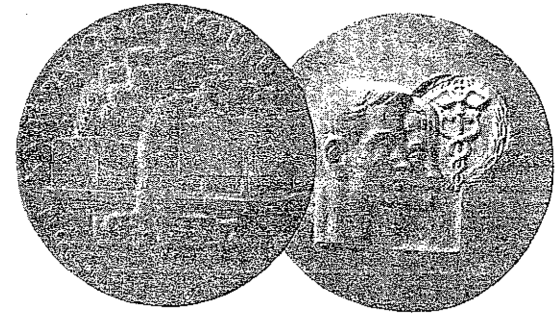
ISBN 951-738-100-x
ISSN 0357-4652
UDK 001.8



TURUN KAUPPAKORKEAKOULUN JULKAISUJA
SARJA A - 7 : 1979

PUBLICATIONS OF THE TURKU SCHOOL OF ECONOMICS
SERIES A - 7 : 1979

Ilkka Virtanen

MAINOSBUDJETIN OPTIMAALINEN JAKO KAKSIVAIHEISENA MAXMIN-TYYPPISENÄ PÄÄTÖSONGELMANA

Eripainos julkaisusta
"TURUN KAUPPAKORKEAKOULUN TUTKIJAIN KONFERENSSI 1979"

Ilkka Virtanen

MAINOSBUDJETIN OPTIMAALINEN JAKO KAKSIVAIHEISENA MAXMIN-TYYPPISENÄ PÄÄTÖSONGELMANA

Ilkka Virtanen

MAINOSBUDJETIN OPTIMAALINEN JAKO KAKSIVAIHEISENA MAXMIN-TYYPPISENÄ PÄÄTÖSONGELMANA

1. Johdanto

Maxmin-probleemoilla tarkoitetaan tässä tutkimuksessa kaksivaiheisia päätös- (yleensä allokaatio-) ongelmia, joissa kahdesta kilpailevasta osapuolesta toisen on tehtävä ratkaisunsa ennen kilpailijaansa, jolloin jälkimmäisellä on omaa ratkaisuaan tehdessään tiedossaan edellisen suorittamat valinnat. Probleematyyppi on varsin tavallinen sotilaallisissa päätöstilanteissa, joissa ensimmäisen osapuolen, hallussaan olevien kohteiden turvallisuutta maksimoivan puolustajan, on puolustusstrategiaansa valitessaan varauduttava siihen, että toinen osapuoli, vihollinen, ennen mahdollista hyökkäykseen ryhtymistään saa esim. vakoilun avulla puolustajan strategian tietoonsa.[1]

Liiketaloudellisen päätöksenteon parista on selvästikin löydettävissä tilanteita, jotka omaavat kaksivaiheisen maxmin-probleeman tyypilliset tunnusmerkit: kilpailevat osapuolet, osapuolten yhteisesti tavoittelema, alunperin toisen osapuolen hallussa oleva kohde, päätösten ajallinen kaksivaiheisuus. Sovellutuksena tutkimuksessa tarkastellaan kahta ominaisuuksiltaan ja hinnaltaan toisiaan vastaavaa merkkituotetta (tai niiden valmistajayrityksiä) ja näiden välistä kilpailua tuotteen markkinaosuuksista. Vaikutuskeinona tarkastellaan erityisesti mainonnan kohdentamista eri asiakasryhmiin. Ongelma puetaan maxmin-tyyppisen allokaatioprobleeman muotoon ja sille laaditaan matemaattinen malli, joka ratkaistaan maxmin-teorian tarjoamalla välineistöllä.

1 Kuvatun kaltaisista päätöstilanteista ja niiden ympärille kehitetystä erityisestä maxmin-teoriasta ks. Danskin, J.M: The Theory of Max-Min and its Application to Weapon Allocation Problems, Heidelberg 1967

2. Maxmin-tyyppisistä allokaatioprobleemoista

Maxmin-teoriaa voidaan pitää peliteorian erityishaarana, jolla on kuitenkin oma, yleisestä peliteoriasta poikkeava formalisminsa. Yleisen peliteorian tapaan tarkastellaan tilannetta, jossa kahdella osapuolella on tietty yhteinen tavoite tai kohde, jonka suhteen heidän etunsa ovat keskenään ristiriidassa. Osapuolet tekevät kumpikin tietyn ratkaisun, strategiavalinnan, siten, että toinen osapuoli pyrkii valinnallaan saamaan kohteeseen liittyvän, valittujen strategioiden vaikutuksia mittaavan tavoitefunktion arvon mahdollisimman suureksi, toinen osapuoli taas mahdollisimman pieneksi. Lisäksi strategiavalinnat on yleensä tehtävä tiettyjen reunaehtojen voimassa ollessa (äärellisten resurssien allokointi). Peliteoriasta poiketen tarkastellaan nyt kuitenkin päätöstilannetta, joka valintojen suhteen on epäsymmetrinen: toinen osapuoli joutuu tekemään (tai saa tehdä) valintansa ennen toista, jolla omaa valintaansa tehdessään on näin edellisen valitsema strategia tiedossaan.

Olkoot $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ja $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$ osapuolten suorittamat strategiavalinnat. Strategiat ovat tyypillisesti vektorisuureita, esimerkiksi jonkin äärellisen resurssin allokointia eri osakohteiden kesken. Olkoon päätösfunktio $F(x,y)$, ilmentäen strategiavalintojen vaikutuksia ensimmäisen osapuolen (x-pelaajan P_1) kannalta katsottuna.
Kun ensimmäiseksi "siirtävä" osapuoli P_1, joka siis haluaa maksimoida päätösfunktion arvon, suorittaa strategiavalintansa x, on hänen varauduttava siihen, että jälkimmäisenä siirtävä y-pelaaja P_2 saa tietoonsa tämän valinnan ja toimii sen mukaisesti, ts. valitsee y:n siten, että päätösfunktio $F(x,y)$ saavuttaa minimiarvonsa. Tuloksena on siten P_1:n alkuperäisestä valinnasta x riippuva funktio

$$(1)\qquad \varphi(x) = \min_y F(x,y).$$

P_1:n on siis alussa valittava x siten, että $\varphi(x)$ saa suurimman mahdollisen arvonsa eli että

$$(2)\qquad v = \max_x \varphi(x) = \max_x \min_y F(x,y)$$

saavutetaan. Ongelmana on siten etsiä yhtälössä (2) määritelty v:n arvo ja ne strategiat x ja y, jotka tähän johtavat. Mikäli funktio $F(x,y)$ on ominaisuuksiltaan sellainen, että

$$(3)\qquad \max_x \min_y F(x,y) = \min_y \max_x F(x,y),$$

palautuu ongelma tavalliseksi peliteoreettiseksi tehtäväksi, jolla on yksikäsitteinen satulapiste- (ns. puhdasstrategia-) ratkaisu. Yhtälön (3) mukainen tilanne toteutuu, mikäli pelaajien siirtojärjestys ei vaikuta lopputulokseen ts. jälkimmäisenä ratkaisunsa tekevällä osapuolella ei ole mitään hyötyä tästä asemastaan. Tavallisempi on kuitenkin tilanne[1]

$$(4)\qquad \max_x \min_y F(x,y) < \min_y \max_x F(x,y),$$

jolloin peliteoreettiset ratkaisut ovat sekastrategiaratkaisuja: pelaajat suorittavat valintansa arpomalla, tiettyjen ratkaisussa määräytyvien todennäköisyyksien mukaisesti. Nyt tarkasteltavana olevassa tilanteessa sekastrategioilla ei kuitenkaan ole mitään mieltä, koska P_2:lla on aina omaa ratkaisuaan tehdessään P_1:n strategiavalinta tiedossaan. P_2:n ei siten kannata arpoa, koska hän voi aidostikin minimoida. Tällöin putoaa pohja pois myös P_1:n sekastrategiavalinnalta, koska sen käyttö edellytti myös P_2:lta sekastrategiavalintaa.

Maxmin-probleemoille ratkaisun löytäminen on huomattavasti vaikeampaa kuin vastaaville äärellisille peleille. Ongelmana on erityisesti funktion $\varphi(x)$ hankala käyttäytyminen sellaisissakin tapauksissa, joissa $F(x,y)$ on säännöllinen, sileä funktio. Osoittautuu nimittäin, että $\varphi(x)$ on varsin harvoissa tapauksissa differentioituva, joten lausekkeessa (2) esiintyvä v:n arvo ja samalla koko ongelman ratkaisu on etsittävä muilla keinoin kuin analyysin standardimenetelmin. Tältä perustalta kohoaa koko maxmin-teoria.[2]

3. Mainonnan maxmin-strategiat

3.1. Tehtävän asettelu

Tarkastellaan nyt seuraavaa pelkistettyä ja yksinkertaistettua kilpailutilannetta ja siihen liittyviä strategianvalintaongelmia. Osapuoli P_1 on yritys, jolla tarkastelun alkuhetkellä on tietyn tuotteen (tyypillisenä esimerkkinä kotitalouk-

1 Tunnetustihan on aina $\max_x \min_y F(x,y) \le \min_y \max_x F(x,y)$

2 Ks. Danskin, J.M., mt. s. 19

sissa käytettävä astianpesuaine) markkinat kokonaan hallussaan. Markkinat on jaettu n:ään osaryhmään (alueeseen, kuluttajaryhmään tms.), jotka mahdollisesti poikkeavat toisistaan myyntiosuuksien, kuluttajakäyttäytymisen, mainosalttiuden jne. puolesta. Markkinoille on tulossa uusi yrittäjä omalla tuotteellaan, joka laadultaan, hinnaltaan ja muilta ominaisuuksiltaan vastaa täysin markkinoilla jo olevaa tuotetta. Markkinaosuuksista ajatellaankin nyt kilpailtavan lähinnä vain mainonnalla ja muilla sen kanssa yhteismitallisilla toimenpiteillä. Markkinoilla jo oleva yritys on nyt selvästikin osapuoli P_1, puolustaja, joka asemansa mahdollisimman hyvin säilyttääkseen yrittää varautua ja vastata P_2:n markkinoilletuloyritykseen käytettävissään olevan mainosbudjettinsa optimaalisella allokoinnilla eri kuluttajaryhmien kesken. Mainospanoksia kohdentaessaan osapuolen P_1 on varauduttava siihen, että tulokkaalla on omaa kampanjaansa suunnitellessaan P_1:n valitsemat menettelytavat tiedossaan.

P_1:n maksimoitavana (P_2:n minimoitavana) tavoitteena on P_1:n kokonaismarkkinaosuus, joka alkutilanteessa on = 1. Tavoitteisiinsa P_1 ja P_2 pyrkivät käytettävissään olevien mainosbudjettien X ja Y optimaalisella jakamisella ja kohdentamisella eri kuluttajaryhmille. Kokonaismarkkinaosuus allokointien $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ja $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jälkeen, $F(x,y)$, on selvästikin eri ryhmissä toteutuvien markkinaosuuksien $f_i(x_i,y_i)$ painotettu summa

(5) $$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} m_i f_i(x_i,y_i),$$

missä m_i:t merkitsevät tuotteen myyntiosuuksia eri ryhmissä. On siis voimassa

(6) $$0 \leq m_i \leq 1, \qquad i = 1,2,\ldots,n\,;$$

(7) $$\sum_{i=1}^{n} m_i = 1.$$

P_1:n markkinaosuudet $f_i(x_i,y_i)$ eri ryhmissä riippuvat, paitsi ryhmiin kohdistetuista mainospanoksista x_i ja y_i, ryhmiä luonnehtivista parametreista. Nämä riippuvuudet on pyrittävä kuvaamaan funktioiden f_i sopivilla valinnoilla. Olettamuksin

1° uudelta tulokkaalta vaaditaan tietyn mainospanoskynnyksen ylittäminen ($y_i > a_i x_i$) ennen kuin se alkaa lainkaan näkyä ja saada jalansijaa markkinoilla,

2° kynnyksen ylityksen jälkeen P_2:n oman markkinaosuuden kasvu ja samalla P_1:n osuuden väheneminen riippuvat kynnyksen ylityksen suuruudesta ja kohderyhmän mainosalttiudesta,

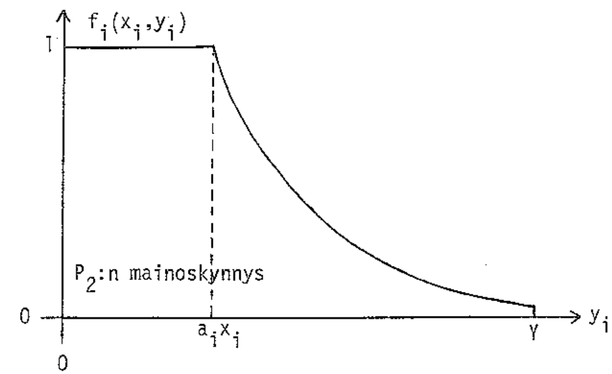
3° edellä mainittu riippuvuus noudattaa eksponentiaalisesti vähenevää lakia,

saavat funktiot $f_i(x_i,y_i)$ muodon

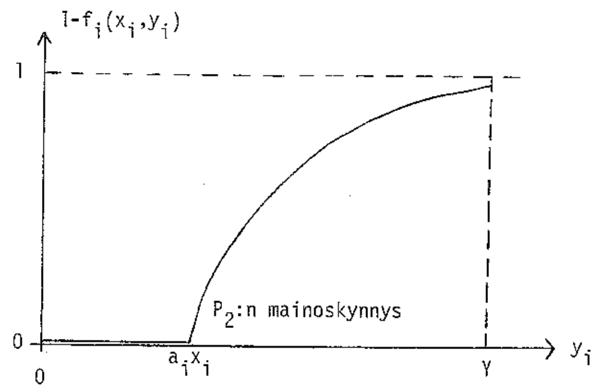
(8) $$f_i(x_i,y_i) = \begin{cases} 1, & \text{jos } y_i \leq a_i x_i \\ e^{-k_i(y_i - a_i x_i)}, & \text{jos } y_i > a_i x_i, \end{cases}$$

missä vakiot a_i ($a_i > 0$) ilmoittavat P_2:n mainospanoskynnysten suuruudet suhteessa P_1:n mainospanoksiin ja vakiot k_i ($k_i > 0$) ovat ryhmien mainosalttiuskertoimia.

Kilpailevien osapuolten markkinaosuuksien riippuvuus P_2:n mainospanoksesta (tietyllä kiinteällä P_1:n mainospanoksella) on graafisesti esitetty kuvioissa 1 ja 2. Vastaavanlaiset esitykset saataisiin markkinaosuuksien riippuvuudelle P_1:n mainospanoksesta, kehityksen suunta vain olisi luonnollisesti vastakkainen. Lisäksi on syytä todeta, että x_i:n kiinnittäminen ja $f_i(x_i,y_i)$:n tarkastelu y_i:n funktiona nimenomaan vastaa osapuolten "siirtojärjestystä".



Kuvio 1. P_1:n markkinaosuus kilpailijan mainospanoksen funktiona.



Kuvio 2. P_2:n markkinaosuus oman mainospanoksensa funktiona.

3.2. Malli

Tehtävänä on valita sellaiset P_1:n ja P_2:n strategiat $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ja $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$, että

$$(9) \qquad v = \max_x \min_y F(x,y) = \max_x \min_y \sum_{i=1}^{n} m_i f_i(x_i,y_i)$$

saavutetaan. Funktiot $f_i(x_i,y_i)$ on määritelty lausekkeina (8) ja vakiot m_i toteuttavat ehdot (6) ja (7). Strategiat x ja y on valittava reunaehtojen

$$(10) \qquad x \geq 0,\ \text{ts. } x_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,n \text{ ja } \sum_{i=1}^{n} x_i = X$$

$$(11) \qquad y \geq 0,\ \text{ts. } y_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,n \text{ ja } \sum_{i=1}^{n} y_i = Y$$

voimassa ollessa. Mallin suureilla on edellä esitetyllä tavalla seuraavat merkitykset:

i : kuluttajaryhmän ilmaiseva indeksi
X : P_1:n käytettävissä oleva kokonaismainosbudjetti
x_i: P_1:n ryhmään i kohdistama mainospanos

Y : P_2:n käytettävissä oleva kokonaismainosbudjetti
y_i: P_2:n ryhmään i kohdistama mainospanos
m_i: ryhmän i osuus tuotteen kokonaismyynnistä (vakio)
f_i: P_1:n markkinaosuus ryhmässä i (mainoskampanjoiden jälkeen)
a_i: P_2:n suhteellinen mainoskynnys ryhmässä i (vakio)
k_i: ryhmän i mainosalttiuskerroin (vakio)
F : P_1:n kokonaismarkkinaosuus (mainoskampanjoiden jälkeen)
v : F:n "tasapainoarvo".

3.3. Maxmin-strategiat

Ehtojen (6)-(11) määrittämän mallin ratkaisun yleiskulku on seuraava. P_1:n suoritettua oman ratkaisunsa P_2 valitsee tietyn määrän kohteita, kuluttajaryhmiä, joihin se keskittää koko mainosponnistuksensa (rahamäärän Y). Kohteita voi olla yksi, kaikki n kohdetta tai mikä tahansa näiden välimuoto. Mainospanosten jakautuminen niiden kohteiden kesken, jotka ovat P_2:n valinnassa mukana, määräytyy ns. Gibbs'in lemman mukaisesti: kustakin kohteesta saatavat rajahyödyt (= oman kokonaismarkkinaosuuden kasvunopeudet mainospanoksen lisäyksen suhteen eri ryhmissä) ovat keskenään yhtäsuuret. Kohteitten ja niiden lukumäärän valinta riippuu mallin parametrien arvojen keskinäisistä suhteista.

Omaa valintaansa tehdessään P_1 siis tietää, miten P_2 jakaa panoksensa niiden kohteiden kesken, jotka se valitsee, mutta ei tiedä, kuinka monta ja mitkä kohteet P_2 valitsee. P_1:n on siten alussa varauduttava eri mahdollisuuksiin kohteiden lukumäärän ja niiden valinnan suhteen. Kutakin P_2:n (vastaisuudessa valitsemaa) kohteiden lukumäärää kohti P_1 voi määrätä oman optimistrategiansa. Näistä P_1:n on valittava se, joka johtaa parhaaseen tulokseen, tekipä P_2 (optimitavalla kuitenkin toimiessaan) mitä tahansa.

Edellä esitetystä on jo pääteltävissä, että malli on yleisessäkin muodossaan algoritmisesti ratkaistavissa: on vain äärellinen määrä laadullisesti erilaisia käypiä ratkaisuja (= kohteiden valintakombinaatiot), ja kuhunkin laadullisesti erilaiseen käypään ratkaisuun liittyvä määrällinen ratkaisu (= mainospanoskomponenttien arvot) saadaan Gibbs'in lemman avulla. Käymällä systemaattisesti läpi kaikki laadullisesti erilaiset ratkaisut voidaan mallin optimiratkaisu, maxmin-strategiat $x^o = (x_1^o,x_2^o,\ldots,x_n^o)$ ja $y^o = (y_1^o,y_2^o,\ldots,y_n^o)$, sekä näihin liittyvä optimitulos $v^o = F(x^o,y^o)$ löytää.

Algoritmisen ratkaisun olemassaolo on kussakin yksittäistapauksessa, tunnetuilla parametrien arvoilla, tietysti täysin riittävä ongelman ratkaisemiseksi. Ratkaisun yleisestä luonteesta, kuten esimerkiksi sen riippuvuudesta parametrien arvoista, tällaisessa tapauksessa ei kuitenkaan voida tehdä johtopäätöksiä. Tätä tarkoitusta varten tarvitaan ratkaisu suljetussa muodossa: optimiratkaisu ja -tulos mallin parametrien funktiona. Mallin parametrien lukuisuudesta ja jaksossa 2 kuvatuista syistä johtuen suljettuun ratkaisuun päästään vain tietyissä erikoistapauksissa. Seuraavassa jaksossa esitetään erään erikoistapauksen täydellinen ratkaisu.

3.4. Erikoistapaus: Allokointi kahden kuluttajaryhmän kesken

Tehdään malliin (6)-(11) seuraavat lisäolettamukset. Tarkasteltavia ryhmiä on vain kaksi ($n = 2$). Mainoskynnys kummassakin ryhmässä oletetaan samaksi ($a_1 = a_2 = a$), mainosalttiudeltaan ryhmät sen sijaan poikkeavat toisistaan ($k_1 \geq k_2$). Tuotteen myyntiosuudet (kokonaisuudessaan) ovat ryhmittäin yhtä suuret ($m_1 = m_2 = 1/2$). Tarkasteltava malli on siten seuraava.
Etsittävä

$$(12) \qquad x^o = (x_1^o, x_2^o), \quad x_1^o \geq 0, \; x_2^o \geq 0, \; x_1^o + x_2^o = X > 0 \qquad \text{ja}$$

$$(13) \qquad y^o = (y_1^o, y_2^o), \quad y_1^o \geq 0, \; y_2^o \geq 0, \; y_1^o + y_2^o = Y > 0$$

siten, että saavutetaan

$$(14) \qquad v^o = \max_x \min_y F(x,y) = \max_x \min_y 1/2 \cdot \sum_{i=1}^{2} f_i(x_i, y_i)$$

$$= F(x^o, y^o) = 1/2 \cdot \sum_{i=1}^{2} f_i(x_i^o, y_i^o),$$

kun on merkitty

$$(15) \qquad f_i(x_i, y_i) = \begin{cases} 1, \text{ mikäli } y_i \leq ax_i \\ e^{-k_i(y_i - ax_i)}, \text{ mikäli } y_i > ax_i \; . \end{cases}$$

Ratkaisun etsiminen perustuu jaksossa 3.3. kuvattuun menettelyyn. Seuraavassa käydään mallin ratkaiseminen yksityiskohtaisesti läpi.

3.4.1. Gibbs'in lemma

Tapauksessa, jolloin osapuolen P_2 on edullisinta allokoida mainosbudjettinsa molempien kohderyhmien kesken, tämä allokointi tapahtuu em. Gibbs'in lemman mukaisesti. Esitetään sen vuoksi aluksi tämä lemma sekä sen sovellutus tarkasteltavaan ongelmaan.

Lemma 1 (Gibbs'in lemma).[1] Oletetaan, että funktiot $f_i(x_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$, ovat differentioituvia. Oletetaan edelleen, että funktio

$$(16) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

saavuttaa suurimman arvonsa, kun reunaehdot

$$(17) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = X \text{ ja } x_i \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

ovat voimassa, pisteessä $x^o = (x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)$. Tällöin on olemassa sellainen reaaliluku λ, että

$$(18) \qquad \frac{\partial F(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)}{\partial x_i} = f_i'(x_i^o) \begin{cases} = \lambda, \text{ jos } x_i^o > 0 \\ \leq \lambda, \text{ jos } x_i^o = 0 \end{cases}$$

Todistus. Olkoon $x^o = (x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o)$ lemmassa tarkoitettu piste ja olkoon $x_k^o > 0$. Olkoon j mielivaltainen indeksi, kuitenkin $j \neq k$. Toteuttakoon ε ehdon $0 \leq \varepsilon < x_k^o$.
Merkitään nyt

$$(19) \qquad h(\varepsilon) = f_k(x_k^o - \varepsilon) + f_j(x_j^o + \varepsilon) + \sum_{i \neq k,j} f_i(x_i^o).$$

Selvästikin näin muutettu x^o-piste edelleenkin toteuttaa lemman reunaehdot (17). Koska $h(\varepsilon)$ oletuksen perusteella saavuttaa suurimman arvonsa kohdassa $\varepsilon = 0$, on oltava $h'(0) \leq 0$. Yhtälöstä (19) saadaan derivoimalla (ε:n suhteen) ja sijoittamalla $\varepsilon = 0$

$$(20) \qquad h'(0) = -f_k'(x_k^o) + f_j'(x_j^o).$$

1 Lemman sisältämän tuloksen on esittänyt J.W. Gibbs jo v. 1876, ks. Danskin, mt. s. 10; Gibbs'in lemmaa vastaava tulos on yleisemminkin tunnettu: hintateorian rajahyödyn periaate, klassillisen variaatiolaskennan Eulerin yhtälöt jne.

Ottamalla huomioon ehto $h'(0) \leq 0$ saadaan (20):stä edelleen

$$(21) \qquad f_j'(x_j^o) \leq f_k'(x_k^o).$$

Tulos (21) saatiin oletuksesta $x_k^o > 0$ lähtien. Mikäli nyt myös $x_j^o > 0$, saadaan samalla tavalla

$$(22) \qquad f_k'(x_k^o) \leq f_j'(x_j^o),$$

eli (21) ja (22) yhdessä antavat

$$(23) \qquad f_k'(x_k^o) = f_j'(x_j^o).$$

Täten kaikilla niillä derivaatoilla $f_i'(x_i^o)$, joilla $x_i^o > 0$, on yhteinen arvo, jota voidaan merkitä luvulla λ. Ehdosta (21) taas nähdään, että $f_j'(x_j^o) \leq \lambda$, jos $x_j^o = 0$. Lemma on näin osoitettu oikeaksi.

Lemma 2. Oletetaan, että P_2:n optimistrategiana mallissa (12)-(15) kiinteätä (optimaalista tai ei-optimaalista) P_1:n strategiaa $x = (x_1, x_2)$ kohti on rahamäärän Y allokointi molempiin kohteisiin, ts. että $y_1^o > 0$ ja $y_2^o > 0$. Tällöin on

$$(24) \qquad \begin{cases} y_1^o = ax_1 + \dfrac{1}{k_1+k_2}\ln(k_1/k_2) + \dfrac{k_2}{k_1+k_2}(Y - aX) \\[2ex] y_2^o = ax_2 - \dfrac{1}{k_1+k_2}\ln(k_1/k_2) + \dfrac{k_1}{k_1+k_2}(Y - aX). \end{cases}$$

Todistus. Koska P_2 tekee valintansa P_1:n jälkeen ja tämän menettelyn tietäen, on selvää, että $y_i^o > 0$ silloin ja vain silloin, kun $y_i^o > ax_i$, $i = 1,2$. Sillä oletetaan, että P_2 valitsisi jommassa kummassa kohteessa k $0 < \bar{y}_k \leq ax_k$. Tällöin olisi (15):n mukaisesti $f_k(x_k, \bar{y}_k) = 1$. Nyt P_2 saavuttaisi kuitenkin myös valinnalla $y_k = 0$ tuloksen $f_k(x_k, 0) = 1$. P_2 voisi näin siirtää summan $\bar{y}_k$ toisen kohteen hyväksi ilman, että sillä olisi vaikutusta kohteeseen k liittyvän funktion arvoon. Valinta $\bar{y}_k$ ei siis voi olla optimaalinen.
P_2:n allokointi molempiin kohteisiin voi siten olla optimaalinen vain, kun samalla on $y_1 > ax_1$ ja $y_2 > ax_2$ (tämän välttämättömän ehdon toteutuminen asettaa tiettyjä ehtoja mallin parametrien välisille suhteille; näihin kysymyksiin palataan myöhemmin). Tällöin ovat f_i-funktiot muotoa

$$(25) \qquad f_i(x_i, y_i) = e^{-k_i(y_i - ax_i)}, \quad i = 1,2.$$

P_2:n tehtävänä on siis etsiä ehdot (13) täyttävä $y^o = (y_1^o, y_2^o)$, joka minimoi funktion

$$(26) \qquad H(y_1, y_2) = \frac{1}{2}\left\{e^{-k_1(y_1 - ax_1)} + e^{-k_2(y_2 - ax_2)}\right\},$$

eli maksimoi funktion

$$(27) \qquad H_1(y_1, y_2) = -e^{-k_1(y_1 - ax_1)} - e^{-k_2(y_2 - ax_2)}.$$

Funktiolle (27) ovat nyt Gibbs'in lemman ehdot voimassa. Optimistrategialle y^o pätee näin ollen

$$(28) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_1(y_1^o, y_2^o)}{\partial y_1} = k_1 e^{-k_1(y_1^o - ax_1)} = \lambda \\[2ex] \dfrac{\partial H_1(y_1^o, y_2^o)}{\partial y_2} = k_2 e^{-k_2(y_2^o - ax_2)} = \lambda, \end{cases}$$

missä λ on toistaiseksi tuntematon. Yhtälöistä (28) saadaan ensin

$$(29) \qquad \begin{cases} y_1^o - ax_1 = (1/k_1)\ln(k_1/\lambda) \\ y_2^o - ax_2 = (1/k_2)\ln(k_2/\lambda) \end{cases}$$

ja näistä yhteenlaskemalla ja reunaehdot (12) ja (13) huomioon ottamalla

$$(30) \qquad Y - aX = \ln\left\{k_1^{1/k_1} k_2^{1/k_2} \lambda^{-\frac{k_1+k_2}{k_1 k_2}}\right\}.$$

Yhtälöstä (30) saadaan lauseke λ:lle

$$(31) \qquad \lambda = k_1^{\frac{k_2}{k_1+k_2}} k_2^{\frac{k_1}{k_1+k_2}} e^{-\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}(Y - aX)},$$

mikä (29):ään sijoitettuna antaa tulokseksi väitetyt yhtälöt (24). Lemma on näin todistettu.

3.4.2. Ratkaisun johtaminen

3.4.2.1. Tapaus $aX \geq 2Y$

Lemma 3. P_1:n optimistrategia on jokainen ehdot

$$(32) \qquad x_1^o \geq \frac{1}{a}\,Y, \quad x_2^o \geq \frac{1}{a}\,Y, \quad x_1^o + x_2^o = X$$

toteuttava strategia $x^o = (x_1^o, x_2^o)$. P_2:n optimistrategia on mikä tahansa käypä strategia (13). Optimitulos on

$$(33) \qquad v^o = \frac{1}{2}\left\{f_1(x_1^o, y_1^o) + f_2(x_2^o, y_2^o)\right\} = \frac{1}{2}\,(1+1) = 1 .$$

Todistus. Lemma on täysin ilmeinen. Valinnallaan (32) P_1 aikaansaa tilanteen, jossa P_2 ei kummassakaan kohteessa pysty ylittämään mainoskynnystä $ax_i^o \geq Y$. Näin jää P_2:n suorittama valinta vaille merkitystä, kaikki strategiat johtavat samaan tulokseen (33).

Markkinoille pyrkivällä P_2:lla on tässä tapauksessa käytettävissään (P_1:een verrattuna) niin niukka mainosbudjetti Y, että se ei pysty valtaamaan minkäänlaista jalansijaa kummassakaan kohteessa, markkinat jäävät kokonaisuudessaan P_1:n haltuun.

3.4.2.2. Tapaus $Y - (1/k_1)\ln(k_1/k_2) \leq aX < 2Y$

Lemma 4. Mikäli otsikossa mainitun ehdon lisäksi on voimassa $aX > (1 - \frac{k_2}{k_1})Y$, on P_1:n optimistrategia

$$(34) \qquad \begin{cases} x_1^o = \dfrac{k_2 aX + (k_1-k_2)Y}{a(k_1+k_2)} \\[2ex] x_2^o = \dfrac{k_1 aX - (k_1-k_2)Y}{a(k_1+k_2)} \end{cases}$$

ja P_2:n optimistrategia kumpi tahansa strategioista

$$(35) \qquad y^o = (Y,0) \quad \text{tai}$$

$$(36) \qquad y^o = (0,Y),$$

ja optimitulos on

$$(37) \qquad v^o = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(2Y-aX)}\right\}.$$

Mikäli taas on $aX \leq (1 - \frac{k_2}{k_1})Y$, ovat optimistrategiat P_1:lle

$$(38) \qquad x^o = (X,0)$$

ja P_2:lle (35), tapauksessa $aX = (1 - \frac{k_2}{k_1})Y$ myös (36). Optimitulos on

$$(39) \qquad v^o = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_1(Y-aX)}\right\}.$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että ehto $Y-(1/k_1)\ln(k_1/k_2) \leq aX < 2Y$ johtaa siihen, että P_2 valitsee vain toisen kohteista. Jotta P_2:n kannattaisi allokoida molempiin kohteisiin, on oltava ainakin (vrt. lemman 2 todistus) $y_1 > ax_1$ ja $y_2 > ax_2$. Tästä saadaan heti ehto $Y > aX$ eli $Y-aX > 0$. Lisäksi on oltava (24):n perusteella

$$(40) \qquad \frac{1}{k_1+k_2}\ln(k_1/k_2) + \frac{k_2}{k_1+k_2}(Y-aX) > 0 \quad \text{ja}$$

$$(41) \qquad -\frac{1}{k_1+k_2}\ln(k_1/k_2) + \frac{k_1}{k_1+k_2}(Y-aX) > 0 .$$

Ehto (40) ei aiheuta lisärajoituksia, koska olettamusten mukaan $k_1 \geq k_2$ ja edellä on jo vaadittu $Y-aX > 0$.
Ehdosta (41) sen sijaan saadaan lisärajoitus P_2:n mahdollisuudelle allokoida molempiin kohteisiin: $Y-aX > (1/k_1)\ln(k_1/k_2)$ eli

$$(42) \qquad aX < Y-(1/k_1)\ln(k_1/k_2).$$

Näin on osoitettu, että jakson 3.4.2.2. ehdolla P_2:n optimistrategiana on välttämättä vain toiseen kohteeseen keskittyminen.
Tarkastellaan siksi seuraavaksi P_1:n mahdollisia strategioita ja P_2:n muotoa $y = (Y,0)$ tai $y = (0,Y)$ olevia "vastauksia" niihin. Saadaan seuraavat kuusi laadullisesti erilaista kombinaatiota

$$(43)\quad x_a = (0,X),\ y_a = (Y,0),\ v_a = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_1 Y}\right\}$$

$$(44)\quad x_b = (0,X),\ y_b = (0,Y),\ v_b = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_2(Y-aX)}\right\}$$

$$(45)\quad x_c = (X,0),\ y_c = (Y,0),\ v_c = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_1(Y-aX)}\right\}$$

$$(46)\quad x_d = (X,0),\ y_d = (0,Y),\ v_d = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_2 Y}\right\}$$

$$(47)\quad x_e = (x_1,x_2),\ y_e = (Y,0),\ v_e = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_1(Y-ax_1)}\right\}$$

$$(48)\quad x_f = (x_1,x_2),\ y_f = (0,Y),\ v_f = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_2(Y-ax_2)}\right\}.$$

Vaihtoehdoissa (47) ja (48) (positiivisten) komponenttien arvot ovat toistaiseksi tuntemattomia.
Nyt voidaan heti todeta, että (44) ei voi olla tehtävän ratkaisu. Sillä mikäli P_1 valitsee strategian $x = (0,X)$, ei P_2:n kannata valita $y_b = (0,Y)$, koska

$$(49)\quad v_b = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_2(Y-aX)}\right\} \geq \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_1(Y-aX)}\right\} > \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_1 Y}\right\} = v_a .$$

P_1:n strategiaa $x = (0,X)$ vastaa näin ollen aina P_2:n strategia $y = (Y,0)$ ja tulos on $v = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_1 Y}\right\}$.

P_1:n strategiaa $x = (X,0)$ vastaavaa P_2:n strategiaa ei voida samalla tavalla kuin edellä suoraan todeta, vaan se jää riippumaan lausekkeen

$$(50)\quad U = aX - (1 - \frac{k_2}{k_1})Y$$

merkistä. Mikäli $U > 0$, on $k_2Y > k_1(Y-aX)$ eli $v_c > v_d$, jolloin P_2:n valinta on $y_d = (0,Y)$ ja tulos v_d. Tapauksessa $U < 0$ on $v_c < v_d$, joten P_2:n valinta on $y_c = (Y,0)$ ja tulos v_c. Tapauksessa $U = 0$, P_2 on indifferentti strategioitten y_c ja y_d kesken.

Kolmantena mahdollisuutena P_1:lle on allokoida molempien kohteiden kesken, tapaukset e ja f edellä. Koska nyt P_2 tulee keskittymään vain toiseen kohteista ja P_1 tietää tämän (P_2:n tuleva käyttäytyminen määräytyy suoraan parametrien arvoista), on P_1:n valittava strategiansa $x = (x_1,x_2)$ siten, että tulos on sama valitsipa P_2 strategian $y_e = (Y,0)$ tai $y_f = (0,Y)$ ts. siten että $v_e = v_f$:

$$(51)\quad \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_1(Y-ax_1)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_2(Y-ax_2)}\right\} .$$

Yhtälöstä (51) ja ehdosta $x_1 + x_2 = X$ saadaan ratkaistuksi P_1:n strategia

$$(52)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{k_2aX + (k_1-k_2)Y}{a(k_1+k_2)} \\[2ex] x_2 = \dfrac{k_1aX - (k_1-k_2)Y}{a(k_1+k_2)} \end{cases} .$$

P_1 siis pyrkii saattamaan molemmat kohteet yhtä vahvoiksi P_2:n toimenpiteitä vastaan. Strategia (52) on kuitenkin käypä vain, mikäli siinä on $x_1 > 0$ (on aina) ja $x_2 > 0$. Jälkimmäinen ehto antaa $k_1aX - (k_1-k_2)Y > 0$ eli on oltava $U > 0$.
P_1:n strategian ollessa (52) on P_2:n optimivastaus joko $y = (Y,0)$ tai $y = (0,Y)$. Tulos saadaan (47):stä tai (48):sta sijoittamalla tähän (52):n mukainen x_1:n (x_2:n) lauseke:

$$(53)\quad v = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(2Y-aX)}\right\} .$$

Nyt on siis selvitetty P_2:n optimivalinta kutakin P_1:n suorittamaa valintaa kohti. Vielä on ratkaisematta P_1:n optimaalinen käyttäytyminen ja sitä kautta koko tehtävän ratkaisu kyseessä olevilla parametrien arvoilla. Edellä on lisäksi käynyt ilmi, että lausekkeen U merkki on varsin tärkeä valinnan peruste sekä P_1:lle että P_2:lle. Jaetaan siksi tarkastelu osiin tämän perusteella.
Olkoon ensin $U > 0$ eli $aX > (1 - \frac{k_2}{k_1})Y$ (lemman alkuosa). Vertailtavana ovat nyt seuraavat P_1:n strategiat ja niihin liittyvät P_2:n optimivastaukset ja tulokset:

$$(54)\qquad x_I = (X,0),\quad y_I = (0,Y),\quad v_I = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_2Y}\right\}$$

$$(55)\qquad x_{II} = (0,X),\quad y_{II} = (Y,0),\quad v_{II} = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_1Y}\right\}$$

$$(56)\qquad x_{III} = (x_1,x_2),\quad y_{III} = \begin{cases}(Y,0)\\(0,Y)\end{cases},\quad v_{III} = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(2Y-aX)}\right\}.$$

(56):ssa x_{III}:n komponentit ovat (52):n mukaiset. Koska $k_1 \geq k_2$, on $v_I \geq v_{II}$. Näin ollen P_1:n ei kannata valita ainakaan vaihtoehtoa x_{II}. Edelleen on

$$(57)\qquad v_{III}-v_I = \frac{1}{2}\left\{e^{-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(2Y-aX)} - e^{-k_2Y}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-k_2Y}\left\{e^{\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\left[aX-\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right)Y\right]} - 1\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-k_2Y}\left\{e^{\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}U} - 1\right\} > 0,$$

koska $U > 0$. P_1 siis valitsee x_{III}:n, jonka jälkeen P_2 kumman tahansan vaihtoehdoista $y = (Y,0)$ tai $y = (0,Y)$. Näin on lemman alkuosa (kaavat (34)-(37)) osoitettu oikeaksi.

Oletetaan toiseksi, että $U < 0$ eli $aX < (1 - \frac{k_2}{k_1})Y$. P_1:lle mahdollisia valintoja ovat nyt vain $x_I = (X,0)$ ja $x_{II} = (0,X)$. Kummassakin tapauksessa P_2:n optimivastaus on $y_I = y_{II} = (Y,0)$. Tulokset ovat vastaavasti

$$(58)\qquad v_I = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_1(Y-aX)}\right\}\quad \text{ja}$$

$$(59)\qquad v_{II} = \frac{1}{2}\left\{1 + e^{-k_1Y}\right\},$$

joista selvästi $v_I > v_{II}$. Tehtävän ratkaisu tapauksessa $U < 0$ on siten kaavojen (35), (38) ja (39) mukainen, kuten lemmassa väitettiinkin. Tapaus $U = 0$ on tapausten $U > 0$ ja $U < 0$ rajatapaus, P_1:n optimistrategia saadaan joko (38):sta tai (34):stä (missä nyt $x_1 = X$, $x_2 = 0$), P_2:n optimistrategia on (35) tai (36) ja tulos on (37) tai (39), jotka nyt yhtyvät. Lemma on näin kokonaisuudessaan todistettu.

Lemman 4 edustamassa tilanteessa P_2:n mainosbudjetti on jo jonkin verran vahvistunut lemman 3 mukaiseen tilanteeseen verrattuna, mutta on edelleenkin sen verran niukka, että vain mainospanosten keskittäminen toiseen kohteista tuottaa P_2:lle näkyviä tuloksia. Toiset markkinat säilyvät kokonaisuudessaan P_1:llä. P_2:n käyttäytymisen luonne siis määräytyy P_1:n ja P_2:n mainosbudjettien absoluuttisesti mitattujen suuruussuhteiden perusteella, sillä onhan voimassa ehto $Y - (1/k_1)\ln(k_1/k_2) \leq aX < 2Y$. P_1:n käyttäytyminen puolestaan määräytyy budjettien suhteellisten suuruuksien perusteella, onhan ratkaisun avaimena lausekkeen $U = aX - (1 - \frac{k_2}{k_1})Y$ merkki. P_1 pyrkii saattamaan molemmat kohteet yhtä vahvoiksi P_2:n toimenpiteisiin nähden, ja onnistuukin tässä, mikäli $U \geq 0$ (tulos näkyy myös P_2:n optimistrategian kaksikäsitteisyytenä), mutta tapauksessa $U < 0$ kohde 1 jää mainonnan keskittämisestä huolimatta alttiimmaksi P_2:n toimenpiteille, mitä P_2 puolestaan käyttää hyväkseen omassa strategiavalinnassaan.

3.4.2.3. Tapaus $Y - (1/k_1)\ln(k_1/k_2) > aX$

Lemma 5. Mikäli otsikossa mainitun ehdon lisäksi on voimassa $U > 0$ (vrt. (50)), on P_1:n optimistrategia (34). P_2:n optimistrategia on joko kumpi tahansa strategioista (35) tai (36), jolloin optimitulos on (37), tai

$$(60)\qquad \begin{cases} y_1^0 = \dfrac{1}{k_1+k_2}\left\{k_1Y + \ln(k_1/k_2)\right\} \\[2ex] y_2^0 = \dfrac{1}{k_1+k_2}\left\{k_2Y - \ln(k_1/k_2)\right\}, \end{cases}$$

jolloin optimitulos on

$$(61)\qquad v^0 = \frac{1}{2}(k_1+k_2)k_1^{-\frac{k_1}{k_1+k_2}}k_2^{-\frac{k_2}{k_1+k_2}}e^{-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(Y-aX)}.$$

Edellinen vaihtoehto toteutuu, kun $aX > g(y)$, vaihtoehdot tuottavat saman ratkaisun ja tuloksen, kun $aX = g(Y)$, ja jälkimmäinen vaihtoehto toteutuu, kun $aX < g(Y)$. Edellä on merkitty

$$(62)\qquad g(Y) = Y - \frac{k_1+k_2}{k_1k_2}\ln\left\{(k_1+k_2)k_1^{-\frac{k_1}{k_1+k_2}}k_2^{-\frac{k_2}{k_1+k_2}} - e^{-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}Y}\right\}.$$

Mikäli taas on $U \leq 0$, on P_1:n optimistrategia (38) ja P_2:n (60), tulos on (61).

Todistus. Lemman 4 todistuksen yhteydessä (epäyhtälö (42)) saatiin välttämätön ehto P_2:n mahdollisuudelle allokoida molempiin kohteisiin Gibbs'in lemman edellyttämällä tavalla. Mainittu ehto on nyt oletuksen mukaan voimassa. Allokointi molempiin kohteisiin ei silti ilman muuta ole optimaalinen P_2:lle, vaan keskittyminen toiseen kohteista voi yhä olla edullisempi.

Käsitellään ensiksi tapaus $U > 0$. Mikäli P_1 tietäisi P_2:n valitsevan vain toisen kohteista, se valitsisi "tasapainostrategian" (34). P_2:n taas allokoidessa molempiin kohteisiin, jolloin tämä allokointi tapahtuu (24):n mukaisesti, ei P_1:n suorittamalla valinnalla ole merkitystä, koska P_2 suorittaa valintansa siten, että erotukset $y_i - ax_i$ (mainoskynnyksen ylitykset) ovat P_1:n strategiasta riippumattomia vakioita. Siis P_1 voi tässäkin tapauksessa valita strategian (34), joka näin ollen on P_1:n optimistrategia.
P_2:n optimistrategia on nyt joko allokointi molempiin kohteisiin: $y_I = (y_1, y_2)$, missä y_1 ja y_2 saadaan (24):stä, kun lisäksi P_1:n strategiana on (34), jolloin

$$(63)\qquad y_I = \left(\frac{1}{k_1+k_2}\left\{k_1Y+\ln(k_1/k_2)\right\}, \frac{1}{k_1+k_2}\left\{k_2Y-\ln(k_1/k_2)\right\}\right)$$

$$(64)\qquad v_I = \frac{1}{2}(k_1+k_2)k_1^{-\frac{k_1}{k_1+k_2}}\,k_2^{-\frac{k_2}{k_1+k_2}}\,e^{-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(Y-aX)},$$

tai keskittyminen toiseen (kumpaan tahansa) kohteista, jolloin

$$(65)\qquad v_{II} = \frac{1}{2}\left\{1+e^{-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(2Y-aX)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{1+e^{-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(Y-aX)}\,e^{\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}Y}\right\}.$$

Jakson otsikossa mainittu ehto voidaan kirjoittaa myös erotukselle $Y-aX$ muotoon

$$(66)\qquad (1/k_1)\ln(k_1/k_2) < Y-aX < \infty\,.$$

Suurilla Y:n arvoilla ja erotuksen $Y-aX$ alarajalla on

$$(67)\qquad \lim_{\substack{Y-aX\to(1/k_1)\ln(k_1/k_2)\\ (Y\to\infty)}} v_I = \frac{1}{2}\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right) > \frac{1}{2} \qquad \text{ja}$$

$$(68)\qquad \lim_{\substack{Y-aX\to(1/k_1)\ln(k_1/k_2)\\ Y\to\infty}} v_{II} = \frac{1}{2}\,,$$

ts. on olemassa sellaiset Y ja X (muut parametrit kiinnitettyjä), että $v_I > v_{II}$. Toisaalta taas erotuksen $Y-aX$ ylärajalla on

$$(69)\qquad \lim_{Y-aX\to\infty} v_I = 0 \qquad \text{ja}$$

$$(70)\qquad \lim_{Y-aX\to\infty} v_{II} = \frac{1}{2}$$

(raja-arvoja (69) ja (70) muodostettaessa on pidettävä huoli siitä, että myös ehto $U > 0$ eli ehto $Y-aX < (k_2/k_1)Y$ toteutuu; tämä saadaan aikaan sopivalla X:n valinnalla), joten on olemassa myös sellaiset Y ja X, joilla $v_I < v_{II}$. Tilanne on siis ratkaistava tapaus kerrallaan: lasketaan v_I ja v_{II} yhtälöistä (64) ja (65), minkä jälkeen P_2:n optimistrategia on pienempään tulokseen johtava strategia. Optimiehto voidaan lausua myös suljetussa muodossa, tosin verraten monimutkaisessa. Saadaan

$$(71)\qquad v_I - v_{II} = aX - g(Y),$$

missä $g(Y)$ on (62):n mukainen. Mikäli nyt $aX > g(Y)$ eli $v_I > v_{II}$, on P_2:n optimistrategiana toiseen kohteista keskittyminen, ts. (35) tai (36) ja optimituloksena v_{II} eli (37). Tapauksessa $aX < g(Y)$ on $v_I < v_{II}$, joten P_2:n optimistrategia on y_I eli (60) ja optimitulos v_I eli (61). Tapauksessa $aX = g(Y)$ y_I ja y_{II} sekä v_I ja v_{II} yhtyvät. Näin on lemman alkuosa (tapaus $U > 0$) loppuun käsitelty.

Tarkastellaan toiseksi tapausta $U \leq 0$. P_1:n ei nyt ole mahdollista valita tasapainostrategiaa (34), koska se ei ole käypä ($x_2 < 0$), vaan P_1 käyttää koko summan X kohteeseen 1. Sillä mikäli P_2:n optimistrategiana on toiseen kohteeseen keskittyminen, on P_1:n välttämättä valittava $x = (X,0)$ (vrt. lemman 4 todistus tapauksessa $U \leq 0$) ja mikäli taas P_2:n optimistrategia on allokointi molempiin kohteisiin eli (24), ei P_1:n valinnalla ole merkitystä. Strategia $x = (X,0)$ on siten optimaalinen P_1:lle, tekipä P_2 mitä hyvänsä.
Mikäli P_2 allokoi (optimaalisesti) molempiin kohteisiin, on strategiana (63) ja sitä vastaavana tuloksena (64). Optimaalinen keskittyminen vain toiseen kohteista taas merkitsee (koska $U \leq 0$) strategiaa $y_{II} = (Y,0)$ ja tulosta

$$(72)\qquad v_{II} = \frac{1}{2}\left\{1+e^{-k_1(Y-aX)}\right\}.$$

Kumpi näistä vaihtoehdoista on optimi, määräytyy v_I:n ja v_{II}:n suuruussuhteiden perusteella. Nyt on

$$(73) \qquad v_I - v_{II} = \frac{1}{2}\left\{e^{-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(Y-aX)}\left[(k_1+k_2)k_1^{-\frac{k_1}{k_1+k_2}}k_2^{-\frac{k_2}{k_1+k_2}} - e^{-\frac{k_1^2}{k_1+k_2}(Y-aX)}\right] - 1\right\}.$$

Lausekkeen (73) raja-arvoiksi saadaan

$$(74) \qquad \lim_{Y-aX\to\infty}(v_I - v_{II}) = -\frac{1}{2} \quad \text{ja}$$

$$(75) \qquad \lim_{Y-aX\to(1/k_1)\ln(k_1/k_2)}(v_I - v_{II}) = 0$$

(raja-arvot (74) ja (75) muodostettaessa voidaan lisäksi liikkua vain sillä alueella, jossa ehto $U \leq 0$ eli ehto $Y-aX \geq (k_2/k_1)Y$ on voimassa).

Edelleen on

$$(76) \qquad \frac{d(v_I - v_{II})}{d(Y-aX)} = \frac{1}{2}(k_1+k_2)k_1^{-\frac{k_1}{k_1+k_2}}k_2^{-\frac{k_2}{k_1+k_2}}\left(-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\right)e^{-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(Y-aX)}$$

$$+\frac{1}{2}k_1e^{-k_1(Y-aX)}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(Y-aX)}\left\{k_1e^{-\frac{k_1^2}{k_1+k_2}(Y-aX)} - k_1^{\frac{k_2}{k_1+k_2}}k_2^{\frac{k_1}{k_1+k_2}}\right\}.$$

Koska $Y-aX > (1/k_1)\ln(k_1/k_2)$ on (76):ssa

$$(77) \qquad k_1e^{-\frac{k_1^2}{k_1+k_2}(Y-aX)} - k_1^{\frac{k_2}{k_1+k_2}}k_2^{\frac{k_1}{k_1+k_2}}$$

$$< k_1k_1^{-\frac{k_1}{k_1+k_2}}k_2^{\frac{k_1}{k_1+k_2}} - k_1^{\frac{k_2}{k_1+k_2}}k_2^{\frac{k_1}{k_1+k_2}} = 0,$$

joten

$$(78) \qquad \frac{d(v_I - v_{II})}{d(Y-aX)} < 0.$$

Ehdoista (74), (75) ja (78) nähdään, että on aina $v_I < v_{II}$, joten P_2:n optimistrategiana on y_I eli (60) ja tuloksena v_I eli (61). Lemma on näin kokonaisuudessaan osoitettu oikeaksi.

Lemman 5 edustamassa tilanteessa P_2:n mainosbudjetti on edelleen vahvistunut P_1:n budjettiin verrattuna. P_2 voi jo yrittää jalansijaa molemmilla markkinoilla, vaikkakaan ei sitä välttämättä tee. P_2 tukeutuu molemmille markkinoille, mikäli $aX \leq (1 - \frac{k_2}{k_1})Y$ tai $aX > (1 - \frac{k_2}{k_1})Y$ ja samalla $aX < g(Y)$, ja keskittyy vain itselleen otollisempaan kohteeseen (kohde 1), mikäli $aX > (1 - \frac{k_2}{k_1})Y$ ja lisäksi $aX \geq g(Y)$. Markkinoita vallataan edellisessä tapauksessa siten, että saatava rajahyöty muodostuu kummastakin kohteesta yhtä suureksi. P_1:n käyttäytyminen määräytyy tässäkin tapauksessa budjettien suhteellisten suuruuksien perusteella: P_1 valitsee kohteet tasapainoittavan strategian mukaisesti, mikäli $aX \geq (1 - \frac{k_2}{k_1})Y$, ja keskittyy P_2:n toimenpiteille alttiimpaan kohteeseen 1, mikäli $aX < (1 - \frac{k_2}{k_1})Y$.

3.4.2.4. Yhteenveto ratkaisusta

Mikäli jätetään pois tarkastelusta jakson 3.4.2.1. edustama triviaali tapaus $aX \geq 2Y$, voidaan tehtävän ratkaisua kuvata seuraavalla nelikentällä.

	$Y-(1/k_1)\ln(k_1/k_2) < aX$	$Y-(1/k_1)\ln(k_1/k_2) > aX$
$aX > (1 - \frac{k_2}{k_1})Y$	$x^0=(x_1^0,x_2^0)$ (34):stä $y^0=\begin{cases}(Y,0)\\(0,Y)\end{cases}$ $v^0=\frac{1}{2}\left\{1+e^{-\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}(2Y-aX)}\right\}$	$x^0=(x_1^0,x_2^0)$ (34):stä $y^0=\begin{cases}(Y,0)\\(0,Y)\end{cases}$ v^0 (61):stä $aX > g(Y)$ $aX < g(Y)$ $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ (34):stä $y^0=(y_1^0,y_2^0)$ (60):stä v^0 (61):stä
$aX < (1 - \frac{k_2}{k_1})Y$	$x^0=(X,0)$ $y^0=(Y,0)$ $v^0=\frac{1}{2}\left\{1+e^{-k_1(Y-aX)}\right\}$	$x^0=(X,0)$ $y^0=(y_1^0,y_2^0)$ (60):stä v^0 (61):stä

Allokointitehtävän ratkaisu mallin parametrien funktiona

Kuviosta huomataan, että tehtävän ratkaisun perusluonne on varsin selkeä. P_1:llä ja P_2:lla on kummallakin omat kriteerinsä, P_1:llä lausekkeen $U = aX - (1 - \frac{k_2}{k_1})Y$, P_2:lla lausekkeen $V = Y - aX - (1/k_1)\ln(k_1/k_2)$ merkki. Oikeassa ylänurkassa olevassa ruudussa tarvitaan P_2:n strategian luonteen selvittämiseksi lisäksi lausekkeen $W = aX - g(Y)$ merkki. Ratkaisun määrälliset arvot saadaan tämän jälkeen ruuduissa mainituista kaavoista.

4. Lopuksi

Tässä artikkelissa on esitetty lyhyt yleiskatsaus ongelmiin, jotka käsittelevät kahden osapuolen välistä kaksivaiheista kilpailutilannetta, ja tähän liittyviä maxmin-päätösprobleemoita: osapuolilla on yhteinen tavoite, johon liittyvä hyöty riippuu osapuolten täydellisen informaation vallitessa ja ajallisesti peräkkäin tekemistä ratkaisuista. Artikkelissa on pyritty osoittamaan, että myös liiketaloudellisen päätöksenteon piiristä on löydettävissä kuvatun kaltaiset tunnusmerkit täyttäviä päätöstilanteita. Konkreettisena sovellutuskohteena on tarkasteltu kahden tuotteen tai niiden valmistajayritysten välistä kilpailua markkinaosuuksista. Maxmin-metodin esittelemiseksi tilannetta on kuvattu yksinkertaisella ja pelkistetyllä mallilla, jonka ratkaisun yleiset periaatteet myös on esitetty. Mallin ratkaisua ja ratkaisun riippuvuutta mallin parametreista on tarkasteltu lopuksi erikoistapauksen valossa.

Esitettyä mallia on pidettävä pikemminkin maxmin-metodin esittelynä kuin pyrkimyksenä todellisen ongelmatilanteen tarkkaan kuvaukseen. Mikäli lähestymistavalle on kuitenkin löydettävissä yleistä relevanssia tarkasteltavissa yhteyksissä, myös mallin rakenteeseen ja ominaisuuksiin on syytä ja mahdollista jatkossa kiinnittää suurempaa huomiota.

OPTIMAL ALLOCATION OF AN ADVERTISING BUDGET AS A TWO-STAGE MAX-MIN DECISION PROBLEM

Summary

The paper deals with a finite two-stage allocation problem of the following max-min type. There are two antagonists, and one must act first, knowing that the second will learn what he has done and then act to his best advantage. What should the first (and afterwards the second, of course, too) do?

Max-min problems are quite typical to the military sector, they arise especially in large-scale weapons selection problems. The aim of the present paper is to show, that also among management decision making one can find decision problems which have the characteristics of a max-min problem. As a concrete application the paper considers the competition between two brands (or their manufacturers) for the market share of a given product. The means of competition is the direction of advertising (the allocation of the disposable advertising budget) for different consumer groups.

The decision problem is formulated in section 3.1. to the following simplified max-min problem. The market of the product is divided into n submarkets (areas, consumer groups etc.), which differ from each others in sales share, consumer behaviour and susceptibility to advertising. At the beginning, the first player (manufacturer) P_1 has the market totally in his possession. But the market is being entered by a new entrepreneur, player P_2, with his own product, which in regard to quality, price and other properties corresponds to the competitor's product. Both of the competitors have a finite advertising budget at their disposal. By allocating their budgets for different consumer groups the players try to achieve (P_1 to keep up and P_2 to capture) as big a total market share as possible. The type of the problem becomes max-min, because it is assumed that the new competitor P_2 can learn what the old one has done and then optimally counter.

The max-min allocation model is then presented in section 3.2. (for notation see the list of symbols in the appendix). The f_i-function ($i = 1,2,\ldots,n$), indicating P_1's market share in submarket i after the allocations x_i and y_i, is assumed (see equation (8)) to have the following properties

1^o the entrepreneur P_2 must exceed a certain advertising threshold ($y_i > a_i x_i$) before getting any foothold in the market

2^o after the exceeding of the threshold the growth of P_2's market share (the decrease of P_1's market share) depends on the degree of this exceeding and on the consumer group's susceptibility to advertising

3^o this dependence obeys the law of exponentially decreasing marginal utility.

A general algoritm for solving the model is presented in section 3.3. Section 3.4. contains a special case of the problem with only two consumer groups. This special case is solved in detail and in a closed form. Interpretations of the results are also discussed. In the end, the dependence of the solution on the parameter values of the model is summarized in the table of section 3.4.2.4.

APPENDIX

List of symbols

n	number of consumer groups
i	index for the consumer group
X	advertising budget disposable to P_1
Y	advertising budget disposable to P_2
x_i	P_1's advertising contribution (allocation) for group i
y_i	P_2's advertising contribution (allocation) for group i
m_i	sales share of the product in group i (constant)
a_i	relative advertising threshold for P_2 in group i (constant)
k_i	advertising susceptibility of group i (constant)
f_i	P_1's market share in group i (after the allocations), $f_i = f_i(x_i, y_i)$
F	P_1's total market share (after the allocations), $F = F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$
x^o	P_1's optimal strategy (allocation), $x^o = (x_1^o, \ldots, x_n^o)$
y^o	P_2's optimal strategy (allocation), $y^o = (y_1^o, \ldots, y_n^o)$
v^o	optimal "value" of the problem, $v^o = F(x^o, y^o)$