Kompleksianalyysi (2009)

Harjoitus 5/viikko 7

1. a) Muodosta funktion $f(z) = e^z \sin z$ Taylorin sarja pisteessä $z = 0$.
b) Laske $\oint_C \frac{1}{e^z \sin z}\, dz$, kun $C = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \,\}$ on suunnistettu vastapäivään.

2. a) Muodosta funktion $f(z) = \sin^2 z$ Taylorin sarja pisteessä $z = 0$.
b) Laske $\oint_C z^3 \sin^2 z^{-1}\, dz$, kun $C = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \,\}$ on suunnistettu vastapäivään.

3. Laske $\oint_C \dfrac{\tan z}{z^2 - 1}\, dz$, kun $C = \{\, z \in \mathbb{C} : |z - 3/2| = 1 \,\}$ on suunnistettu vastapäivään.

4. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Laske $\oint_C \tan(\pi z)\, dz$, kun $C = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| = n \,\}$ on suunnistettu vastapäivään. Sovella residy-lausetta.

5. Laske sijoituksella $z = e^{ix}$ integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 - 2\cos x + \sin x}.$$

6. Laske residy-lauseen avulla integraali:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}.$$

7. Laske residy-lauseen avulla integraali:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5}\, dx.$$

Complex Analysis (2009)

Exercise 5/Week 7

1. a) Find the Taylor series of $f(z) = e^z \sin z$ at $z = 0$.
b) Integrate $\oint_C \frac{1}{e^z \sin z}\,dz$ counterclockwise around $C = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \,\}$.

2. a) Find the Taylor series of $f(z) = \sin^2 z$ at $z = 0$.
b) Integrate $\oint_C z^3 \sin^2 z^{-1}\,dz$ counterclockwise around $C = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \,\}$.

3. Integrate $\oint_C \dfrac{\tan z}{z^2 - 1}\,dz$ counterclockwise around $C = \{\, z \in \mathbb{C} : |z - 3/2| = 1 \,\}$.

4. Let $n \in \mathbb{N}$. Integrate $\oint_C \tan(\pi z)\,dz$ counterclockwise around $C = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| = n \,\}$. Apply the residue theorem.

5. Evaluate the integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 - 2\cos x + \sin x},$$

by using the substitution $z = e^{ix}$.

6. With the aid of the residue theorem evaluate the following integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}.$$

7. With the aid of the residue theorem evaluate the following integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5}\,dx.$$