Moniarvologiikka ja sumea logiikka. Viikkotehtävät keväällä 2008

Useimmilla loogisilla järjestelmillä on ominaisuus, että jos lauseen α totuusarvo on a, niin α:n 'epätotuuden arvo' on a:n komplementti eli a^* ; Lukasiewicz'in moniarvologiikassa esimerkiksi $a^* = 1 - a$ (josta Boolen logiikka on erikoistapaus, saahan a siinä vain arvot 0 tai 1). Kaikissa sovelluksissa tämä ei kuitenkaan ole riittävää; ajatellaan esimerkkinä oikeussalia, jossa esitetään todistusaineistoa ja –lausuntoja sekä syytetyn puolesta että häntä vastaan. Jos kaikki puhuu syytetyn puolesta, on hän syytön, jos taas kaikki puhuu syytettyä vastaan, on hän ilmeisesti syyllinen. Jos osa aineistosta on syytettyä vastaan ja osa puolesta, on aineisto ristiriitaista. On myös mahdollista, ettei aineistoa yksinkertaisesti ole, ei puolesta eikä vastaan. Belnap määritteli vuonna 1977 tällaisia sovelluksia silmällä pitäen neliarvoisen logiikan, jonka jatkuvaa yleistystä nyt käsittelemme.

Olkoon meillä lauselogiikka, jonka hyvin määritellyt lauseet ovat 'ne jokaisella logiikan peruskurssilla määritellyt'. Liitetään lauseeseen α kaksi arvoa x ('puolesta') ja y ('vastaan') siten, että arvot $x,y \in [0,1]$ ovat toisistaan riippumattomia ja määritellään 2x2 matriisi (*evidenssimatriisi*)

$$(1)\quad \mathrm{v}(\alpha) = \begin{pmatrix} \min\{x^*, y\} & x \otimes y \\ x^* \otimes y^* & \min\{x, y^*\} \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} f & k \\ u & t \end{pmatrix}\right),$$

missä $x^* = 1 - x$ (eli Lukasiewicz negaatio) ja $x \otimes y = \max\{x + y - 1, 0\}$ (eli Lukasiewicz tulo). Sanotaan, että

- t on lauseen α *totuuden aste (truth)*,
- f on lauseen α *epätotuuden aste (falsehood)*,
- k on lauseen α *ristiriitaisuuden aste (contradictioness)*,
- u on lauseen α *tuntematttomuuden aste (unknowness)*.

Tehtävä 1. Kirjoita vastaavat neljä matriisia, kun $x,y \in \{0,1\}$. Nämä ovat alkuperäiset Belnapin matriisit, joita merkitään T (*true*), F (*false*), K (*contradictory*), ja U (*unknown*). Millä 0:n ja 1:n kombinaatioilla kukin niistä saadaan? (max 6p)

Tehtävä 2. Todista, että $\min\{k,u\} = 0$ riippumatta arvoista x ja y. (max 6p)

Tehtävä 3. Jos x,y sekä a,b ovat kaksi arvoparia siten, että niiden määräämät evidenssimatriisit ovat samat, niin todista, että $x = a$ ja $y = b$. (Vihje: todista ensin, että $a \otimes b \le 0$ *joss* $a \le b^*$. Käytä sitten tätä ja Tehtävän 2 tulosta.) (max 12p).

Tehtävä 4. Todista, että $f + k + u + t = 1$ riippumatta arvoista x ja y. (max 6p)

Tehtävä 5. Merkitään evidenssimatrisien joukkoa symbolilla M. Jos x,y sekä a,b määräävät matriisit M, N∈ M, määritellään relaatio R ehdolla

(2) NRM jos $a \le x$ ja $y \le b$.

Osoita, että R on järjestysrelaatio (ts. refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen) joukossa M. (max 6p).

Tehtävä 6. Joukkoon M voidaan lisäksi tuoda residuoitu hilarakenne määrittelemällä tarvittavat residuoidun hilan operaatiot. Esimerkiksi asettamalla

$$\begin{pmatrix} \min\{x^*, y\} & x \otimes y \\ x^* \otimes y^* & \min\{x, y^*\} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \min\{a^*, b\} & a \otimes b \\ a^* \otimes b^* & \min\{a, b^*\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \min\{(a \otimes x)^*, (b \oplus y)\} & (a \otimes x) \otimes (b \oplus y) \\ (a \otimes x)^* \otimes (b \oplus y)^* & \min\{(a \otimes x), (b \oplus y)^*\} \end{pmatrix},$$

missä $b \oplus y = \min\{b + y, 1\}$ (eli Lukasiewicz summa) saadaan joukosta M kommutatiivinen monoidi, jonka neutraalialkio T on määritelty arvoparilla 1 (’puolesta’) ja 0 (’vastaan’). Miten pitää määritellä kahden alkion M, N ($\in$ M) suurin alaraja, ts. mitä on sup{M,N} relaation R suhteen? (max 12p).

Tehävä 7. Erään kuvitteellisen yliopison matematiikan laitoksen kahvikassa varastettiin pikkujoulujuhlan aikana, ja kun henkilökunnasta kukaan ei johtajan uhkailu- ja kiristysyrityksistä huolimatta tunnustanut (olivat kai jo niin tottuneita), päätettiin panna pystyyn selvityskomitea. Aikansa asiaa tutkittuaan komitea tuli siihen tulokseen, että syylliskandidaatteja oli kolme: viinaanmenevä labrainssi A, huikentelevaisesta elämäntavastaan tunnettu professori B ja epämääräisiä miestuttavuuksia viljelevä laitossihteeri C. Evidenssi heidän syyttömyytensä puolesta ja syyttömyyttään vastaan skaalattiin välille [0,1] seuraavasti: A:lle (0.6 , 0.4), B:lle (0.8 , 0.9) ja C:lle (0.3 , 0.2). Komitea laski jokaiselle epäillylle tällä perusteella evidenssimatriisin, ja päätyi syyttämään yhtä epäillyistä. Tuloksen kuultuaan epäilty murtui ja tunnusti kaiken. Kuka oli syyllinen ja miten komitea hänen kannalleen päätyi? (max 12 p).