

Kompleksianalyysi/ Complex Analysis (2009)

Harjoitus 1/viikko 3

1. Esitä osamäärä $\frac{z_1}{z_2}$ kompleksilukujen z_1 ja $z_2 \neq 0$ reaali- ja imaginaariosien avulla.

2. Laske kompleksiluvun

$$z = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos \varphi + i \sin \varphi}$$

moduli $|z|$ ja argumentti $\arg z$.

3. Olkoot $z_1 = 1 + i$ ja $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Laske kompleksiluvut $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ ja $\frac{z_1}{z_2}$.

4. Olkoot z_1 ja z_2 kuten edellisessä tehtävässä.

Muodosta napakoordinaattiesitykset $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ luvuille z_1 , z_2 , $z_1 z_2$ ja $\frac{z_1}{z_2}$. Esitä nämä luvut myös kompleksitasossa.

5. Laske kompleksiluvun $z = (1 + i)^{100}$ reaali- ja imaginaariosa (karteesinen koordinaattiesitys) sekä moduli ja argumentti (napakoordinaattiesitys). Piirrä kompleksitasoon luvut $1 + i$ ja z .

6. a) Etsi yhtälön

$$\left| \frac{z - i}{z + 1} \right| = 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

kaikki ratkaisut.

b) Esitä ratkaisujoukko kompleksitasossa ja anna ratkaisuille napakoordinaattiesitys.

c) Miten tulkitset yhtälön (1) geometrisesti?

Complex Analysis (2009)

Exercise 1/Week 3

1. Represent the quotient $\frac{z_1}{z_2}$ by means of the real and the imaginary parts of the complex numbers z_1 and $z_2 \neq 0$.

2. Calculate the modulus (i.e., absolute value) $|z|$ and the argument $\arg z$ of

$$z = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos \varphi + i \sin \varphi}.$$

3. Calculate the sum $z_1 + z_2$, the product $z_1 z_2$, and the quotient $\frac{z_1}{z_2}$ of the complex numbers $z_1 = 1 + i$ and $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

4. Let the complex numbers z_1 and z_2 be as in the previous problem. Represent the complex numbers z_1 , z_2 , $z_1 z_2$, and $\frac{z_1}{z_2}$ in polar form $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Furthermore, plot these numbers as vectors in the complex plane.

5. Calculate the real and the imaginary part (Cartesian coordinates), and the modulus and the argument (polar form) of the complex number $z = (1 + i)^{100}$. Plot the numbers $1 + i$ and z in the complex plane.

6. a) Find all solutions of the equation

$$\left| \frac{z - i}{z + 1} \right| = 1, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

b) Draw the solution set in the complex plane and represent the solutions in polar form.

c) Give a geometric interpretation for the equation (1).