TURUN KAUPPAKORKEAKOULU 1975 TUTKIELMIA

TURUN KAUPPAKORKEAKOULUN JULKAISUJA: SARJA A II - 1 : 1975

JUHLAJULKAISUN KIRJOITTAJAT
CONTRIBUTORS

AALTONEN, AIMO O., LaT, KTL, professori, Turun Kauppakorkeakoulu
HALME, VEIKKO, FT, professori, rehtori, Turun Kauppakorkeakoulu
HASAN, RUTH, KTL, lehtori, Turun Kauppakorkeakoulu
HJERPPE, REINO, VTL, suunnittelija, Tilastokeskus
KANERVA, REINO, KTL, lehtori, Turun Kauppakorkeakoulu
KLAMI, HANNU TAPANI, OTT, HuK, apulaisprofessori, Turun yliopisto
KYLÄKALLIO, JUHANI, OTT, professori, Turun yliopisto
LENTO, REINO, VTT, täysinpalvellut professori, Turun yliopisto
LUOMA, VÄINÖ, FT, apulaisprofessori, Turun Kauppakorkeakoulu
MAJALA, REINO, KTL, lehtori, Turun Kauppakorkeakoulu
MALASKA, PENTTI, TkT, professori, Turun Kauppakorkeakoulu
MERIKOSKI, VELI, LaT, kansleri, Turun Kauppakorkeakoulu
NIITAMO, OLAVI, VTT, osastopäällikkö, Tilastokeskus
NURMI, RAIMO, VTT, vt. apulaisprofessori, Turun Kauppakorkeakoulu
NURMINEN, MARKKU, FL, yliassistentti, Turun Kauppakorkeakoulu
OKKO, PAAVO, KTM, assistentti, Turun Kauppakorkeakoulu
PIHA, KALEVI, FT, professori, vararehtori, Turun Kauppakorkeakoulu
PIHLANTO, PEKKA, KTL, yliassistentti, Turun Kauppakorkeakoulu
REINIKAINEN, VEIKKO K., KTT, apulaisprofessori, Turun Kauppakorkeakoulu
REPONEN, TAPIO, KTM, Suomen Akatemian tutkimusassistentti, Turun Kauppakorkeakoulu
VILJA, TUULA-MARJA, KTM, assistentti, Turun Kauppakorkeakoulu
VIRTANEN, ILKKA, FL, assistentti, Turun Kauppakorkeakoulu

Ilkka Virtanen

STOKASTISEN SYSTEEMIN TOIMINNAN JA LUOTETTAVUUDEN MÄÄRITTÄMISESTÄ LISÄMUUTTUJA- JA LAPLACE-MUUNNOSMENETELMÄLLÄ

1. *Johdanto*

Useista itsenäisistä laitteista koostuvan systeemin toiminnan luotettavuuden saattaminen tietylle tasolle voi tapahtua pääasiassa kahdella tavalla: varmistaudutaan siitä, että systeemin rakenneosat, komponentit, ovat jo itsessään niin luotettavia, että asetettu tavoite koko systeemin osalta saavutetaan, tai vaihtoehtoisesti liian alhaisen luotettavuuden omaavien komponenttien osalta eliminoidaan näissä komponenteissa ilmenevä luotettavuuden puute sopivilla systeemiteknisillä ratkaisuilla. Tärkein jälkimmäiseen ryhmään kuuluvista keinoista on epäilemättä komponentin varmistaminen sen kanssa samanlaisilla varakomponenteilla eli ns. komponenttien luotettavuusmerkityksessä tapahtuva rinnankytkentä.

Komponentin varmistaminen yhdellä tai useammalla varakomponentilla merkitsee tavallisesti huomattavaa lisäkustannustekijää. Sen johdosta on tärkeää, että on olemassa keinoja näiden kustannusten vastapainona saatavan luotettavuuden kasvun mahdollisimman tarkaksi mittaamiseksi. Tämän artikkelin tarkoituksena on esitellä lisämuuttujatekniikkaan ja Laplace-muunnoksiin perustuva menetelmä, jolla voidaan matemaattisesti tarkastella varsin yleistä muotoa olevan stokastisen systeemin toimintaa, kun systeemin tietyssä keskeisessä osassa on toteutettu komponentin varmistus rinnankytkennällä. Toimintaa kuvaavien tulosten perusteella voidaan tehdä johtopäätöksiä useissa systeemin luotettavuutta koskevissa kysymyksissä.

2. *Systeemin kuvaus*

Tarkastelujen kohteena oleva reaalisysteemi koostuu kahdesta osasysteemistä S_1 ja S_2 seuraavasti: osasysteemin S_1 muodostavat M identtistä rinnan kytkettyä komponenttia kun taas S_2 koostuu N:stä yleensä erilaisesta sarjaan kytketystä, toisistaan riippumattomasta komponentista. Systeemin toiminnan edellytyksenä on kummankin osasysteemin toimintakuntoisuus; osasysteemit S_1 ja S_2 ovat siis luotettavuusmerkityksessä sarjaan kytketyt. Rinnankytkennän luonne S_1:ssä on aktiivinen: S_1:n (toimintakykyiset) komponentit ovat kaikki yhtäaikaisesti toiminnassa.

Vioittuneen komponentin korjaaminen on mahdollista vain koko systeemin toiminnan ollessa pysähdyksissä. Systeemiä ei kuitenkaan tarkoituksellisesti pysäytetä korjausta varten, vaan korjaukset suoritetaan tilanteissa, jolloin systeemi komponentin vioittumisen seurauksena on joutunut käyttökeskeytykseen. Tällainen tilanne syntyy, kun jokin S_2:n komponenteista vioittuu tai viimeinenkin S_1:n komponenteista lakkaa toimimasta. Vikojen luonteesta ja vaikutuksesta oletetaan, että S_1:n vioittumaan päässeiden komponenttien ennalleen saattamiseksi tarvittavat panokset (kustannukset, työn kestoaika) ovat merkittävästi suuremmat kuin vastaavat suureet S_2:n komponenttien tai S_1:n jo käytössä olleiden, mutta vielä toimivien komponenttien osalta.

Tässä yhteydessä erityisesti tarkasteltava korjauspolitiikka noudattaa sen lisäksi, mikä edellä kuvatulla tavalla aiheutuu suoraan systeemin ominaisuuksista, seuraavia periaatteita. Osasysteemin S_1 täydellisen vioittumisen johdosta syntyneessä korjaustilanteessa kunnostetaan kaikki S_1:n komponentit ennalleen, S_2:n komponentteihin ei kosketa. Tapauksessa, jossa jokin S_2:n komponentti on vioittunut ja aiheuttanut näin korjaustilanteen synnyn, kyseinen komponentti saatetaan ennalleen; tämän lisäksi ennakkohuolletaan S_1:n toimivat komponentit, jolloin ne tulevat uutta vastaaviksi. Mahdollisesti vioittuneet S_1:n komponentit jätetään tässä yhteydessä suuritöisinä odottamaan S_1:n täyskorjausta.

3. *Mallin olettamukset ja tehtävän yleinen määrittely*

Tutkimuksessa tarkastellaan matemaattisen mallin muodossa edellisessä jaksossa kuvattuihin yleisiin puitteisiin soveltuvan systeemin toimintaa, kun useat systeemin käyttäytymiseen vaikuttavat tekijät ovat luonteeltaan stokastisia. Mallissa stokastiset ainekset esitetään seuraavina satunnaissuureina: komponentin häiriötön toiminta-aika, S_2:n komponentin tai koko osasysteemin S_1 korjausaika sekä vioittumisesta korjaustyön alkuun kuluva odotusaika. Satunnaissuureiden jakautumien suhteen tehdään eräitä olettamuksia.

Suurimmalle osalle systeemin satunnaissuureista asetetaan ainoastaan vaatimus, että satunaissuureen tiheysfunktio on jatkuvana olemassa koko positiivisen reaalilukuakselin alueella, tiheysfunktion muoto ja siten jakautuman tyyppi voi muutoin olla täysin mielivaltainen. Tällainen ns. yleinen jakautuma esitetään mallissa tiheysfunktionsa f(x) tai tiheysfunktioon yhtälön

$$f(x) = r(x) \exp \left\{ - \int_0^x r(x) \, dx \right\} \tag{3.1}$$

mukaisesti liittyvän intensiteettifunktion r(x) avulla.[1] Häiriöttömän toiminta-ajan tapauksessa esimerkiksi f(x) on vikatiheys ja r(x) vikataajuus. Jakautumiltaan edellä olevassa merkityksessä yleisiä ovat seuraavat mallin satunnaissuureet: S_1:n komponentin häiriötön toiminta-aika (sama jakautuma kullakin komponentilla), S_1:n korjausaika ja korjauksen odotusaika sekä S_2:n komponenttien korjausajat ja korjausten odotusajat (kullakin komponentilla omat jakautumansa). Osasysteemin S_2 komponenttien häiriöttömän toiminta-ajan jakautumat sen sijaan oletetaan eksponentiaalisiksi ts. vikataajuudet oletetaan vakioiksi.

Jaksossa 2 esitetyn yleisrakenteen omaavaa reaalisysteemiä on luotettavuusominaisuuksiltaan aiemmin tarkastellut *D. K. Kulshrestha.*[2] Tässä työssä *Kulshresthan* esittämää mallia on merkittävästi yleistetty ja laajennettu. Mallissa otetaan varsinaisen korjausajan lisäksi huomioon myös se aika, joka kuluu vapaana olevan korjausmiehistön mahdollisen puutteen, varaosatoimitusten tms. tekijöiden johdosta korjauksen alun odottamiseen. Edelleen on luovuttu käyttämästä pelkästään eksponentiaalijakautumaa S_1:n komponenttien häiriöttömän toiminta-ajan kuvaajana, tämän sijaan on otettu kaikki jatkuvat jakautumat kattava yleinen jakautuma.

Yleisten jakautumien sisällyttäminen malliin lisää sen potentiaalisia ominaisuuksia ja käyttömahdollisuuksia merkittävästi. Malli voi luonnollisesti toimia tavanomaisena laskenta-algoritmina ratkaistaessa jonkin spesifisen, jakautumiltaan tunnetun tai estimoidun systeemin luotettavuutta koskevia ongelmia. Ennen kaikkea malli tässä muodossaan on kuitenkin erityinen metodi, joka mahdollistaa määrättyihin puitteisiin rajoittuvan systeemin luotettavuusominaisuuksien yleisen tarkastelun. Mallin tämä ominaisuus tulee erityisen selvästi esille systeemin stationäärisen vaiheen tarkasteluissa. Voidaan nimittäin osoittaa, että systeemin luotettavuusominaisuudet lakkaavat useimpien satunnaissuureiden kohdalla riippumasta jakautuman tyypistä, kun riittävän pitkä aika toiminnan alkuhetkestä on kulunut. Luotettavuuden määrittämiseksi riittävät näiden jakautumien osalta tällöin pelkät odotusarvot.

---

[1] Funktion r(x) määritelmästä, tulkinnasta ja yhteyksistä tiheys- ja kertymäfunktioihin ks. esim. BARLOW ja PROSCHAN, s. 10.

[2] KULSHRESTHA: Reliability of a Repairable Multicomponent System with Redundancy in Parallel.

Mallin formulointi ja ratkaisujen etsintä perustuvat keskeisiltä osiltaan lisämuuttuja- ja Laplace-muunnostekniikkoihin. Edellinen on osoittautunut varsin tehokkaaksi menetelmäksi konstruoitaessa tilayhtälöitä alkuaan ei-markovilaisille stokastisille prosesseille. Menetelmä on kehitetty stokastisten prosessien yleisen teorian alueella,[3] sieltä se on jonoteoreettisten sovellutusten kautta[4] löytänyt merkittävän sovellutusalueen luotettavuusteoreettisissa ongelmissa.[5] Lisämuuttujatekniikkaa käytettäessä systeemin tilayhtälöt muodostuvat osittaisdifferentiaaliyhtälöiksi, nyt tarkasteltavassa tapauksessa tilayhtälöt ovat systeemin ominaisuuksista johtuen lisäksi differenssiyhtälöitä. Tilayhtälöiden ratkaisut johdetaan Laplace-muunnoksia hyväksi käyttäen ja ne saatetaan suljettuun muotoon sekä muutosvaiheen että stationäärisen vaiheen osalta. Stationäärisen vaiheen olemassaolo ja ratkaisut saadaan selville eräitä Laplace-muunnosten raja-arvo-ominaisuuksia hyväksi käyttäen. Tässä yhteydessä on huomattava, että stationääriset ratkaisut saadaan Laplace-muunnosten käänteismuunnoksiin turvautumatta, lisäksi useista systeemin jakautumista tarvitaan vain niiden odotusarvojen tuntemus, jakautuman luonne ei muuten vaikuta ratkaisuihin.

4. *Systeemin matemaattinen malli*

4. 1. *Merkinnät*

Alustavana vaiheena mallin formuloinnille on systeemin tilojen tarkoituksenmukainen määrittely ja tietyistä merkinnöistä sopiminen. Määritellään ja merkitään systeemin tilat seuraavasti:

m: systeemi on toimintakunnossa, S_1:n komponenteista on m kpl vioittunut, $m = 0, \ldots, M-1$

W: systeemi odottaa korjauksen alkamista, käyttökeskeytyksen syynä on S_1:n kaikkien komponenttien vioittuminen

R: S_1:n vialliset komponentit (kaikki M kpl) korjauksen alaisena

w_{mi}: systeemi odottaa korjaustyön alkua, toimintakeskeytyksen syynä S_2:n komponentin n:o i vioittuminen; S_1:n komponenteista on m kpl vioittunut, $m = 0, \ldots, M-1$; $i = 1, \ldots, N$

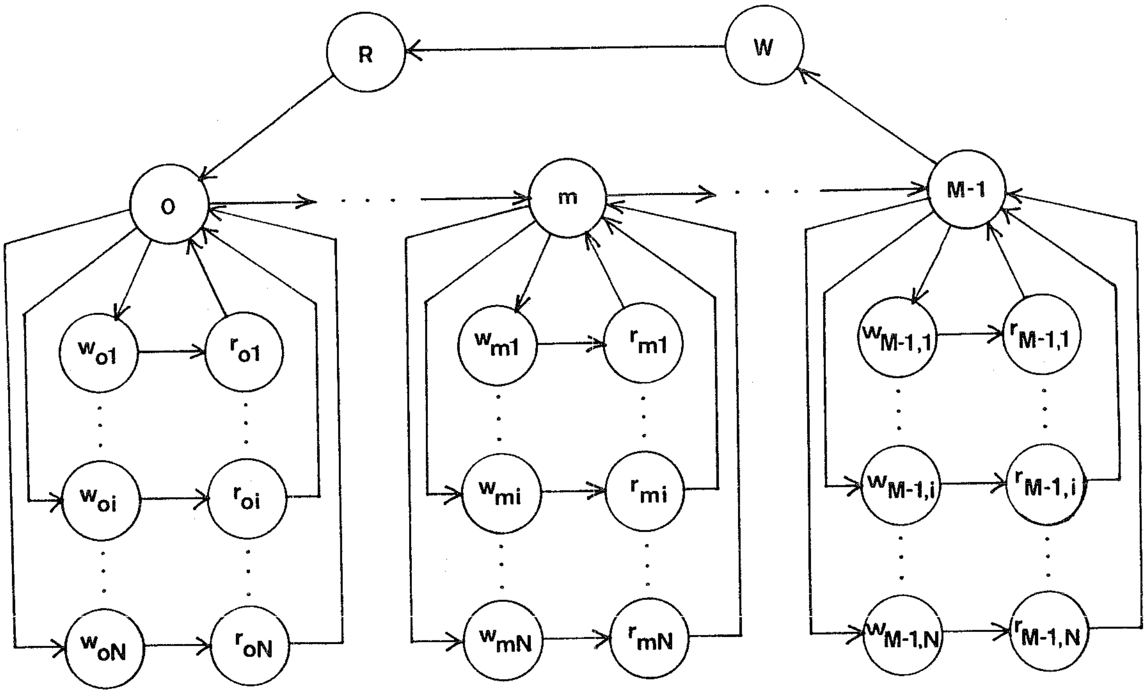
r_{mi}: S_2:n komponentti n:o i on korjattavana; S_1:n komponenteista on m kpl vioittunut, S_1:n toimivat komponentit ennakkohuolletaan, $m = 0, \ldots, M-1$; $i = 1, \ldots, N$

---

[3] Cox, s. 433.

[4] Keilson ja Kooharian, s. 104.

[5] Ensimmäisiä lisämuuttujatekniikan soveltajia luotettavuusteoreettisiin ongelmiin ovat mm. Garg sekä Kulshrestha.



Kuvio 1. Systeemin siirtymädiagrammi.

Systeemin tilat ja mahdollisuudet siirtyä tilasta toiseen on havainnollistettu kuviossa 1.

Systeemin satunnaissuureisiin liitetään seuraavat merkinnät:

Σ : systeemin tilojen joukko

S: systeemin tilan yleinen indeksi, $S \varepsilon \Sigma$

$P_S(x, t)$: tilassa S viipymiseen liittyvä tiheysfunktio; $P_S(x, t)\,\Delta + o(\Delta)$ ilmoittaa todennäköisyyden, että systeemi hetkellä t on tilassa S ja että siirtyminen tähän tilaan on tapahtunut aikana $(t-x-\Delta,\ t-x)$; tätä muotoa olevien tiheysfunktioiden käyttöön otto juuri on antanut aiheen käytettävän menetelmän nimeämiselle lisämuuttujatekniikaksi

$P_S(t)$: todennäköisyys, että systeemi hetkellä t on tilassa S, ilmeisesti

$$P_S(t) = \int_0^\infty P_S(x, t)\, dx$$

$\alpha(x)$: S_1:n komponentin vikataajuus

$A(x)$: S_1:n komponentin vikatiheys (häiriöttömän toiminta-ajan tiheysfunktio); $A(x) = \alpha(x) \exp\left\{-\int_0^x \alpha(x)\, dx\right\}$

$\beta(x)$: S_1:n korjauksen valmistumisintensiteetti

$B(x)$: S_1:n korjausajan tiheysfunktio; $B(x) = \beta(x) \exp\left\{-\int_0^x \beta(x)\,dx\right\}$

$\gamma(x)$: S_1:n korjauksen alkuun liittyvän odotusajan päättymisintensiteetti

$C(x)$: em. odotusajan tiheysfunktio; $C(x) = \gamma(x) \exp\left\{-\int_0^x \gamma(x)\,dx\right\}$

λ_i: S_2:n komponentin n:o i vikataajuus (vakio), $i = 1, \ldots, N$; $\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$

$\eta_i(x)$: S_2:n komponentin n:o i korjauksen alkuun liittyvän odotusajan päättymisintensiteetti, $i = 1, \ldots, N$

$H_i(x)$: em. odotusajan tiheysfunktio; $H_i(x) = \eta_i(x) \exp\left\{-\int_0^x \eta_i(x)\,dx\right\}$, $i = 1, \ldots, N$

$\mu_i(x)$: S_2:n komponentin n:o i korjausintensiteetti, $i = 1, \ldots, N$

$M_i(x)$: em. korjausajan tiheysfunktio;

$$M_i(x) = \mu_i(x) \exp\left\{-\int_0^x \mu_i(x)\,dx\right\}, \quad i = 1, \ldots, N$$

$A_k(x)$: $k\,\alpha(x) \exp\left\{-\int_0^x k\,\alpha(x)\,dx\right\}$, $k = 1, \ldots, M$

Satunnaissuureen odotusarvoa merkitään symbolilla $^{-}$; siten merkitään esimerkiksi osasysteemin S_1 korjausajan odotusarvo $\bar{B}$. Muut käytettävät merkinnät selostetaan siinä yhteydessä, jolloin ne tekstissä ensimmäisen kerran esiintyvät.

4. 2. *Mallin formulointi*

Systeemin on kunakin ajanhetkenä t oltava jossakin edellisessä jaksossa määritellyistä tiloista. Siirtyminen tilasta toiseen tapahtuu kuvion 1 ja edellä määriteltyjen todennäköisyyslakien mukaisesti. Systeemissä hetkellä t vallinneen tilan säilymistä hetkeen $t + \Delta$ kuvaamaan saadaan seuraavat "eteenpäin" muodostetut differenssiyhtälöt:

$$\text{(4. 1)} \quad P_m(x+\Delta, t+\Delta) = P_m(x, t)\left\{[1 - \alpha(x)\,\Delta]^{M-m} \prod_{i=1}^{N} (1 - \lambda_i\,\Delta)\right\} + o(\Delta), \quad m = 0, \ldots, M-1$$

$$\text{(4. 2)} \quad P_W(x+\Delta, t+\Delta) = P_W(x, t)\,[1 - \gamma(x)\,\Delta] + o(\Delta)$$

$$\text{(4. 3)} \quad P_R(x+\Delta, t+\Delta) = P_R(x, t)\,[1 - \beta(x)\,\Delta] + o(\Delta)$$

$$\left.\begin{aligned} &(4.4)\quad P_{wmi}(x+\Delta, t+\Delta) = P_{wmi}(x,t)\,[1-\eta_i(x)\Delta] + o(\Delta) \\ &(4.5)\quad P_{rmi}(x+\Delta, t+\Delta) = P_{rmi}(x,t)\,[1-\mu_i(x)\Delta] + o(\Delta) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &m = 0,\dots, M-1; \\ &i = 1,\dots, N \end{aligned}$$

Antamalla yhtälöissä (4. 1) – (4. 5) $\Delta \to 0$ päädytään seuraaviin muuttuvakertoimisiin osittaisdifferentiaaliyhtälöihin:

$$(4.6)\quad [\partial/\partial x + \partial/\partial t + (M-m)\,\alpha(x) + \lambda]\,P_m(x,t) = 0,\quad m = 0,\dots, M-1$$

$$(4.7)\quad [\partial/\partial x + \partial/\partial t + \gamma(x)]\,P_W(x,t) = 0$$

$$(4.8)\quad [\partial/\partial x + \partial/\partial t + \beta(x)]\,P_R(x,t) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &(4.9)\quad [\partial/\partial x + \partial/\partial t + \eta_i(x)]\,P_{wmi}(x,t) = 0 \\ &(4.10)\quad [\partial/\partial x + \partial/\partial t + \mu_i(x)]\,P_{rmi}(x,t) = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &m = 0,\dots, M-1; \\ &i = 1,\dots, N \end{aligned}$$

Muuttujien x ja t luonteesta johtuen yllä olevat tiheysfunktiot ovat määritellyt vain alueella

$$(4.11)\quad \Gamma = \{(x,t) \mid x \geq 0, t \geq 0\},$$

joten yhtälöitä ratkaistaessa on otettava huomioon alueen reunoilla

$$(4.12)\quad \Gamma_x = \{(x,0) \mid x \geq 0\},\quad \Gamma_t = \{(0,t) \mid t \geq 0\}$$

vallitsevat reunaehdot.

Reunan Γ_t ehdot kuvaavat systeemin siirtymistä tilasta toiseen ja ovat muotoa

$$(4.13)\quad P_o(0,t) = \int_0^\infty P_R(x,t)\,\beta(x)\,dx + \sum_{i=1}^{N} \int_0^\infty P_{roi}(x,t)\,\mu_i(x)\,dx$$

$$(4.14)\quad P_m(0,t) = \int_0^\infty P_{m-1}(x,t)\,(M-m+1)\,\alpha(x)\,dx$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_0^\infty P_{rmi}(x,t)\,\mu_i(x)\,dx,\quad m = 1,\dots, M-1$$

$$(4.15)\quad P_W(0,t) = \int_0^\infty P_{M-1}(x,t)\,\alpha(x)\,dx,$$

$$(4.16)\quad P_R(0,t) = \int_0^\infty P_W(x,t)\,\gamma(x)\,dx,$$

$$\left.\begin{aligned} &(4.17)\quad P_{wmi}(0,t) = \int_0^\infty P_m(x,t)\,\lambda_i\,dx = \lambda_i\,P_m(t) \\ &(4.18)\quad P_{rmi}(0,t) = \int_0^\infty P_{wmi}(x,t)\,\eta_i(x)\,dx \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &m = 0,\dots, M-1; \\ &i = 1,\dots, N \end{aligned}$$

Ehdot reunalla Γ_x määrittelevät puolestaan systeemin alkutilan hetkellä $t=0$. Alkutilan ollessa tila 0 saavat nämä reunaehdot seuraavan muodon:

$$P_m(x,0) = \delta_{mo}\,\delta(x),\quad m = 0,\ldots,M-1 \tag{4.19}$$

$$P_W(x,0) = P_R(x,0) = P_{wmi}(x,0) = P_{rmi}(x,0) = 0,\quad m \neq 0,\ldots,M-1;\quad i=1,\ldots,N \tag{4.20}$$

missä δ_{mo} merkitsee Kronecker'in deltaa ja $\delta(x)$ Dirac'in delta-funktiota.

Yhtälöitä (4.6)—(4.10) ja (4.13)—(4.20), joiden perusteella voidaan yksikäsitteisesti määrittää systeemin tila kullakin ajanhetkellä t, kutsutaan seuraavassa systeemin tilayhtälöiksi.

4.3. *Ratkaisut*

Tilayhtälöiden ratkaisuja etsittäessä osoittautuu tarkoituksenmukaiseksi siirtyä tiheysfunktiolausekkeista $P_S(x,t)$, $s \in \Sigma$, näiden muuttujan t suhteen laskettuihin Laplace-muunnoksiin, sillä tällöin päästään yhtälöihin, joissa esiintyy osittaisderivaattoja ainoastaan yhden muuttujan (muuttujan x) suhteen. Merkitään seuraavassa yleisesti funktion $F(t)$ Laplace-muunnosta vastaavalla pienellä kirjaimella, ts.

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt = f(s). \tag{4.21}$$

Suoritettujen Laplace-muunnosten jälkeen saavat yhtälöt (4.6)—(4.10), kun lisäksi on otettu huomioon alkuehdot (4.19)—(4.20), seuraavan muodon:

$$[\partial/\partial x + s + (M-m)\,\alpha(x) + \lambda]\,p_m(x,s) = \delta_{mo}\,\delta(x),\quad m = 0,\ldots,M-1 \tag{4.22}$$

$$[\partial/\partial x + s + \gamma(x)]\,p_W(x,s) = 0 \tag{4.23}$$

$$[\partial/\partial x + s + \beta(x)]\,p_R(x,s) = 0 \tag{4.24}$$

$$\left.\begin{aligned} &[\partial/\partial x + s + \eta_i(x)]\,p_{wmi}(x,s) = 0 \quad (4.25)\\ &[\partial/\partial x + s + \mu_i(x)]\,p_{rmi}(x,s) = 0 \quad (4.26)\end{aligned}\right\} m = 0,\ldots,M-1;\ i = 1,\ldots,N$$

Reunayhtälöiden (4.13)—(4.18) Laplace-muunnokset puolestaan ovat

$$p_o(0,s) = \int_0^\infty p_R(x,s)\,\beta(x)\,dx + \sum_{i=1}^{N} \int_0^\infty p_{roi}(x,s)\,\mu_i(x)\,dx \tag{4.27}$$

$$(4.28)\quad p_m(0,s) = \int_0^\infty p_{m-1}(x,s)\,(M-m+1)\,\alpha(x)\,dx + \sum_{i=1}^{N}\int_0^\infty p_{rmi}(x,s)\,\mu_i(x)\,dx,\quad m = 1,\dots,M-1$$

$$(4.29)\quad p_W(0,s) = \int_0^\infty p_{M-1}(x,s)\,\alpha(x)\,dx$$

$$(4.30)\quad p_R(0,s) = \int_0^\infty p_W(x,s)\,\gamma(x)\,dx$$

$$\left.\begin{aligned}(4.31)\quad & p_{wmi}(0,s) = \lambda_i\, p_m(s)\\ (4.32)\quad & p_{rmi}(0,s) = \int_0^\infty p_{wmi}(x,s)\,\eta_i(x)\,dx\end{aligned}\right\}\ m = 0,\dots,M-1;\ i = 1,\dots,N$$

Tilatodennäköisyyksien $P_S(t)$ ja tiheysfunktioiden $P_S(x,t)$, $S \varepsilon \Sigma$, Laplace-muunnosten välille saadaan jaksossa 4.1 esitetyn, nämä funktiot toisiinsa sitovan yhtälön nojalla vielä yhteys

$$(4.33)\quad p_S(s) = \int_0^\infty p_S(x,s)\,dx,\quad S \varepsilon \Sigma.$$

Yhtälöistä (4.22)—(4.26) saadaan suorittamalla niissä integrointi aikavälin $(0,x)$ yli seuraavat yhtälöt:

$$(4.34)\quad p_m(x,s) = [\delta_{mo} + p_m(0,s)]\exp\left\{-(s+\lambda)x - \int_0^x (M-m)\,\alpha(x)\,dx\right\},\quad m = 0,\dots,M-1$$

$$(4.35)\quad p_W(x,s) = p_W(0,s)\exp\left\{-sx - \int_0^x \gamma(x)\,dx\right\}$$

$$(4.36)\quad p_R(x,s) = p_R(0,s)\exp\left\{-sx - \int_0^x \beta(x)\,dx\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}(4.37)\quad & p_{wmi}(x,s) = p_{wmi}(0,s)\exp\left\{-sx - \int_0^x \eta_i(x)\,dx\right\}\\ (4.38)\quad & p_{rmi}(x,s) = p_{rmi}(0,s)\exp\left\{-sx - \int_0^x \mu_i(x)\,dx\right\}\end{aligned}\right\}\ m = 0,\dots,M-1;\ i = 1,\dots,N$$

Yhtälössä (4. 34) esiintyvien funktioiden $p_m(0,s)$, $m = 0, \ldots, M-1$, määrittämiseksi saadaan yhtälöstä (4. 33) lähtien tulos

$$
\begin{aligned}
p_m(s) &= \int_0^\infty p_m(x,s)\,dx \\
&= [\delta_{mo} + p_m(0,s)] \int_0^\infty \exp\{-(s+\lambda)x - \int_0^\infty (M-m)\,\alpha(x)\,dx\}\,dx \\
(4.39) \quad &= \frac{\delta_{mo} + p_m(0,s)}{s+\lambda} [1 - \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x} (M-m)\,\alpha(x) \\
&\qquad \exp\{-\int_0^x (M-m)\,\alpha(x)\,dx\}\,dx] \\
&= [\delta_{mo} + p_m(0,s)]\, \frac{1 - a_{M-m}(s+\lambda)}{s+\lambda}, \quad m = 0, \ldots, M-1
\end{aligned}
$$

joten $p_m(0,s)$:n lauseke on muotoa

$$
(4.40) \quad p_m(0,s) = \frac{s+\lambda}{1 - a_{M-m}(s+\lambda)}\, p_m(s) - \delta_{mo}, \quad m = 0, \ldots, M-1
$$

Suorittamalla yhtälön (4. 33) mukaiset integroinnit myös yhtälöissä (4. 35)—(4. 38) esiintyvien tiheysfunktioiden Laplace-muunnosten osalta ja soveltamalla toistuvasti yhtälöitä (4. 29)—(4. 32) ja (4. 35)—(4.38) sekä ottamalla vielä huomioon tulos (4. 40) ja yhtälön (3. 1) mukainen tiheysfunktion esitysmuoto voidaan tilatodennäköisyyksien Laplace-muunnokset saattaa muotoon, josta ilmenee niiden riippuvuus (toistaiseksi vielä tuntemattomista) lausekkeista $p_m(s)$:

$$
(4.41) \quad p_W(s) = \frac{(s+\lambda)\; a(s+\lambda)\; [1 - c(s)]}{s\,[1 - a(s+\lambda)]}\, p_{M-1}(s)
$$

$$
(4.42) \quad p_R(s) = \frac{(s+\lambda)\; a(s+\lambda)\; [1 - b(s)]\, c(s)}{s\,[1 - a(s+\lambda)]}\, p_{M-1}(s)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
(4.43) \quad p_{wmi}(s) &= \frac{\lambda_i\,[1 - h_i(s)]}{s}\, p_m(s) \\
(4.44) \quad p_{rmi}(s) &= \frac{\lambda_i\, h_i(s)\,[1 - m_i(s)]}{s}\, p_m(s)
\end{aligned}
\right\}
\begin{aligned}
& m = 0, \ldots, M-1; \\
& i = 1, \ldots, N
\end{aligned}
$$

Funktioiden $p_m(s)$ lausekkeiden määrittämiseksi ovat vielä käytettävissä yhtälöt (4. 27) ja (4. 28). Kun näihin yhtälöihin tehdään tarpeelliset sijoitukset ja sievennetään, päädytään muuttuvakertoimisiin differenssiyhtälöihin

$$(4.45)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{s+\lambda}{1-a_{M-m}(s+\lambda)} - \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i\, h_i(s)\, m_i(s)\right] p_m(s) - \\ \dfrac{(s+\lambda)\, a_{M-m+1}(s+\lambda)}{1-a_{M-m+1}(s+\lambda)}\, p_{m-1}(s) = 0, \qquad m = 1,\dots,M-1. \end{cases}$$

Näiden yhtälöiden ratkaisuina saadaan lopulta [6]

$$(4.46)\quad p_m(s) = \frac{1-a_{M-m}(s+\lambda)}{(s+\lambda)\, a_{M-m}(s+\lambda)} \; \frac{Q(s, M-m-1)}{Q(s,M) - b(s)\, c(s)}, \qquad m = 0,\dots,M-1$$

missä on merkitty $Q(s,k)$:lla tulolauseketta

$$(4.47)\quad \begin{cases} Q(s,k) = \prod\limits_{r=1}^{k} \dfrac{s+\lambda - [1-a_r(s+\lambda)] \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i\, h_i(s)\, m_i(s)}{(s+\lambda)\, a_r(s+\lambda)}, \quad k \geq 1 \\ Q(s,0) = 1 \end{cases}$$

Tilatodennäköisyyksien Laplace-muunnokset ovat tämän jälkeen kaikki tunnetut, ne saadaan yhtälöistä (4.41)—(4.44) ja (4.46)—(4.47). Voidaan osoittaa,[7] että nämä lausekkeet toteuttavat kaikilla s:n arvoilla yhtälön

$$(4.48)\quad \sum_{m=0}^{M-1} p_m(s) + p_W(s) + p_R(s) + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=1}^{N} [p_{wmi}(s) + p_{rmi}(s)] = \frac{1}{s}$$

Tulos (4.48) merkitsee tilatodennäköisyyksien osalta, että kaikilla t:n arvoilla on voimassa

$$(4.49)\quad \sum_{m=0}^{M-1} P_m(t) + P_W(t) + P_R(t) + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=1}^{N} [P_{wmi}(t) + P_{rmi}(t)] = 1.$$

Näin on saatu myös vahvistus sille, että systeemin tilat ja niiden muodostama joukko on hyvin määritelty: tilat ovat toisistaan erilliset ja kaikki mahdolliset tilat on otettu huomioon.

Etsityt tilatodennäköisyydet saadaan nyt yhtälöistä (4.41)—(4.44) ja (4.46)—(4.47) käänteisinä Laplace-muunnoksina

$$(4.50)\quad P_S(t) = \mathcal{L}^{-1}\{p_S(s)\}, \quad S \varepsilon \Sigma,$$

kun näihin yhtälöihin on sijoitettu systeemille ominaisten tiheysfunktioiden Laplace-muunnokset. Tilatodennäköisyyksien lopullinen muoto jää näin riippumaan systeemin jakautumien erityisominaisuuksista ja siten kussakin tapauksessa erikseen selvitettäväksi.

---

[6] Differenssiyhtälöiden yksityiskohtaisesta ratkaisemisesta ks. VIRTANEN, ss. 46—48.
[7] VIRTANEN, ss. 49—51.

4. 4. *Stationäärinen vaihe*

Tilatodennäköisyyksien muutosvaiheen ratkaisuista (4. 41) – (4. 44) ja (4.46)—(4.47) käy ilmi näiden todennäköisyyksien (luonnollisesti) voimakas riippuvuus systeemin satunnaissuureiden jakautumista. Seuraavassa osoitetaan kuitenkin, että oltuaan toiminnassa riittävän kauan systeemi saavuttaa stationäärisen vaiheen, jolloin mm. korjaus- ja odotusaikojen jakautumatyyppien vaikutus tilatodennäköisyyksien arvoihin lakkaa. Stationäärisen vaiheen saavuttaminen edellyttää varsin vähäisiä lisäolettamuksia jakautumien suhteen: korjaus- ja odotusaikojen odotusarvojen on oltava äärellisinä olemassa. Stationäärisen vaiheen tilatodennäköisyyksien lausekkeet voidaan saattaa lopulliseen ratkaistuun muotoonsa myös yleisten jakautumien tapauksessa; tulokset saavutetaan lisäksi turvautumatta Laplace-muunnosten käänteisiin toimituksiin, jotka voivat usein osoittautua varsin hankaliksi.

Stationäärisen vaiheen tilatodennäköisyydet johdetaan lausekkeista (4. 41)—(4. 44) ja (4. 46) käyttäen hyväksi tunnettua Laplace-muunnosten loppuarvoteoreemaa [8]

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = \lim_{s \to 0} s\, f(s). \tag{4.51}$$

Tilatodennäköisyyksille saadaan näin stationäärisen vaiheen arvot (kun yleisesti on merkitty $P_S = \lim_{t \to \infty} P_S(t)$, $S \varepsilon \Sigma$):

$$P_m = \frac{1 - a_{M-m}(\lambda)}{\lambda a_{M-m}(\lambda)} \; \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (\overline{H}_i + \overline{M}_i) + S_M(\lambda)(\overline{B} + \overline{C})}, \quad m = 0, \dots, M-1 \tag{4.52}$$

$$P_W = \frac{S_M(\lambda)\, \overline{C}}{1 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (\overline{H}_i + \overline{M}_i) + S_M(\lambda)(\overline{B} + \overline{C})} \tag{4.53}$$

$$P_R = \frac{S_M(\lambda)\, \overline{B}}{1 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (\overline{H}_i + \overline{M}_i) + S_M(\lambda)(\overline{B} + \overline{C})} \tag{4.54}$$

$$P_{wmi} = \frac{1 - a_{M-m}(\lambda)}{\lambda a_{M-m}(\lambda)} \; \frac{S_M(\lambda)\, \lambda_i \overline{H}_i}{1 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (\overline{H}_i + \overline{M}_i) + S_M(\lambda)(\overline{B} + \overline{C})} \tag{4.55}$$

---

[8] SPIEGEL, s. 20.

$$(4.56)\quad P_{rmi} = \frac{1 - a_{M-m}(\lambda)}{\lambda a_{M-m}(\lambda)} \quad \frac{S_M(\lambda)\,\lambda_i\,\overline{M}_i}{1 + \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i\,(\overline{H}_i + \overline{M}_i) + S_M(\lambda)\,(\overline{B} + \overline{C})}$$

$$m = 0, \ldots, M-1;\; i = 1, \ldots, N.$$

Edellä olevissa yhtälöissä on merkitty

$$(4.57)\quad S_M(\lambda) = \left\{ \sum_{k=1}^{M} \frac{1 - a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} \right\}^{-1}.$$

Tilatodennäköisyyksien stationäärisen vaiheen lausekkeista (4. 52)—(4. 56) tosiaan huomataan, että korjaus- ja odotusaikojen jakautumatyyppien vaikutus on niistä hävinnyt, tilatodennäköisyydet määräytyvät näiden satunnaissuureiden osalta pelkkien odotusarvojen perusteella. Osasysteemin S_1 komponenttien vikatiheys vaikuttaa Laplace-muunnosarvojensa $a_k(\lambda)$ välityksellä.

4. 5. *Systeemin luotettavuudesta*

Kun systeemin tilatodennäköisyydet ovat sekä muutosvaiheen että stationäärisen vaiheen osalta tunnetut, voidaan ryhtyä tarkastelemaan systeemin luotettavuuteen liittyviä kysymyksiä. Yksi keskeisistä luotettavuuskäsitettä kvantitatiivisesti mittaavista tunnusluvuista on systeemin (hetkellinen) käytettävyys P_a, joka määritellään [9] todennäköisyytenä

$$(4.58)\quad P_a(t) = P\,\{\text{systeemi on toimintakunnossa hetkellä } t\}.$$

Systeemin tilojen määrittelystä seuraa, että systeemi on toimintakuntoinen ollessa jossakin tiloista $0, \ldots, M-1$ ja toimintakyvytön muulloin. Systeemin käytettävyys tietyllä hetkellä t saadaan näin todennäköisyytenä, että systeemi tuolla hetkellä on jossakin tiloista $0, \ldots, M-1$.

Käytettävyyden muutosvaiheen aikaisen lausekkeen Laplace-muunnos on yhtälön (4. 46) perusteella

$$(4.59)\quad p_a(s) = \sum_{m=0}^{M-1} p_m(s) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{[1 - a_{M-m}(s+\lambda)]\;Q(s, M-m-1)}{(s+\lambda)\,a_{M-m}(s+\lambda)\;[Q(s,M) - b(s)\,c(s)]}$$

$$= \frac{1}{s + \lambda - \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i\,h_i(s)\,m_i(s)} \quad \frac{Q(s,M) - 1}{Q(s,M) - b(s)\,c(s)}$$

---

[9] Gnedenko et al., s. 110.

Käytettävyys P_a (t) saadaan tunnetuilla systeemikohtaisilla tiheysfunktiolausekkeilla tämän jälkeen yhtälön (4. 59) oikean puolen käänteismuunnoksena. Mikäli tilatodennäköisyydet P_S (t) ovat jo aiemmin määritetyt, vrt. yhtälö (4. 50), saadaan käytettävyys luonnollisesti suoralla yhteenlaskulla

$$(4.60)\quad P_a(t) = \sum_{m=0}^{M-1} P_m(t).$$

Stationäärisen vaiheen käytettävyys voidaan sen sijaan määrittää suljetussa muodossa myös yleisillä jakautumilla. Yhtälöstä (4. 52) saadaan

$$(4.61)\quad P_a = \sum_{m=0}^{M-1} P_m = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (\overline{H}_i + \overline{M}_i) + S_M(\lambda)(\overline{B} + \overline{C})}$$

Stationäärisessä vaiheessa on käytettävyydellä P_a hetkellisen toimintatodennäköisyyden ohella varsin mielenkiintoinen empiirinen tulkinta. Se ilmoittaa sen suhteellisen osuuden kokonaisajasta, jonka systeemi stationäärisen vaiheen aikana on toimintakunnossa ja toiminnassa.[10]

5. *Lopuksi*

Tutkimuksessa on tarkasteltu stokastisten prosessien yleiseen ajatusmalliin perustuen rakenteeltaan ja korjauspolitiikaltaan tiettyihin puitteisiin rajatun systeemin toimintaa erityisesti systeemin luotettavuuden näkökulmasta. Laaditun mallin formuloinnissa on keskeisellä sijalla lisämuuttujamenetelmä, joka on mahdollistanut vapautumisen yksinomaisesta eksponentiaalijakautuman käytöstä systeemin satunnaissuureiden mallijakautumana; tarkastelut on voitu laajentaa yleiset jakautumat kattaviksi. Mallin ratkaisu puolestaan perustuu Laplace-muunnoksiin, erityisesti stationäärisen vaiheen kohdalla on voitu tehokkaasti käyttää hyväksi näiden erikoisominaisuuksia. Tarkasteluista käy edelleen selvästi ilmi mallin yleinen menetelmäluonne, muun rakenteen ja/tai korjauspolitiikan omaavalle systeemille voidaan kuvattujen periaatteiden mukaisesti muodostaa helposti oma mallinsa.

---

[10] GNEDENKO et al., s. 112.

APPLICATION OF SUPPLEMENTARY VARIABLES AND LAPLACE TRANSFORMS TO OPERATIONAL BEHAVIOUR AND RELIABILITY OF A COMPLEX SYSTEM

In the paper a multicomponent system, consisting of two classes of components, i.e. of two subsystems S_1 and S_2 is considered. The subsystem S_1 contains M identical redundantly-connected components while S_2 is composed of N independent, in general different components connected in series.

Components in S_1 fail according to some general distribution (the failure rate of components is an arbitrary function of time) while in S_2 the components have constant failure rates, i.e. the time between failures for a S_2-component is exponentially distributed. A failed component has to wait for the repair facility, the waiting time has some general distribution (each component has a distribution of its own). All the repair time distributions in the system are also governed by general probability laws.

Operational behaviour of the system has been studied under certain conditions: the type of redundancy is specified to be in parallel and the policy to be followed in the system repair is closely fixed. A method based on supplementary variables and Laplace transforms is developed to formulate a mathematical model for the system. The supplementary variable technique is used to obtain the model's partial differential-difference equations, the state equations, which describe the behaviour of the system. With the help of Laplace transforms both transient and steady-state solutions for these state equations are found. From these solutions reliability indices are drawn for the system.

Furthermore it is indicated that the steady-state solutions are independent of the type of waiting time and repair time distributions; in these solutions only the expected values of these distributions appear. It is also shown that the steady-state is achieved under quite general conditions and that the solutions for the steady-state can be found without any exact knowledge about the distributions of the system.

KIRJALLISUUSLUETTELO

Barlow, R. E., Proschan, F. Mathematical Theory of Reliability, New York 1965.

Cox, D. R. The Analysis of non-Markovian Stochastic Processes by Supplementary Variables, Proceedings of the Cambridge Philosophy Society, Vol. 51, pp. 433—441, 1955.

Garg, R. C. Dependability of a Complex System Having Two Types of Components, IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-12, No. 3, pp. 11—15, 1963.

Gnedenko, B. V., Belyayev, Y. K., Soloyev, A. D. Mathematical Methods of Reliability Theory, New York 1969.

Keilson, J., Kooharian, A. On Time Dependent Queuing Processes, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 31, pp. 104—112, 1960.

Kulshrestha, D. K. Reliability of a Repairable Multicomponent System with Redundancy in Parallel, IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-19, No. 2, pp. 50—52, 1970.

Spiegel, M. R. Theory and Problems of Laplace Transforms, New York 1965.

Virtanen, I. Monikomponenttisen stokastisesti vioittuvan systeemin käyttäytymisestä ja luotettavuudesta, Turun Kauppakorkeakoulun Julkaisuja, Sarja AI — 4:1974, Turku 1974.