Kompleksianalyysi (2009)

Harjoitus 3/viikko 5

1. Osoita, että jos $f'(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$, niin $f(z)$ on vakiofunktio.

2. Olkoon f analyyttinen $\forall z \in \mathbb{C}$. Osoita, että jos $\operatorname{Re} f(z)$ on vakiofunktio, niin myös $f(z)$ on vakiofunktio.

3. Laske käyräintegraali $\int_0^{1+2i} \operatorname{Im} z \, dz$
a) pitkin yhdysjanaa $0 \to 1 + 2i$,
b) pitkin janoja $0 \to 1$ ja $1 \to 1 + 2i$.

4. Laske $\oint_C z^m \, dz$, kun $m \in \mathbb{Z}$ ja C on yksikköympyrän kehä suunnistettuna vastapäivään.

5. Laske käyräintegraali $\int_{-i}^{i} \frac{1}{z} \, dz$
a) yhdistämällä pisteet $-i$ ja i origokeskisellä ympyrän kaarella,
b) integraalifunktion avulla.

6. Laske $\oint_C \dfrac{z^2}{z-i} \, dz$, kun $C = \{ z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1 \}$ on suunnistettu vastapäivään käyttämällä
a) C:lle parametriesitystä,
b) Cauchy'n integraalikaavaa.

7. Laske $\oint_C \dfrac{dz}{z^2 - 4}$, missä
a) $C = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 3 \}$ on suunnistettu vastapäivään,
b) $C = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 3 \}$ on suunnistettu myötäpäivään.
Vihje: Käytä osamurtokehitelmää ja Cauchy'n integraalikaavaa.

Complex Analysis (2009)

Exercise 3/Week 5

1. Prove that if $f'(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$, then the function $f(z)$ is constant.

2. Let f be analytic $\forall z \in \mathbb{C}$. Prove that if $\operatorname{Re} f(z)$ is contant, then the function $f(z)$ itself is constant, too.

3. Calculate the complex line integral $\int_0^{1+2i} \operatorname{Im} z \, dz$
a) along the straight-line segment $0 \to 1 + 2i$,
b) along the straight-line segments $0 \to 1$ and $1 \to 1 + 2i$.

4. Evaluate $\oint_C z^m \, dz$ for all $m \in \mathbb{Z}$, where C is the unit circle oriented counterclockwise.

5. Calculate the line integral $\int_{-i}^{i} \frac{1}{z} \, dz$ by using
a) an arc of the unit cirle from $-i$ to i,
b) an (indefinite) integral function.

6. Integrate counterclockwise $\oint_C \dfrac{z^2}{z-i} \, dz$ around $C = \{ z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1 \}$ by using
a) a parametric representation for C,
b) Cauchy's integral formula.

7. Integrate $\oint_C \dfrac{dz}{z^2 - 4}$
a) counterclockwise around $C = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 3 \}$,
b) clockwise around $C = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 3 \}$.
Hint: Use partial fractions and Cauchy's integral formula.