Kompleksianalyysi (2009)

Harjoitus 2/viikko 4

1. Ratkaise yhtälö $z^2 + (2\mathrm{i} - 3)z + 5 - \mathrm{i} = 0$ ja esitä polynomi $z^2 + (2\mathrm{i} - 3)z + 5 - \mathrm{i}$ astetta yksi olevien polynomien tulona.

2. a) Määritä luvun i kaikki neljännet juuret $\sqrt[4]{\mathrm{i}}$ (eli yhtälön $z^4 = \mathrm{i}$ juuret).
b) Esitä polynomi $z^4 - \mathrm{i}$ astetta yksi olevien polynomien tulona.

3. Etsi yhtälön $e^{z/2} = 1 + \mathrm{i}$ kaikki ratkaisut kompleksitasossa.

4. Ratkaise seuraavat yhtälöt a) $\ln z = -\mathrm{i}\pi/2$, b) $\ln z = 4 - 3\mathrm{i}$.

5. Todista: $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$.

6. a) Olkoon z kompleksimuuttuja ja n positiivinen kokonaisluku. Todista:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

b) Todista: jos $n = 2, 3, \dots$, niin

$$\sin\tfrac{2\pi}{n} + \sin\tfrac{4\pi}{n} + \sin\tfrac{6\pi}{n} + \cdots + \sin\tfrac{2(n-1)\pi}{n} = 0.$$

7. Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. a) Todista:

$$(1 - e^{2\pi\mathrm{i}/n})(1 - e^{4\pi\mathrm{i}/n})\cdots(1 - e^{2(n-1)\pi\mathrm{i}/n}) = n.$$

(Vihje: Esitä $z^n - 1$ astetta yksi olevien polynomian tulona ja käytä tehtävää 6. a))

b) Todista:

$$\sin\tfrac{\pi}{n}\sin\tfrac{2\pi}{n}\sin\tfrac{3\pi}{n}\cdots\sin\tfrac{(n-1)\pi}{n} = \tfrac{n}{2^{n-1}}.$$

(Vihje: Ota kompleksikonjugaatit a)-kohdan yhtälöstä ja kerro yhtälöt).

Complex Analysis (2009)

Exercise 2/Week 4

1. a) Solve the equation $z^2 + (2\mathrm{i} - 3)z + 5 - \mathrm{i} = 0$.
b) Factorize the polynomial $z^2 + (2\mathrm{i} - 3)z + 5 - \mathrm{i}$ into a product of complex polynomials of degree one.

2. a) Find all the fourth roots $\sqrt[4]{\mathrm{i}}$ of i in the complex plane.
b) Factorize the polynomial $z^4 - \mathrm{i}$ into a product of complex polynomials of degree one.

3. Find all the solutions of the equation $e^{z/2} = 1 + \mathrm{i}$ in the complex plane.

4. Solve the following equations a) $\ln z = -\mathrm{i}\pi/2$, b) $\ln z = 4 - 3\mathrm{i}$.

5. Prove: $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$.

6. a) Let z be a complex variable and let n be a positive integer. Prove:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

b) Prove: if $n = 2, 3, \ldots$, then

$$\sin\tfrac{2\pi}{n} + \sin\tfrac{4\pi}{n} + \sin\tfrac{6\pi}{n} + \cdots + \sin\tfrac{2(n-1)\pi}{n} = 0.$$

7. Let $n > 1$ be an integer. a) Prove:

$$(1 - e^{2\pi\mathrm{i}/n})(1 - e^{4\pi\mathrm{i}/n})\cdots(1 - e^{2(n-1)\pi\mathrm{i}/n}) = n. \tag{1}$$

(Hint: Factorize $z^n - 1$ into a product of polynomials of degree one and use exercise 6. a))

b) Prove:

$$\sin\tfrac{\pi}{n}\sin\tfrac{2\pi}{n}\sin\tfrac{3\pi}{n}\cdots\sin\tfrac{(n-1)\pi}{n} = \tfrac{n}{2^{n-1}}.$$

(Hint: Take the complex conjugates of both sides of (1) and multiply the equations).