja yksinkertaisilla prosesseilla. Jätämme yksityiskohdat harjoitustehtäväksi. □

Tunnetusti integrointi ja derivointi eivät ole täysin vaihdettavia operaattoreita (eivät kommutoi). Seuraava tulos sanoo, että

$$D\delta(u) = \delta(Du) + u.$$

Edellä Du tulkitaan formaalisti $H \otimes H$-arvoiseksi satunnaismuuttujaksi ja δ on yhtälön oikealla puolella formaali operaattori avaruudelta $H \otimes H$ avaruudelle H. Valkoisen häly tapauksessa edellinen formaali kaava saa ymmärrettävämmän muodon

$$D_t \int_T u_s\,\delta W_s = \int_T D_t u_s\,\delta W_s + u_t.$$

4.2.12 Propositio. *Olkoon* H*-arvoinen satunnaismuuttuja* u *"riittävän siisti". Tällöin kaikille* $h \in H$ *pätee*

$$\langle h, D\delta(u)\rangle_H = \delta(\langle h, D\langle u, \cdot\rangle_H\rangle_H) + \langle h, u\rangle_H. \tag{4.2.13}$$

Todistus. Jätämme kaavan (4.2.13) todistamisen harjoitustehtäväksi. Samoin jää harjoitustehtäväksi määritellä, mitä tarkoittaa "riittävän siisti". □

Kaavan (4.2.13) avulla voimme laskea divergenssien kovariansseja.

4.2.14 Propositio. *Olkoon* u *ja* v *"riittävän siistejä"* H*-arvoisia satunnaismuuttujia. Tällöin*

$$\mathbf{E}\left[\delta(u)\delta(v)\right] = \mathbf{E}\left[\langle u, v\rangle_H\right] + \mathbf{E}\left[\langle Du, Dv\rangle_{H\otimes H}\right].$$

Todistus. Tämä väite seuraa propositiosta 4.2.12 ja paritussuhteesta (4.2.3). Jätämme yksityiskohdat harjoitustehtäväksi. □

4.3 Kaaoskehitelmän divergenssi

Tässä osiossa W on taas valkoinen häly. Toisin sanoen $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$.

Satunnaismuuttujalle $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ osasimme laskea sen Malliavin-derivaatan DF sen kaaoskehitelmän

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m)$$

avulla. Lisäksi osasimme antaa riittävän ja välttämättömän ehdon Malliavin-derivoituvuudelle kaaoskehitelmän avulla. Tarkastelemme nyt vastaavaa ongelmaa prosessin $u \in L^2(T \times \Omega)$ divergenssille $\delta(u)$.

4.3.1 Lemma. *Olkoon* $u \in L^2(T \times \Omega)$. *Tällöin jokaiselle* $t \in T$ *on olemassa sellaiset deterministiset funktiot* $f_m(\,\cdot\,, t) \in L^2(T^m)$, $m = 0, 1, \ldots$, *että*

$$u_t = \sum_{m=0}^{\infty} I_m\big(f_m(\,\cdot\,, t)\big). \tag{4.3.2}$$

Sarja (4.3.2) suppenee avaruudessa $L^2(T \times \Omega)$ *ja lisäksi*

$$\mathbb{E}\left[\int_T u_t^2\, \mu(dt)\right] = \sum_{m=0}^{\infty} m!\|f_m\|^2_{L^2(T^{m+1})}.$$

Todistus. Koska satunnaismuuttuja $u_t \in L^2(\Omega)$ kaikilla $t \in T$, niin voimme kehittää sen sarjaksi (4.3.2). Meidän pitää vain osoittaa, että ytimet $f_m(\cdot, \cdot)$, $m = 0, 1, \ldots$, voidaan valita mitallisiksi ja että sarja (4.3.2) suppenee avaruudessa $L^2(T \times \Omega)$.

Aproksimoimme prosessia u yksinkertaisilla prosesseilla u^n, $n = 1, 2 \ldots$, jotka ovat muotoa

$$u_t^n = \sum_{k=1}^{m_n} F_{kn} g_{kn}(t),$$

missä $g_{kn} \in L^2(T)$ ja $F_{kn} \in L^2(\Omega)$. Tällöin jokaiselle u^n:lle meillä on esitys

$$u_t^n = \sum_{m=0}^{\infty} I_m\big(f_{mn}(\,\cdot\,, t)\big),$$

missä funktioilla f_{nm} on halutut ominaisuudet. Lopuksi riittää huomata, että jono $(f_{mn})_{n=1}^{\infty}$ suppenee avaruudessa $L^2(T^{m+1})$ kaikilla $m = 0, 1 \ldots$. Voimme siis asettaa $f_m := \lim_{n\to\infty} f_{mn}$ ja väite seuraa. □

Valkoisen häly tapauksessa seuraava teoreema antaa vaihtoehtoisen määritelmän Skorohod-integraalille.

4.3.3 Teoreema. *Olkoon* $u \in L^2(T \times \Omega)$ *sarjakehitelmänään (4.3.2). Tällöin* $u \in \mathrm{Dom}\,\delta$ *jos ja vain jos sarja*

$$\delta(u) = \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+1}(\tilde{f}_m) \tag{4.3.4}$$

suppenee avaruudessa $L^2(\Omega)$.

Erityisesti $u \in \mathrm{Dom}\,\delta$ *jos ja vain jos*

$$\mathbf{E}\left[\delta(u)^2\right] = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)! \left\|\tilde{f}_m\right\|^2_{L^2(T^{m+1})} < \infty.$$

4.3.5 Huomautus. Kaavan (4.3.4) intuitiivinen merkitys tulee täysin selväksi, kun sitä vertaa esimerkkiin 3.4.5.

Teoreeman 4.3.3 todistuksen hahmottelu. Tämä on semmoinen isompi harjoitustehtävä. Todistus perustuu kaavaan

$$\mathbf{E}\Big[\langle u, DG\rangle_H\Big] = \mathbf{E}\Big[I_n(\tilde{f}_{n-1})G\Big],$$

kun $G = I_n(g)$, mistä seuraa että

$$\mathbf{E}\Big[\delta(u)G\Big] = \mathbf{E}\Big[I_n(\tilde{f}_{n-1})G\Big].$$

Tämä taas tarkoitaa sitä, että $\delta(u)$:n projektio Wiener-kaaokselle $\mathcal{H}_n$ on $I_n(\tilde{f}_{n-1})$. Kaava (4.3.4) seuraa tästä. □

4.4 Clark–Ocone-esityslause

Tässä se nyt sitten on koko komeudessaan. Hyvä yleisö: **Clark–Ocone-esityslause**!

4.4.1 Teoreema. *Olkoon* $W = (W_t)_{t\in[0,1]}$ *Brownin liike ja* $F \in \mathbb{D}^{1,2}$*. Tällöin*

$$F \;=\; \mathbf{E}[F] + \int_0^1 \mathbf{E}\left[D_t F \,\middle|\, \mathcal{G}_t\right] dW_t. \tag{4.4.2}$$

Lisäksi esitys (4.4.2) on yksikäsitteinen.

Todistus. Olkoon F:llä Wiener–Itô-kaaoskehitelmä

$$F \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m),$$

missä $f \in \tilde{L}^2([0,1]^m)$. Kaavojen (3.4.4) ja (3.4.11) nojalla

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[D_t F \,\middle|\, \mathcal{G}_t\right] &= \sum_{m=1}^{\infty} m\mathbf{E}\left[I_{m-1}\big(f_m(\,\cdot\,,t)\big) \,\middle|\, \mathcal{G}_t\right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} mI_{m-1}\big(f_m(\,\cdot\,,t)\big)\mathbf{1}_{\left\{\max(\cdot)\leqslant t\right\}}. \end{aligned}$$

Olkoon sitten

$$u_t \;:=\; \mathbf{E}\left[D_t F \,\middle|\, \mathcal{G}_t\right].$$

Prosessin u Skorohod-integraali $\delta(u)$ on nyt helppo laskea kaavasta (4.3.4). Saamme

$$\begin{aligned} \delta(u) &= \sum_{m=1}^{\infty} I_m(f_m) \\ &= F - \mathbf{E}[F]. \end{aligned}$$

Esitys seuraa nyt siitä, että koska u_t on $\mathcal{G}_t$-mitallinen, niin $\delta(u)$ on Itô-integraali. Esityksen yksikäsitteisyys taas seuraa kaaoskehitelmä yksikäsitteisyydestä. $\square$

Hakemisto

D, Malliavin-derivaatta, 56
D^k, iteroitu Malliavin-derivaata, 64
H_n, n. Hermiten polynomi, 18
L^2_a, neliöintegroituvat sopivat prosessit, 40
W, isonormaali gaussinen prosessi, valkoinen häly, Brownin liike, 8
$\mathbb{D}^\infty$, joukkojen $\mathbb{D}^{1,p}$, $p \geqslant 1$, leikkaus, 63
$\mathbb{D}^{\infty,2}$, loputtomasti Malliavin-dervoituvat satunnaismuuttujat, 70
Λ, multi-indeksien joukko, 25
δ, Skorohod-integraali eli divergenssi, 77
γ, gaussinen mitta, 1
$\mathbb{D}^{1,p}$, Malliavin-derivaatan määrittelyjoukko L^p:ssä, 62
$\mathbf{D}$, Malliavin-derivaatta (jotakuinkin), 52
$\mathcal{E}_a$, yksinkertaisten ennustettavien prosessien joukko, 39
$\mathcal{E}_m$, yksinkertaisten funktioiden joukko, 27
$\mathcal{G}$, isonormaali σ-algebra, 12
$\mathcal{H}_1$, lineaarinen avaruus, ensimmäinen kaaos, 9
$\mathcal{H}_n$, n:s kaaos, 23
$\mathcal{S}$, sileät satunnaismuuttujat eli Wiener-polynomit, 55
$\mathfrak{E}$, stokastinen eksponentti, 41
$\mathrm{Dom}\delta$, Skorohod-integraalin määrittelyjoukko, 77
$\otimes$, tensoritulo, 33
$\otimes_r$, supistettu tensoritulo, 33
$\tilde{\otimes}$, symmetrinen tensoritulo, 33
$\tilde{\otimes}_r$, symmetrinen supistettu tensoritulo, 33
$n!!$, pariton kertoma, 2
p, gaussinen tiheysfunktio, 1

abstrakti kaaoskehitelmä, 24

Banach-avaruus, 5
Brownin
  lakana, 17
  liike, 12

Cameron–Martin-avaruus, 51
Clark–Ocone-esityslause, 84

differentioiutuvuus, 45
divergenssi, 77

ensimmäinen kaaos, 9

Fréchet-differentioituvuus, 47

Gâteaux-derivaatta, 45
Girsanovin lause, 50

heikko suppeneminen, 5

Hermiten polynomi, 18
    yleistetty, 25
Hilbert-avaruus, 6
historia, 14
    sisäinen, 14

isonormaali σ-algebra, 12
isonormaali gaussinen prosessi, 8
Itô–Clark-esityslause, 41
Itôn isometria, 40
Itôn kaava, 40
iteroitu Malliavin-derivaatta, 64

kaaos, 23
    ensimmäinen, 9
kaaoskehitelmä
    abstrakti, 24
    Wiener–Itô, 37
karakteristinen
    funktio, 2
    funktionaali, 6
keskitetty satunnaismuuttuja, 2
kontrollimitta, 16

liitto-operaattori, 75
lineaarinen avaruus, 9

Malliavin-derivaatta, 56
    iteroitu, 64
    jotakuinkin, 52
martingaali, 14
martingaalikonvergenssilause, 21
momenttigeneroiva funktio, 3
multi-indeksi, 25

ortogonaalinen summaesitys, 23
osittaisintegrointikaava, 58

paritussuhde, 77

Parsevalin kaava, 8

reprodusoivan ytimen Hilbert-avaruus, 51, 64
Rieszin esityslause, 6
riippumattomat lisäykset, 14
Rodriguezin kaava, 17

sileä satunnaismuuttuja, 55
sisäinen historia, 14
Skorohod-integraali, 77
standardoitu satunnaismuuttuja, 4
stationaariset lisäykset, 15
stokastinen eksponentti, 41
Stroockin kaava, 70
suljettu operaattori, 76
sulkeutuva operaattori, 62, 76
supistettu tensoritulo, 33
suppeneminen
    heikko, 5
    vahva, 5
suunnattu derivaatta, 44
suunnikassääntö, 6
symmetrinen tensoritulo, 33
symmetrisaatio, 28

tasainen integroituvuus, 22
tensoripotenssi, 33
tensoritulo, 33
    supistettu, 33
    symmetrinen, 33
topologinen duaali, 5
totaali joukko, 21

vahva suppeneminen, 5
valkoinen häly, 16

Wiener–Itô-kaaoskehitelmä, 37
Wiener-avaruus, 49

Wiener-mitta, 48
Wiener-polynomi, 55

yksinkertainen
ennustettava prosessi, 39
funktio, 27
yleistetty Hermiten polynomi, 25