

Kompleksianalyysi (2009)

Harjoitus 4/viikko 6

1. Laske Cauchy'n integraalikaavan avulla $\oint_C \frac{e^z}{z^2 + z} dz$, kun $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ on suunnistettu vastapäivään.
2. Laske $\oint_C \frac{z}{z^4 - 1} dz$, kun
 - a) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$;
 - b) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| = 1\}$;
 - c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| = \frac{3}{2}\}$;ja C on suunnistettu vastapäivään.
3. Laske $\oint_C \frac{\sin z}{(\pi - z)^3} dz$, kun $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - \pi| = 1\}$ on suunnistettu vastapäivään.
4. Suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{i}{2}\right)^n$?
5. Selvitä potenssisarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} (z-i)^n$ suppenemissäde.
6. Kehitä funktio $f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}$ potenssisarjaksi kehityskeskuksena origo. Mikä on kyseisen sarjan suppenemissäde? *Vihje:* Osamurtokehitelmä.
7. Muodosta Laurent-sarja funktiolle $f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 - 3z + 2}$ alueessa $1 < |z| < 2$. *Vihje:* Osamurtokehitelmä.

Complex Analysis (2009)

Exercise 4/Week 6

1. Using Cauchy's integral formula integrate $\oint_C \frac{e^z}{z^2 + z} dz$ counterclockwise around $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$.
2. Integrate counterclockwise $\oint_C \frac{z}{z^4 - 1} dz$ with
 - a) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$;
 - b) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| = 1\}$;
 - c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| = \frac{3}{2}\}$.
3. Integrate counterclockwise $\oint_C \frac{\sin z}{(\pi - z)^3} dz$ with $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - \pi| = 1\}$.
4. Is the series $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{i}{2}\right)^n$ convergent?
5. Determine the radius of convergence of the power series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} (z - i)^n$.
6. Develop the function $f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}$ in a power series with center $z_0 = 0$. What is the radius of convergence of this power series? *Hint:* Use partial fractions.
7. Expand $f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 - 3z + 2}$ in a Laurent series valid for $1 < |z| < 2$. *Hint:* Use partial fractions.