

TURUN YLIOPISTO

MONIKOMPONENTTISEN STOKASTISESTI
VIOITTUVAN SYSTEEMIN KÄYTTÄNTYMISESTÄ
JA LUOTETTAVUUDESTA

SOVELLETUN MATE-
MATIIKAN LISENSI-
AATTITUTKIELMA

ILKKA VIRTANEN

MAALISKUU 1974

SISÄLLYSLUETTELO

	Sivu
1. JOHDANTO	1
2. LUOTETTAVUUSTEORIAN MATEMAATTISISTA PERUSTEISTA	3
2.1. Luotettavuus ja siihen liittyvät perus- käsitteet	3
2.2. Vikataajuus, häiriöttömän toiminta-ajan tiheys- ja kertymäfunktiot sekä näiden väliset yhteydet	8
2.3. Tavallisimmat luotettavuusteoriassa esiinty- vät jakautumat	11
2.3.1. Eksponentiaali-jakautuma	11
2.3.2. Gamma-jakautuma	12
2.3.3. Weibull-jakautuma	13
2.3.4. Rayleigh-jakautuma	14
2.3.5. Kätkäistynyt normaalijakautuma	15
2.3.6. Log-normaalinen jakautuma	16
2.3.7. Äärimmäisten arvojen jakautuma	17
2.3.8. Jakautumien yhdistäminen	18
2.3.9. Yleinen jakautuma	20
3. TUTKIMUKSEN RAJAUS JA TÄSMENNYS SEKÄ TARKASTELTAVAN SYSTEEMIN KUVAUS JA SYSTEEMIA KOSKEVAT OLETTAMUKSET	21
3.1. Tutkimuksen lähtökohdat ja tavoitteet	21
3.2. Tarkasteltavan systeemin kuvaus	24
3.2.1. Systeemin rakenne	24
3.2.2. Osasysteemien kytkennät	25
3.2.3. Korjauspolitiikat	26
3.3. Systeemin satunnaissuureita koskevat olettamukset	28

3.3.1.	Korjauksen odotusaika	29
3.3.2.	Korjauksaika	30
3.3.3.	Korjauksen odotusaika	30

4. SYSTEEMIN KÄYTTÄYTYMINEN, KUN OSASYS-
 STEEMI S_1 ON AKTIIVISESTI RINNANKYT-
 KETTY 32

4.1.	Korjauspolitiikkana minimikorjauspolitiikka P_1	32
4.1.1.	(A, P_1) -systeemin tilat	32
4.1.2.	(A, P_1) -systeemin tilayhtälöt	34
4.1.2.1.	Merkinnät	34
4.1.2.2.	Osittaisdifferentiaaliyh- tälöt	38
4.1.2.3.	Reunaehdot	39
4.1.3.	Tilayhtälöiden ratkaisut	41
4.1.3.1.	Tilayhtälöiden Laplace- muunnokset	41
4.1.3.2.	Muunnosyhtälöiden rat- kaisut	42
4.1.3.3.	Tilayhtälöiden ratkaisut muunnosyhtälöiden ratkaisui- den käännteismuunnoksina	49
4.1.3.4.	Stationääriseen vaiheeseen ratkaisut	52
4.1.4.	(A, P_1) -systeemin luotettavuudesta	58
4.2.	Korjauspolitiikkana täyskorjauspolitiikka P_2	60
4.2.1.	(A, P_2) -systeemin tilat	60
4.2.2.	(A, P_2) -systeemin tilayhtälöt	61
4.2.2.1.	Merkinnät	61
4.2.2.2.	Osittaisdifferentiaaliyh- tälöt	63
4.2.2.3.	Reunaehdot	63
4.2.3.	Tilayhtälöiden ratkaisut	64
4.2.3.1.	Tilayhtälöiden Laplace- muunnokset	64
4.2.3.2.	Muunnosyhtälöiden rat- kaisut	65

4.2.3.3.	Tilayhtälöiden ratkaisui- den käännteismuunnoksina	70
4.2.3.4.	Stationääriseen vaiheeseen ratkaisut	71
4.2.4.	(A, P_2) -systeemin luotettavuudesta	74

5. SYSTEEMIN KÄYTTÄYTYMINEN, KUN OSASYS-
 STEEMI S_1 ON PASSIIVISESTI RINNANKYT-
 KETTY 76

5.1.	Korjauspolitiikkana minimikorjauspolitiikka P_1	76
5.1.1.	(P, P_1) -systeemin tilat	76
5.1.2.	(P, P_1) -systeemin tilayhtälöt	77
5.1.3.	Tilayhtälöiden ratkaisut	78
5.1.4.	(P, P_1) -systeemin luotettavuudesta	85
5.2.	Korjauspolitiikkana täyskorjauspolitiikka P_2	86
5.2.1.	(P, P_2) -systeemin tilat	86
5.2.2.	(P, P_2) -systeemin tilayhtälöt	86
5.2.3.	Tilayhtälöiden ratkaisut	87
5.2.4.	(P, P_2) -systeemin luotettavuudesta	91

6. VARMISTUSMENETELMÄN JA KORJAUSPOLITIIKAN
 VAIKUTUS SYSTEEMIN LUOTETTAVUUTEEN 92

6.1.	Merkintöjä ja eräitä aputuloksia	93
6.2.	Luotettavuuden komponentit: tilatodennä- köisyydet P_m	101
6.3.	Luotettavuuden riippuvuus osasysteemin S_1 komponenttien lukumäärästä	106
6.4.	Luotettavuus ja varmistusmenetelmä	111
6.5.	Luotettavuus ja korjauspolitiikka	113

7. YHTEENVETO TUTKIMUKSEN KESKEISISTÄ TULOK-
 SISTA 115

VIITATTU LÄHDEKIRJALLISUUS

2.1. Luotettavuus ja siihen liittyvät peruskäsitteet

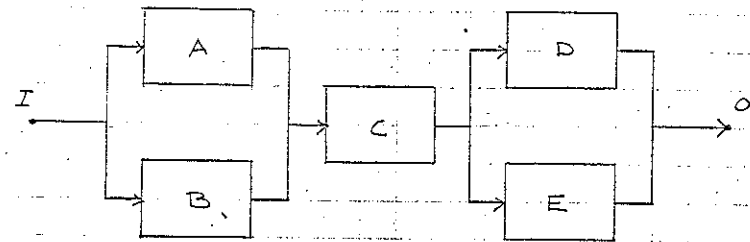
Ennen tarkastettavan ongelman täsmällisempää määrittelyä ja rajoamista käydään läpi keskeisimpien käytettävien käsitteiden määritelmät ja niihin liittyvät perusominaisuudet. Tämän ontaa perustellun aiheen luotettavuusteoreettisessa kirjallisuudessa esiintyvän terminologian verraten suuri epäyhentäisyys ja vakiintumattomuus¹.

Tarkastelujen kohteena on useista koneista, laitteista tms. muodostuva toiminnallinen kokonaisuus, jota kutsutaan systeemiksi. Systeemin osia, joita toimintansa ja käyttäytymisensä perusteella voidaan pitää itsenäisinä kokonaisuuksina, kutsutaan systeemin komponenteiksi. Komponentti voi siten olla yksityinen laite, sen tietty osa tai joukko keskenään samanlaisia tai erilaisia laitteita. Systeemistä, sen osasta ja komponentista käytetään yleisnimitystä yksikkö².

Yksikköä ja sen toimintaedellytyksiä luonnehditaan yleensä joukolla tiloja, jotka ilmoittavat, miten hyvin yksikkö pystyy suoriutumaan sille asetetuista tehtävistä. Pienimäärin tarkastettavan yksikön, komponentin, oletetaan tavallisimmin, niin myös seuraavassa, olevan kuitenkin vain joko normaalissa toimintatunnossa tai viallisen³. Vialla tarkoitetaan tällöin ilmiötä, jonka esiintyminen muuttaa yksikön ominaisuuksia normaalin toiminnan alueen ulkopuolelle siinä määrin, että yksikön toiminta keskeytyy ja on ryhdyttävä korjauksiin⁴.

1. Polovko, s.2, mm. mainitsee kahdeksan kirjallisuudessa yleistä määritelmää käsitteelle "luotettavuus", näistä useat vielä poikkeavat melko lailla toisistaan
2. Edellisestä huomautuksesta poikkeavasti käsitteillä "systeemi", "komponentti" ja "yksikkö" on varsin vakiintunut merkitys, ks. esim. Gnedenko et al., s. 69
3. Tarkasteluja, joissa komponentti voi toimia myös aientuneella teholla, on suorittanut mm. Kulshreshtha IV
4. Polovko, s.7

Systeemin komponenttien välisen riippuvuuden kuvaamiseen käytetään tavallisimmin luotettavuustaavioa. Tämä luotettavuus⁵ on verkko, jonka lohdot kuvaavat komponenttien ja lohdotien väliset riippuvuudet komponenttien riippuvuutena keskenään. Systeemi on toimintatunnossa, mikäli alku pisteestä (I), pitkin lohdopisteesiä (D) vähitellen yksi polku, josta lohdot komponentit (lohdot) ovat tunnossa (vrt. kuva 2.1).



Kuva 2.1. Yksinkertaisen systeemin luotettavuustaavio

Korjauksen päättymisen (ja komponentin käynnistämisen) sekä uuden vian ilmoittumisen välinen aika, häiriötön toiminta-aika⁶, on satunnaissuure, jolla oletetaan olevan jokin tunnettu, yleensä häiriötilojen perusteella estimoitu jakauma. Samaa tavalla oletetaan korjauksen kestoaikalta ja korjauksen alku ajankohdalla olevan eräät tunnetut jakaumat. Korjauksen kestoaika oletetaan sisältävän kaiken sen ajan, jota kuluu korjausmiehistön saapumisesta riittävään komponentin luo aina siihen helteen, jolloin komponentti on valmis otella vakiin normaaliin käyttöön. Korjauksen alku oletetaan ajaksi tarkoitetaan sitä aikaa, jota kuluu korjauksen suunnitteluun ja valmisteluun (osien ja työkalujen nautto, piirustukset jne.) sekä korjausmiehistön vapauttamiseen mahdollisista muista töistä.

Edellä esiteltujen käsitteiden avulla voidaan myi

1. Zelen, s.4
2. vastaavia englanninkielisiä nimityksiä: mm. Barlow ja Proschan, s.9; "time to failure", Polovko, s.73, "time between failures"

konstruoida useitakin mittareita; jotka ilmoittavat, miten hyvin jokin yksikkö kykenee suoriutumaan sille asetetuista tehtävistä. Keskeisimmäksi tämän laatuiseksi suureeksi on luotettavuusteoriassa muodostunut luotettavuuden käsite. Kuten edellä jo on viitattu, en luotettavuuden määritelmien joukko voina moninainen. Perustunteeltaan nämä määritelmät jakaantuvat kuitenkin selvästi kahteen ryhmään: kvalitatiivisiin ja kvantitatiivisiin¹.

Kvalitatiiviset määritelmät muodostavat verraten homogeenisen ryhmän. Tämän ryhmän tyypillisinä edustajina voidaan pitää mm. seuraavia määritelmiä:

1. "Luotettavuus on todennäköisyys sille, että laite kehittämissään toimintaolosuhteissa toimii tehtävänsä mukaisesti aiotun toiminta-ajanjakson"²
2. "Yksikön luotettavuudella tarkoitetaan yksikön kykyä säilyttää laatunsa tietyissä käyttöolosuhteissa"³
3. "Luotettavuus on todennäköisyys sille, että laite toimii menestyksellisesti aiotulla tavalla käyttäjän määrittelemissä olosuhteissa"⁴

Kuten yllä esitetyistä esimerkeistä huomataan, jättävät nämä kvalitatiiviset määritelmät vielä tulkinnaa varaa luotettavuuden käsitteelle. Tulkinnoista vapautumiseksi on otettu käyttöön kvantitatiiviset määritelmät, jotta tiukan matemaattisesti määrittelevät tämän käsitteen. Samalla on kuitenkin käyttötarpeesta ja toimintaolosuhteista johtuen jouduttu useaan rinnakkaiseen määritelmään. Suurimman suosion on saavuttanut määritelmä⁵: "Luotettavuus (hetkellä t) = todennäköisyys, että yksikkö toimii häiriöttä ajanjakson $[0, t]$ ". Toisaalta kuitenkin korostetaan, että välttämättä ei tarvitsetaan olla "yhtö ainoata oikeata" luotettavuuden määritelmää, olosuhteet ja käyttötarkoitukset viime tödessä ratkaisevat, mikä kvantitatiivinen suure antaa parhaan käsityksen yksikön "luotettavuudesta"⁶.

1. Polovko, s.2
2. Barlow ja Proschan, s.6
3. Gnedenko et al, s.70
4. Lloyd ja Lipow, s.20
5. mm. Gnedenko et al, s.74, Barlow ja Proschan, s.7
6. Gnedenko et al, s.74

1) Luotettavuudella tarkoitetaan suurenna tulevat kelloin tyypin johon mm. "Todennäköisyys, että yksikkö on toimintakunnossa hetkellä t "¹ ja "Häiriöttömän toiminta-ajan odotusarvo"².

2) Systemin luotettavuus voidaan määritellä yleisessä muodossa tavalla, jota erikoistapauksinaan sisältää mm. kaikki edellä esitetyt tunnusluvut.³ Olkoon $x(t)$ stokastinen prosessi (skalaris- tai vektoriarvoinen suure), jota kutsutaan systeemin tilojen kehityksiä ajan mukana ja olkoon $\bar{X} = \{x(t)\}$ niiden muodostama avaruus. Olkoon edelleen Φ jokin avaruudessa \bar{X} määritelty funktio. Luotettavuus φ määritellään tällöin tämän funktion odotusarvona, ts.

$$(2.1) \quad \varphi = E\{\Phi[x(t)]\}$$

Luotettavuus jää siis riippumaan funktion Φ valinnasta. Olkoon esim. \bar{X}_0 niiden tilojen joukko, jolloin systeemi ei ole toimintakykyinen. Valitsemalla

$$(2.2) \quad \Phi_1[x(t)] = \begin{cases} 0, & \text{jos on olemassa } 0 \leq s \leq t \text{ siten, että } x(s) \in \bar{X}_0 \\ 1, & \text{muulloin} \end{cases}$$

saadaan $E\{\Phi_1[x(t)]\} = P\{\text{systeemi on kunnossa vähintään ajan } 0 \text{ :sta } t \text{ :hen}\}$. Valinta

$$(2.3) \quad \Phi_2[x(t)] = \begin{cases} 0, & \text{jos } x(t) \in \bar{X}_0 \\ 1, & \text{jos } x(t) \notin \bar{X}_0 \end{cases}$$

puolestaan johtaa luotettavuuden määritelmään $E\{\Phi_2[x(t)]\} = P\{\text{systeemi on toimintakunnossa hetkellä } t\}$. Tässä

1. Zelen, s.29
2. Gnedenko et al, s.74
3. Gnedenko et al, ss.74-78

Luotettavuus systeemin luotettavuudella tarkoitetaan määritelmiä (2.3) perusteella syntyvää todennäköisyyslauseetta. Sillä on mielekas empirinen tulkinta varsinkin sellaisissa systeemeissä, jotka saavuttavat stationääriseen vaiheeseen: näin määritelty luotettavuus kuvaa sitä suhteellista osuutta ajasta, jonka systeemi on normaalissa toimintakunnossa.²

2.2. Vikataajuus, häiriöttömän toiminta-ajan tiheys- ja kertymäfunktiot sekä näiden väliset yhteydet

Seuraavassa tarkastellaan mielivaltaisen, jatkuvassa käytössä olevan yksikön toimintaa, erityisesti sen viivittumista ja häiriöttömän toiminta-ajan jakautumaa. Häiriöttömän toiminta-ajan jakautuman kuvaamiseksi on käytettävissä useitakin funktioita, tärkeimmät näistä ovat¹ kertymäfunktio $F(t)$, tiheysfunktio $f(t)$ ja vikataajuusfunktio $r(t)$ ².

Jos merkitään symbolilla τ häiriötöntä käyttöaikaa kuvaavaa satunnaissuuretta, niin kertymäfunktion $F(t)$ määrittelee todennäköisyyslauseke

$$(2.4) \quad F(t) = P\{\tau \leq t\}.$$

Jos $F(t)$ on jatkua ja tiheysfunktio $f(t)$ on olemassa, on³

$$(2.5) \quad f(t) = \frac{d}{dt} \{F(t)\}$$

ja

$$(2.6) \quad F(t) = \int_0^t f(u) du.$$

(Luotettavuusteoriassa voidaan tarkasteltavien satunnaissuureiden luonteesta johtuen ilman muuta olettaa, että $f(t) = F(t) = 0$, kun $t < 0$; seuraavassa oletetaankin aina, että $t \geq 0$).

Luotettavuusteoriassa funktion $F(t)$ jatkuvuus on välttämätöntä.

1. Tätä kutsutaan myös heikkelliseksi käytettävyydeksi (point availability): Rau, s.240; Barlow ja Proschan, s.7
2. Rau, s.240

1. Barlow ja Proschan, s.12
2. Nimitystä vikataajuus käyttänyt ainakin Turunen. Englanninkielisessä kirjallisuudessa ovat yleisiä nimet: failure rate (mm. Barlow ja Proschan), hazard rate (esim. Singpurwalla, myös Barlow ja Proschan), hazard function (Lloyd ja Lipow); Lokki on käyttänyt myös nimitystä hasardifunktio
3. Gnedenko et al., s.18, Barlow ja Proschan, s.12

luonnollinen jakaumus, merkitsisihän $F(t)$:in epäjatkuvuuskohta t_0 , että tarkasteltaessa yksittä oksi tuona ajankohtana positiivinen jakautumistodennäköisyys. Ainoan käytännössä reaalisen poikkeuksen voisi muodostaa hetki $t=0$; epäjatkuvuuskohta merkitsisi tässä, että yksittä toimintaan kytkeäessä on vioittunut. Alkuehden jatkuvuus voidaan kuitenkin yleensä heti todeta ja yksittä korjata tai vaihtaa uudelleen. Voidaan siten rajoitusta olettaa, että tarkasteltavilla jatkautumilla kertymäfunktio on jatkuva ja tiheysfunktio on olemassa.

Luvitelusteoriassa kertymä- ja tiheysfunktioita tärkeämpänä funktiona jakautuman luonteen kuvaamisessa on pidettävä kuitenkin vikataajuutta $r(t)$. Monet epäsymmetriset jatkautumat, kuten esim. gamma-, Weibull- ja log-normaalinen jatkautuma, eroavat tiheys- tai kertymäfunktioiltaan toisistaan merkittävästi vain jatkautuman liepeillä. Toisaalta, kun ajatellaan havaintojen tuloa jatkautumasta, on todettava, että havaintojä on näillä lieveduilla yleensä verraten vähän. Näin jatkautuman tunnistaminen voi muodostua sängen hankalaksi. Sen sijaan vikataajuusfunktiolla on kuitenkin jatkautumatyypille ominainen kulku koko jatkautuman alueella².

Vikataajuus määritellään lausekkeena³

$$(2.7) \quad r(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$$

(niille t :in arvoille, joille $0 \leq F(t) < 1$). Tällä funktiolla on mielekäs todennäköisyysteoreettinen tulkinta: $r(t)dt$ = (ehdollinen) todennäköisyys sille, että ajan t häiriöttä toiminut yksittä vioittuu aikana $(t, t+dt)$. Vikataajuuden sekä kertymä- ja tiheysfunktioiden välillä voidaan osoittaa olevan mm. seuraavat riippuvuussuhteet⁴:

$$(2.8) \quad F(t) = 1 - e^{-\int_0^t r(u)du}$$

1. Gnedenko et al., s. 79
2. Barlow ja Proschan, s. 10
3. Barlow ja Proschan, s. 10
4. Lloyd ja Lipow, ss. 136-137; Polovko, ss. 36-37

(2.9)

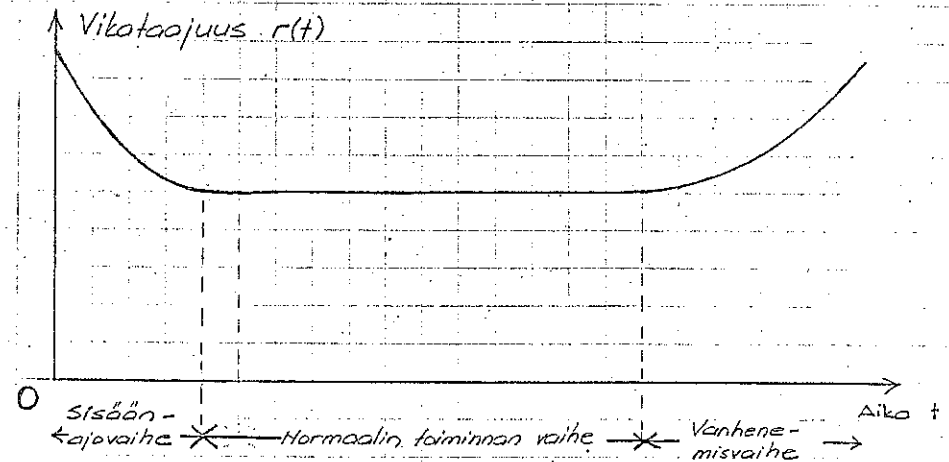
$$f(t) = r(t) e^{-\int_0^t r(u)du}$$

Kertymä- ja tiheysfunktioiden yleisten ominaisuuksien perusteella on esitetty selviä, että

$$(2.10) \quad \int_0^{\infty} r(t) dt = \infty \quad \text{ja}$$

$$(2.11) \quad \int_0^{\infty} r(t) e^{-\int_0^t r(u)du} dt = 1.$$

Vikataajuusfunktion "klassisena muotona" voidaan pitää kuvassa 2.2 esitettyä käyrää, josta perusteella yksikön toiminta on perinteisesti jaettu kolmeen vaiheeseen⁵. Ensimmäisen, ns. sisäänajovaiheen aikana vikataajuus on suhteellisen suuri vakaintuen vähitellen tietyille tasulle, jolla se säilyy koko toisen vaiheen, ns. normaalin toiminnan vaiheen. Kolmannen, ns. vanhenemisvaiheen aikana vikataajuus jälleen kasvaa. Seuraavassa loppuoteessa tarkadellaan yksityiskohtaisemmin erilaisia luotettavuusteoriassa kysymykseen tulevia jatkautumia ja niitä luonnehtivia funktioita.



Kuva 2.2 Vikataajuusfunktion klassillinen muoto

1. vrt. esim. Gnedenko et al. s.85; Jorgenson et al., s. 133 ja Forsström, s. 7.

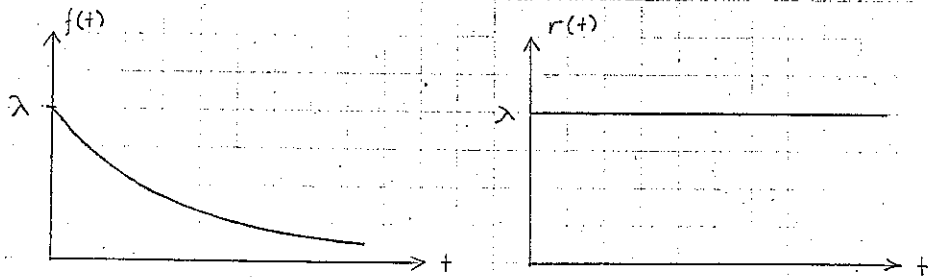
2.3. Tärkeisimmät luotettavuusteoriassa esiintyvät jakaumat

Statistisesti vaihtuvan yksitön häiriötönnän toiminta-ajan malliksi on luotettavuusteoreettisissa tarkasteluissa esitetty varsinkin suurta joukkoa erilaisia teoreettisia toteutuksisuusjakaumia. Jatkuvista jakaumista on kuitenkin vain kahden jakaumatyyppiä saavuttanut vaikkakin aseman niin teoreettisissa tarkasteluissa kuin käytännön sovellutuksissa¹. Nämä ovat: eksponentiaalijakauma, gamma-, Weibull-, Rayleigh-, (kattoistu) normaali-, log-normaali- ja äärimmäisten arvojen jakauma. Seuraavassa esitellään näiden jakaumien tiheys-, kertymä- ja vitataajuusfunktiot sekä luodaan lyhyt yhteystulosjakaumille tyypillisimpiin ominaisuuksiin.

2.3.1. Eksponentiaalijakauma

Eksponentiaalijakauman määrittelevät jakaumafunktiot

$$(2.12) \quad \begin{cases} f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \\ F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \\ r(t) = \lambda \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$



Kuva 2.3. Eksponentiaalijakauman tiheys- ja vitataajuusfunktiot

1. ks. esim. Barlow ja Proschan, ss. 12-17; Jorgenson et al., ss. 134-145; Polovko, ss. 74-95 ja Singpurwalla

Eksponentiaalijakauma on luotettavuusteorian ylivoimaisesti "suosittu" jakauma, sillä voidaan katsoa olevan tällä alueella suunnilleen sama merkitys kuin normaalijakaumalla klassillisen tilastotieteen alueella². Tämä johtuu paitsi paljolti siitä, että eksponentiaalijakauman käsittely on matemaattisesti yksinkertaisinta, myös siitä, että on löydetty runsaasti niin empiirisiä kuin teoreettisikin perusteita³ eksponentiaalijakauman soveltuvuudesta häiriötönnän toiminta-ajan jakauman malliksi.

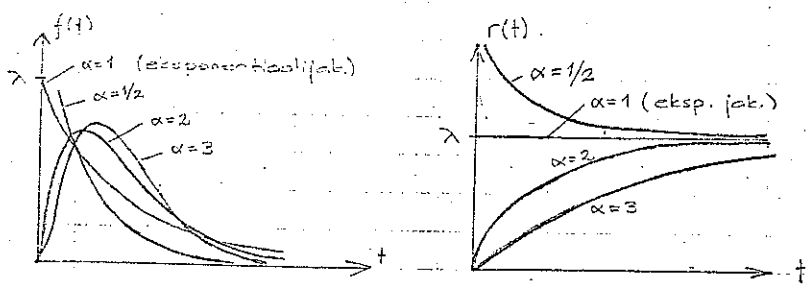
Todetakaan lopuksi eksponentiaalijakauman kaksi merkittävintä ominaisuutta: toinen on vitataajuuden säilyminen vakiona ja toinen tulevan häiriötönnän toiminta-ajan riippumattomuus jo todetun toiminta-ajan pituudesta. Eksponentiaalijakauma on ainoa jakauma, jolle on nämä ominaisuudet³.

2.3.2. Gamma-jakauma

Gammajakauman määrittelevät funktiot

$$(2.13) \quad \begin{cases} f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} & (\lambda > 0, \alpha > 0) \\ F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, & \text{jos } \alpha \text{ on positiivinen} \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t u^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du, & \text{kotonaisluku} \\ \text{muulloin} \end{cases} \\ r(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)! \sum_{n=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!}}, & \text{jos } \alpha \text{ on positiivinen} \\ \frac{f(t)}{1-F(t)}, & \text{kotonaisluku} \\ \text{muulloin} \end{cases} \end{cases}$$

1. Singpurwalla, s. 186
2. ks. esim. Barlow ja Proschan, ss. 13-15 ja s. 18
3. Gnedenko, s. 87



Kuva 2.4. Gamma-jakautuman tiheys- ja vitataajuusfunktiot

Gamma-jakautuma on eksponentiaalijakautuman luonnollinen laajennus, se muodostuu tämän α -kertaista konvoluutiota (parametrin arvoilla $\alpha=1$ gamma-jakautuma palautuu eksponentiaalijakautumaksi). Parametreista λ on ns. sijaintiparametri, α ns. muokkarametri (vrt. kuva 2.4). Jakautuman vitataajuus on kasvava, mikäli $\alpha > 1$, sen ylärajana on tällöin λ . Parametrin arvoilla $\alpha < 1$ vitataajuus taas on vähenevä funktio (alrajana λ).

Gamma-jakautuman empirisistä taustasta voidaan todeta, että jakautuma esiintyy silloin, kun vian syntymisen edellytystenä on tietyn häiriön vaikuttaminen kiltteeseen tarkalleen α kertaa ja näiden häiriöiden esiintymistiheys noudattaa λ -parametrinen Poisson-prosessia.

2.3.3. Weibull-jakautuma

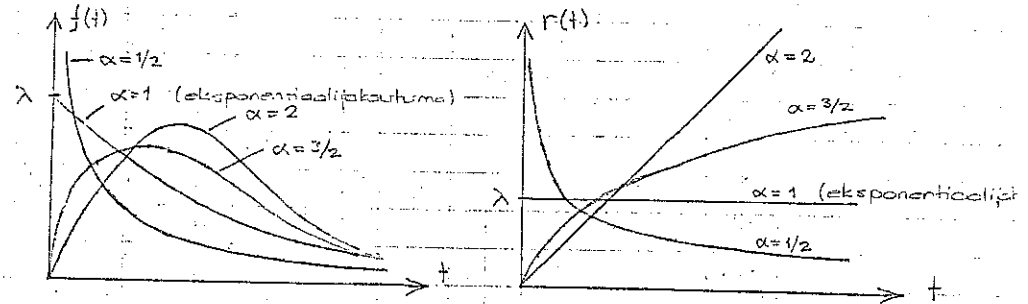
Weibull-jakautuman määrittelevät funktiot

$$(2.14) \quad \begin{cases} f(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha} \\ F(t) = 1 - e^{-\lambda t^\alpha} \\ r(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} \end{cases} \quad (\alpha > 0, \lambda > 0).$$

Myöskin Weibull-jakautumaa voidaan pitää eksponentiaalijakautuman kaksiparametrinen laajennuksena, palautuahan se

1. ks. esim. Barlow ja Proschan, s. 16

funktio muistuttaa suuresti gamma-jakautuman tiheysfunktioita, vitataajuus on samoin parametrin arvoilla $\alpha < 1$ vähenevä ja arvoilla $\alpha > 1$ kasvava, kuitenkin nyt niin, että kasvu on rajoittamaton ja vähenevässä tapauksessa vitataajuuden alrajana on 0 gamma-jakautuman λ :in asemesta



Kuva 2.5. Weibull-jakautuman tiheys- ja vitataajuusfunktiot

Weibull-jakautuman teoreettisista perusteista voidaan todeta, että se on johdettavissa satunnaisoloksen pienimmän havainnon asymptoottisena jakautumana, kun perusjoukon jakautuma on tietyä tyyppiä¹. Kaksiparametrinen Weibull-jakautuman vitataajuusfunktion moni-ilmeisyys on tehnyt tästä jakautumasta viime aikojen luotettavuusteoreettisen jakautumakäsitteiden yhtä suostumman jakautumatyyppin.

2.3.4. Rayleigh-jakautuma

Rayleigh-jakautuman määrittelevät funktiot

$$(2.15) \quad \begin{cases} f(t) = \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \\ F(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \\ r(t) = \frac{t}{\sigma^2} \end{cases}$$

Huomataan helposti, että Rayleigh-jakautuma on

1. ks. esim. Singpurwalla, s. 187 ja Gnedenko, ss. 91-92

Weibull-jakautuman yksiparametrinen erikoistapaus: parametri α on arvo 2 (jota lisäksi on merkitty $2\lambda = 1/\sigma^2$). Jakautuman tiheys- ja vitataajuusfunktioiden muoto nähdään kuvasta 2.5, kun ratkotaan siitä käyrät, joissa $\alpha = 2$. Vaikka Weibull-jakautuma onkin Weibull-jakautuman erikoistapaus, pidetään siitä useissa tarkasteluissa omaa jakautumaluokkiaan. Perusteluna tälle on jakautuman saavuttama merkittävä asema erillisinä eräänä ryttäreitä sisältäviä systemejä koskevilla luotellavustarkasteluissa¹.

2.3.5. Katkaistu normaalijakautuma

Luotellavusteoriassa esiintyvien satunnaissuureiden luonteesta johtuen (satunnaissuureet ovat aikasuureita) normaalijakautuman sijasta tulee kysymykseen origosta katkaistu normaalijakautuma, jonka määrittelevät funktiot

$$(2.16) \quad \begin{cases} f(t) = \frac{b}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} = b \varphi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \\ F(t) = \frac{b}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du = b \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \quad (\mu > 0, \sigma > 0), \\ r(t) = \frac{e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\int_t^\infty e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du} = \frac{\varphi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)} \end{cases}$$

missä vakio b määräytyy niin, että

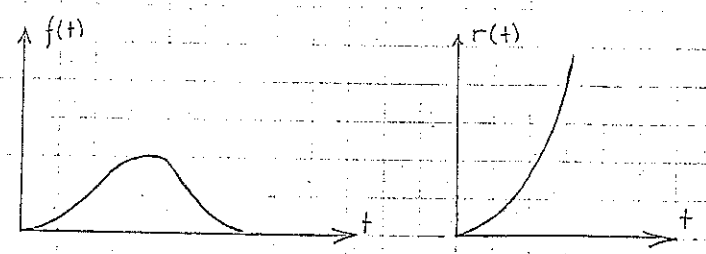
$$(2.17) \quad \int_0^\infty f(t) dt = 1$$

on voimassa. Tällöin on¹²

$$(2.18) \quad b = \sigma \left\{ \int_0^\infty \varphi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) dt \right\}^{-1}$$

1. Polovko, s. 84
2. Jorgenson et al., s. 138.

Yhtälöissä (2.16) ja (2.18) on $\varphi(u)$:lla ja $\Phi(u)$:lla merkityt tavallisen (0,1)-normaalisen satunnaissuureiden tiheys- ja kertymäfunktioita.



Kuva 2.6. Katkaistun normaalijakautuman tiheys- ja vitataajuusfunktiot

Katkaistulla normaalijakautumalla on todettu olevan jontin verran soveltuvuusehdollisuutta tietyn tyyppisten yksitöiden häiriötön toiminta-ajan mallina (mm. sähtölamput ja bussien moottorit)¹⁴. Huomattavasti tärkeämpi merkitys jakautumalla on kuitenkin korjausten kestoajan kuvaajana¹⁵. Terminologian suhteen on tietyksi todettava, että $f(t)$ ja $F(t)$ ovat tällöin korjauksen kestoajan tiheys- ja kertymäfunktioita ja $r(t)$ korjauksen valmistusintensiteetti¹³.

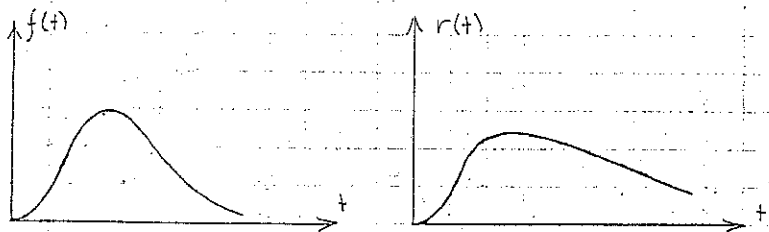
2.3.6. Log-normaalinen jakautuma

Log-normaalista jakautumaa kunneltavat funktiot ovat

$$(2.19) \quad \begin{cases} f(t) = \frac{1}{t \ln g \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \ln \bar{T})^2}{2(\ln g)^2}} = \frac{1}{t \ln g} \varphi\left(\frac{\ln t - \ln \bar{T}}{\ln g}\right) \\ F(t) = \frac{1}{t \ln g \sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(\ln u - \ln \bar{T})^2}{2(\ln g)^2}} du = \Phi\left(\frac{\ln t - \ln \bar{T}}{\ln g}\right) \\ r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{\varphi\left(\frac{\ln t - \ln \bar{T}}{\ln g}\right)}{t \ln g \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \ln \bar{T}}{\ln g}\right) \right]} \end{cases}$$

1. Polovko, s. 90, Jorgenson et al., s. 136
2. Jorgenson et al., s. 136
3. Kulshreshtha (I)-(II) käyttänyt nimitystä repair rate

\bar{r} = geometrisen keskiarvo (satunnaisuuden logaritmien keskiarvon antilogaritmi)
 g = geometrisen hajonta (satunnaisuuden logaritmien hajonnan antilogaritmi)



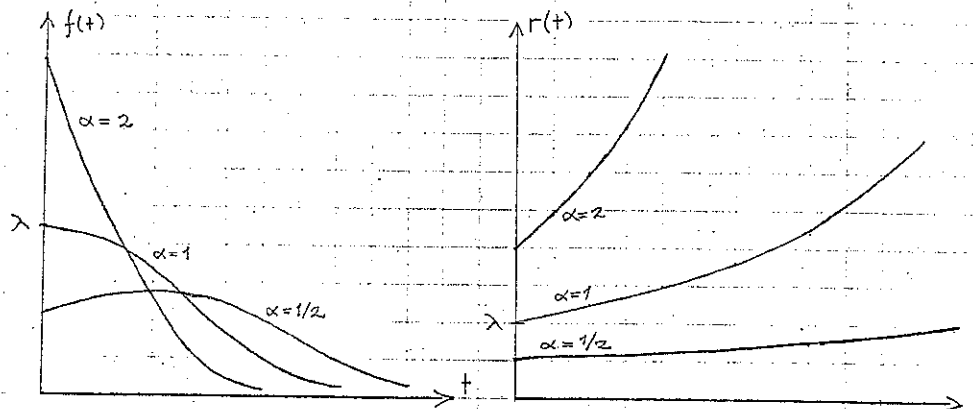
Kuva 2.7. Log-normaalisen jakauman tiheys- ja vitataajuusfunktiot

Yhtälöstä (2.19) nähdään, että satunnaisuuden jakauma on log-normaalinen silloin, kun sen logaritmien jakauma on normaalinen. Vitataajuusfunktiota tarkasteltaessa huomataan sen olevan akusti kasvavan kunnes se myöhemmin muuttuu väheneväksi. Funktion kulun kehitys on siis täysin päinvastainen kuin vitataajuuden klassillisen muodon yhteydessä esitetään. Onkin todettava, että log-normaalisen jakauman merkitys häiriöttömän toiminta-ajan mallina on varsin vähäinen; pysyvän asemansa luotettavuuskoealueissa tutkimuksessa jakauma on soveltunut hyvänä korjauseajan kuvaajana.

2.3.7. Äärimmäisten arvojen jakauma

Äärimmäisten arvojen jakauma on yleisimmässä, kaksi-parametrisessa muodossaan

$$(2.20) \begin{cases} f(t) = \alpha \lambda e^{\lambda t} e^{-\alpha(e^{\lambda t} - 1)} \\ F(t) = 1 - e^{-\alpha(e^{\lambda t} - 1)} \\ r(t) = \alpha \lambda e^{\lambda t} \end{cases} \quad (\alpha > 0, \lambda > 0)$$



Kuva 2.8. Äärimmäisten arvojen jakauman tiheys- ja vitataajuusfunktiot

Äärimmäisten arvojen jakauma tulee yleensä kysymykseen, kun vien aiheuttava ilmiö on riippuvainen satunnaisuuden pienimmästä arvosta ja perusjoukon jakauma on eksponentiaalinen. Sovellutusalueina voidaan mainita erityisesti korroosion vaikutuksesta syntyvät yksikön vioittumiset (nestelä ja toasutukset yms).⁽²⁾

2.3.8. Jakaumien yhdistäminen

Kuten vitataajuusfunktioiden muodoista edellä on käynyt ilmi, tuskien mitään esitetyistä jakaumista pystyy toimimaan yksikön häiriöttömän toiminta-ajan mallina koko yksikön elinajan. Sisönaikavaiheen aikana vittojen ilmaantuminen noudattaa lähinnä

1. Barlow ja Proschan, s. 11

1. Singpurwalla, s. 187
 2. Lloyd ja Lipow, s. 140

joita vastaavien rataajujen omaava jakautuma (esim. qamma tai Weibull-jakautuma) normaalin toiminnan aikana jakautumattyyppi on lähinnä eksponentiaalinen ja vanhenemavaiheessa aikana jokin korinainen rataajujen omaava jakautuma (esim. keltaisen normaali-jakautuma) septi parttien malliksi.

Jakautumien yhdistäminen tarjoaa nyt kuitenkin keinon, joka suoraan aikaan katoa yksikön elinajan katoava häiriöttömään toimintajan jakautuma. Tarkastellaan tässä esimerkkinä kahden eksponentiaalijakautuman yhdistämistä. Olkoon

$$(2.21) \quad \begin{cases} f(t) = C_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \\ F(t) = 1 - C_1 e^{-\lambda_1 t} - C_2 e^{-\lambda_2 t} \\ r(t) = \frac{C_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}} \end{cases}$$

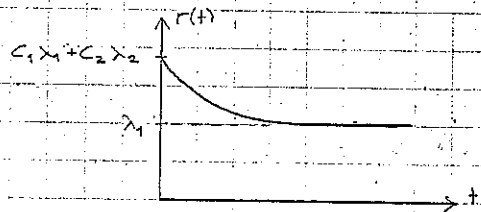
missä vakiot C_1 ja C_2 on valittu niin, että $C_1 + C_2 = 1$ ja että $f(t)$ täyttää tiheysfunktiolle asetetut edellytykset. Oletetaan vielä, että $\lambda_1 < \lambda_2$. Tällöin huomataan helposti, että

$$(2.22) \quad \lim_{t \rightarrow 0} r(t) = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) C_2 > \lambda_1$$

ja

$$(2.23) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lambda_1$$

Vikataajuusfunktion muoto on näin kuvassa 2.9. esitetyn luonteinen.



Kuva 2.9. Kahden eksponentiaalijakautuman yhdistelmän vikataajuus

1. Polovko, s. 94

Tuloksena on siis jakautumattyyppi, joka sisäänoajo- ja normaalin toiminnan vaiheen osalta hyvin vastaa vikataajuusfunktion klassista muotoa. Vastavastalla tavalla eri jakautumien yhdistelmällä saadaan uusia jakautumia, joilla on kulloinkin halutun kaltainen vikataajuusfunktio.

2.3.9. Yleinen jakautuma

Edellisissä jaksossa on luotu yleiskatsaus luotettavuusteorian keskeisimpiin jakautumattyyppihin ja eräisiin niiden perusominaisuuksiin. Yhteisenä piirteenä näille kaikille jakautumattyypeille on, samoin kuin niiden jaksossa 2.3.8 esitettyllä tavalla saaduille yhdistelmille, että mikä tahansa kolmesta jakautumasta luonnehtivasta funktiosta $f(t)$, $F(t)$ tai $r(t)$ on riittävä jakautuman identifioimiseksi, muut kaksi saadaan sen jälkeen yhtälöistä (2.5) - (2.9). Kuten edellä jo on todettu, luotettavuusteoreettisissa tarkasteluissa on keskeisimmässä asemassa vikataajuusfunktio $r(t)$. Jäljempänä vikataajuusfunktio onkin yleensä lähtökohdana, tiheysfunktio esimerkiksi saadaan tämän jälkeen yhtälöstä (2.9).

Edellä esitetyn perusteella voidaankin nyt todeta, että vikataajuuden oletaminen mielivaltaiseksi (kuitenkin säännölliseksi) ajan-funktioksi tai tiheysfunktion esittäminen muodossa (2.9), missä $r(t)$ on tämä tarkemmin spesifioimaton vikataajuusfunktio, mahdollistaa kaikkien jatkuvien, tiheysfunktion omaavien jakautumien käsittelyn saman mallin puitteissa. Tässä muodossa esitetystä, mainitut jatkuvuus- ja tiheysfunktion olemassaolo-vaatimukset täyttyvästä jakautumasta käytetään jäljempänä nimitystä yleinen jakautuma. Määritys viittaa nyt siihen, että tämän jakautuman avulla suoritellut tarkastelut kattavat mm. kaikki jaksossa 2.3.1 - 2.3.7 esitetyt jakautumattyyppit samoin kuin jaksossa 2.3.8 esitetyt jakautumien yhdistelmät. Tarkastelut saadaan liitettyä kussakin yksittäistapauksessa taysymydessä olevaan jakautumaan sopivalla vikataajuusfunktion $r(t)$ valinnalla.

3. TUTKIMUKSEN RAJAUS JA TÄSMENNYS SEKÄ SYSTEEMIN KUVAUS JA SITÄ KOSKEVAT OLETTAMUKSET

3.1. Tutkimuksen lähtökohdat ja tavoitteet

Tarkastelujen kohteena on perusrakenteeltaan tietyssä muodossa esitettävissä oleva systeemi, jonka käyttäytymistä tarkastellaan erilaisissa olosuhteissa erityisesti luotettavuuden näkökulmasta. Systeemeille antavat leimansa stokastisesti, annettujen todennäköisyyslakien mukaisesti tapahtuvat komponenttien vioittumiset. Myös korjausten odotus- ja valmisteluajilla sekä varsinaisilla korjausaajoilla oletetaan olevan tietyt tunnetut jakautumat. Systeemissä esiintyvät satunnaisuureet sekä niitä koskevat oletukset esitellään yksityiskohtaisesti kappaleessa 3.3. Systeemissä vallitsevat erilaiset olosuhteet syntyvät systeemin tietyn strategisen yksikön rakenneratkaisun ja systeemin korjauksessa noudatettavan politiikan perusteella. Tutkittavina rakenneratkaisuna ovat tietyn kriittillisen komponentin varmistusmenetelmät: aktiivinen ja passiivinen rinnankytkentä. Korjauspolitiikkoina tarkastellaan ns. minimi- ja täyskorjauspolitiikkoja. Systeemin rakenteen yleismuoto ja "politiikkamuuttujat" (rinnankytkennän laatu ja korjauspolitiikka) esitellään seuraavassa kappaleessa 3.2.

Systeemin lopullinen yksilöinti on tapahtunut vastakun varmistusmenetelmä ja korjauspolitiikka on kiinnitetty. Tämän suorittaminen johtaa neljään perussysteemin erikoistapautukseen. Luvuissa 4 ja 5 suoritetaan näitä koskevat tarkastelut. Kussakin tapauksessa määritellään luotettavuuden määrittämisen kannalta tarkoituksenmukaisella tavalla systeemin tilat, laaditaan systeemin käyttäytymisen kuvaamiseksi osittaisdifferensiaalidifferenssiyhtälöryhmä (ns. tilayhtälöt) ja ratkaistaan nämä Laplace-muunnoksia ja niiden käänteismuunnoksia hyväksi käyttäen. Tilayhtälöiden

ratkaisu on erittäin esteiden, systeemin luotettavuutta luonnekuvaukset lopuksi osoitetaan, että systeemi saavuttaa tietyt yleisiä eräillä stationäärisen vaiheen ja että tämän vaiheen ratkaisut ovat useimpien systeemin kuvauksessa käytettyjen parametrien osalta niiden tyypistä riippumattomat, ratkaisussa esiintyvät vain jatkuvien odotusarvot.

Luvussa 6 suoritetaan johdettujen luotettavuusasteikoiden tarkempi analysointi. Erilaisista olosuhteista huolimatta luotettavuuden ilmoittava lauseke voidaan kaikissa tapauksissa esittää tietyn ulkonaisesti yhdenmukaiseen muotoon, missä luotettavuuden riippuvuus eräistä systeemin kesteisistä suureista näkyy. Eri systeemien luotettavuuksia voidaan tämän perusteella myös verrata ja näin saadaan selvä kuva tarkalta eriarvoisuusjärjestelmien ja toisaalta eri korjauspolitiikkajen vaikutuksesta jonkin systeemin toiminnan kannalta kesteiseen tilaan.

Tutkimuksen perustilanteen, systeemin tietyn tyypin rakenteen ja systeemin tarkastelun mainituissa rajoissa esitettävyydessä, ts. oikeastaan neljän spesifisen systeemin konstruoinnin, on esittänyt intialainen D.K. KULSHRESTHA artikkelissaan⁽¹⁾. Kulshresthia on kuitenkin tarkastellut esittämässään systeemiä melko ontarien ja rajoittavien oletusten valitsemiseksi. Lisäksi Kulshresthian oletukset poikkeavat eri tapauksissa tavastaan niin, että eri systeemit eivät ole keskenään vertailukelpoisia. Tässä työssä olosuhteita on yksistetty: on asetettu entistä vähemmän yleisyyttä rajoittavia vaatimuksia systeemin satunnaisprosessien suhteen ja on otettu mukaan uusia stokastisia suureita. Samalla on kunkin tapauksen oletukset yhdenmukaistettu, jonka tuloksena tarkasteltavat erityissysteemit on saatu keskenään vertailukelpoisiksi. Tiettyjen yleistysten yksityiskohtainen esittely suoritetaan kappaleessa 3.3, missä yhteydessä systeemin stokastiset ominaisuudet muutenkin esitellään.

Kulshresthian tutkimuksissa esiintyvien rajoittavien lähtöoletusten melko laaja karsinta ja reaalisyysteemiä

1. Kulshrestha I, II, III ja IV

Kulshrectian mallin laajennus ovat väistämättä johtaneet siihen, että Kulshrectian soveltamat tarkastelu- ja ratkaisumenetelmät eivät sellaisenaan ole tässä tutkimuksessa käyttökelpoisia. Täysin uusien kysymysten eteen joudutaan nim. ratkaistaessa systeemin käyttäytymistä kuvaavaa osittais-differentiaali-differenssiyhtälöryhmiä.¹ Sopivilla systeemiä kuvaavien suureiden valinnoilla on kuitenkin päästy siihen, että ratkaisut löytyvät suljetussa muodossa myös näissä yleisemmässä guitteissa. Systeemin tila-käsitteitä ei esiinny Kulshrectian tarkasteluissa lainkaan. Sen käyttöön otto tässä yhteydessä on kuitenkin vahvasti perusteltavissa systeemin kuvauksen ja luotettavuuden määrittämisen tullessa tällä tavoin selkeäksi ja johdonmukaiseksi.

Tehdyillä yleistyksillä on tuloksia ja soveltusmahdollisuuksia ajatellen huomattava merkitys. Mitä yleisempiä jonkin reaalisysteemin kuvauksessa käytetyn mallin oletukset ovat, sitä laajempia ovat tietysti mallin soveltamismahdollisuudet käytännön tilanteisiin. Tässä tapauksessa yleistysten merkitys tulee erityisen selvästi näkyviin stationäärisen vaiheen ratkaisussa. Nämä osoittautuvat lopulta systeemin pitkäaikaisesta riippumattomiksi, riippuvuutta on vain jatkuvuuden eräistä tunnusluvusta, lähinnä odotusarvoista. Tärkeänä on myös nähtävä eri tapauksien oletusten yhdenmukaistaminen. Tämä vasta tarjoaa mahdollisuuden vertailujen suorittamiseksi ja erilaisten varmistusten ja korjauspolitiikkajen vaikutusten tutkimiseksi.

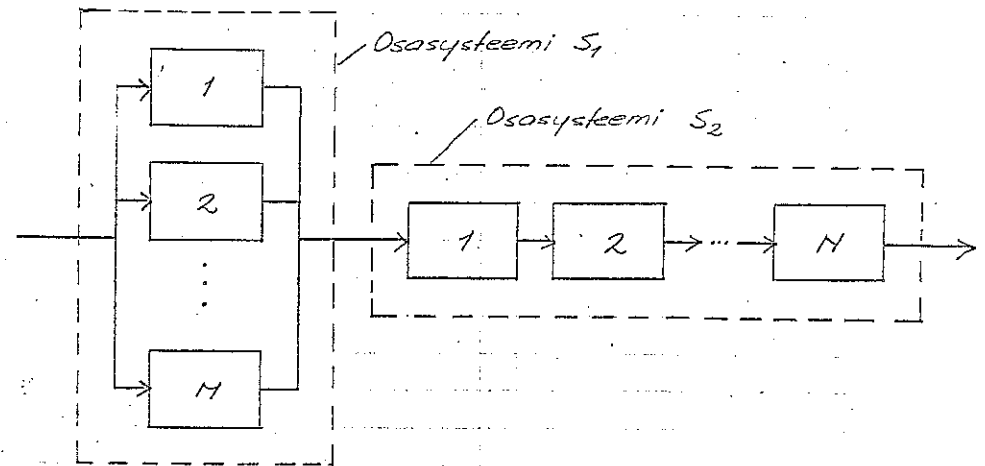
1. vrt. jaksossa 3.3.1 ja jaksossa 4.1.3.3 sivulla 46 esitetyt tarkemmat selvitykset

(4.67) ja (4.68) välissä

3.2. Tarkasteltavan systeemin kuvaus

3.2.1. Systemin rakenne

Seuraavissa luvuissa suoritettavat tarkastelut kattavat mintä tahansa jatkuvassa toiminnassa olevan, useasta erillisestä laitteesta koostuvan systeemin, jota voidaan esittää seuraavassa muodossa. Systemi koostuu kahdesta määrätyn rakenteen omaavasta osasysteemistä S_1 ja S_2 . Koko systeemin toimintakyvyn edellytyksenä on, että kummatkin osasysteemit ovat toimintakunnossa. Osasysteemin S_1 muodostavat M keskenään samantaista komponenttia, jotka ovat kytketty rinnakkain, ts. S_1 pystyy toimimaan niin kauan kuin yksikin sen komponenteista on toimintakypynen. Osasysteemi S_2 taas koostuu N istä sarjaan kytketystä komponentista, ts. yhdentkin S_2 :n komponentin vaurioituminen sulkee S_2 :n ja samalla koko systeemin toimintakykyvähäiseksi. S_2 :n komponenttien keskinäiselle samantaisuudelle tai erillisyydelle ei aseteta rajoituksia. Systemin rakenne luotettavuuskaaviomuodossa käy ilmi kuvasta 3.1.



Kuva 3.1. Systemin luotettavuuskaavio

Tämä kuvattu systeemi saattaa aluksi tuntua hyvin spesifiseltä ja rajoittuneelta. Mutta kun otetaan huomioon, että komponenttien koostumus ei ole tehty mitään oletuksia, saa systeemi huomattavasti yleispätevämmän luonteen. Miltä tahansa S_2 :n komponentti k voi esimerkiksi koostua useasta rinnakkaisesta laitteesta, ts. olla rakenteeltaan osasysteemin S_1 kaltainen. Valitun systeimirakenteen edellyttämiä tarkasteluja varten vitojen ilmaantumisista, korjauksen odotusaikaa ja korjauksen kestoaikaa koskevat laitteelliset tiedot on nyt vain yhdistettävä koko komponenttia k koskeviksi. Myöskin S_1 :n komponenttien sisäiselle rakenteelle ei oleteta muita rajoituksia kuin että komponentit ovat keskenään samanklaiset. Systeemin voidaan riisin ollen katsoa kuvaavan mitä tahansa reaali maailman systeemiä, jonka toiminnan perustana ja edellytyksenä on $(N+1)$:n itsenäisen systeemin osan toiminta (S_1 ja S_2 :n N komponenttia). Erityinen mielenkiinto on kohdistunut näistä yksien (S_1 :een) ja sen toiminnan varmistamiseen. Valittu mallin rakenne muoto korostaa juuri tätä seikkaa.

3.2.2. Osasysteemien kytkennät

Osasysteemin S_2 rakenne on kaikissa tilanteissa sama, S_2 koostuu M :stä sarjaan kytkettyä komponentista. Sen sijaan osasysteemissä S_1 , jota erotettiin omaksi yksikökseen komponentin varmistustavan vaihtuksen selvittämiseksi, tarkastellaan kahta rinnankytkennän muotoa: aktiivinen ja passiivinen rinnankytkentä.

Aktiivisella rinnankytkennällä¹¹ tarkoitetaan kytkentää, jossa kaikki rinnakkaiset, keskenään identtiset komponentit kytketään samankaltaisesti toimintaan. Kullakin komponentilla on siis sama vioittumistodennäköisyys ja kokonaisuus toimii niin kauan kuin yksikin sen komponenteista toimii.

1. Nimityksen suhteen ks. Venho, s. 67; vastaavista englanninkielisistä nimityksistä yleisin "parallel redundancy", ks. esim. Barlow ja Proschan, s. 162.

Passiivisella rinnankytkennällä¹² muodostettu osasysteemi S_1 toimii siten, että M :stä rinnakkaisesta komponentista vain yksi on kerrallaan toiminnassa. Toiminnassa olevan komponentin vioittua seuraava varalla oleva komponentti kytkeytyy toimintaan. Kytkentämuoto edellyttää automaattista ohjauslaitetta, joka suorittaa siirtymisen komponentista toiseen. Tämän ohjauslaitteen oletetaan seuraavassa olevan täydellisesti luotettavan. Passiivisessa rinnankytkennässäkin osasysteemi toimii niin kauan kuin vähintään yksi komponenteista on kunnossa. Huomattavimpana erona aktiiviseen rinnankytkentään verrattuna matemaattisten tarkastelujen kannalta on nyt, että varalla olevat S_1 :n komponentit eivät "vanhene" reservissäoloaikanaan.

Luotettavuusteoreettisessa kirjallisuudessa on esitetty useita muitakin rinnankytkennän muotoja, esimerkiksi ns. (k, n) -struktuuri¹³, mutta seuraavassa rajoitutaan kahden esitetyn perustapauksen käsittelyyn.

3.2.3. Korjauspolitiikat

Korjaustoiminnasta oletetaan, että vioittunutta komponenttia voidaan korjata vain, kun koko systeemi on pysähtynyt. Osasysteemin S_2 kohdalla komponentin vioittuminen toisaalta aina merkitsee koko systeemin toiminnan pysähtymistä, joten S_2 :n osalta korjaustoimenpiteisiin ryhdytään tartalleen silloin, kun jokin sen komponenteista on vioittunut. Korjauksen luonnella ei tällöä osin muuten määritellä tarkemmin, korjaustoimenpiteenä voi olla koko komponentin vaihto, komponentin tietyn osan vaihto tai muunlainen työ. Olennaista on vain, että komponentti korjauksen jälkeen on luotettavuusmielessä uuden varainen.

1. Nimityksen suhteen ks. Venho, s. 68; englanninkielisistä termeistä yleisin "standby redundancy", ks. esim. Barlow ja Proschan, s. 162.
2. Kytkentämuoto, jossa on n rinnakkaisista komponenttia ja kokonaisuus toimii niin kauan kuin vähintään k komponenttia on kunnossa, Barlow ja Proschan, s. 216.

Jo systeemin rakennemuoto korostaa S_1 :n komponenttien keskeistä asemaa koko systeemin toiminnan tarkastelussa, onhan siinä kiinnitetty erityistä huomiota systeemin toiminnan osan varmistamiseen rinnakkaisten varakomponenttien muodossa. Myös korjauspolitiikkojen osalta kohdistetaan päähuomio S_1 :n komponenttien korjaustoiminnan järjestämiseen. S_1 :n komponenteista oletetaan, että korjaustapahtumaan liittyvät suureet (kustannukset, työn kestoajat jne) ovat olennaisesti eri suuruusluokkaa siitä riippuen, onko komponentti ehtinyt rikkoontua vai kunnostetaan se sopivan tilaisuuden tullen jo ennen vioittumista. Käytännössä tämä merkitsee sellaisen huolto- tai komponentin vaihto-ohjelman soveltamista, jossa jokaisen korjaustapahtuman yhteydessä S_1 :n vielä toimintakelpoiset komponentit vaihdetaan uusiin tai saatetaan sopivilla huoltotoimenpiteillä uusien veroisiksi. Käytetään näistä toimenpiteistä seuraavassa nimitystä S_1 :n ennakkohuolto-ohjelma. Tämän ennakkohuolto-ohjelman oletetaan olevan mukana kunnossapidin varsinaisten tarkastelujen kohteena olevassa vioittuneitten komponenttien korjauspolitiikassa, minimi- ja täyskorjauspolitiikassa.

Minimikorjauspolitiikalla tarkoitetaan tässä politiikkaa, jonka mukaan S_1 :n vioittuneiden komponenttien korjaukseen ryhdytään vasta silloin, kun se systeemin toiminnan jatkumisen kannalta on välttämätöntä, ts. kun viimeinenkin S_1 :n M_1 :stä komponentista on tullut toimintakyvyttömäksi. S_2 :n komponenttien korjauksessa noudatetaan edellä esitettyjä yleisiä periaatteita eli S_2 :ssa ilmennyt vika johtaa heti korjaustoimenpiteisiin. Samoin tuokin vikatilanne johtaa S_1 :n ennakkohuolto-ohjelman läpikäymiseen.

Täyskorjauspolitiikassa¹⁴ kiinnitetään edellistä vielä suurempaa huomiota osasysteemin S_1 toiminnan varmistamiseen. Jokaisen S_2 :n synnyttämän systeemin toiminnan keskeyttämisen yhteydessä korjataan paitsi viollinen S_2 :n komponentti myös sillä hetkellä mahdollisesti viollisina olevat S_1 :n komponentit (vaikka S_1 pystyisikin jatkamaan toimintaansa vielä vioittuneiden komponenttiensa turvin). Täyskorjauspolitiikka johtaa näin entistä harvempiin S_1 :n tahoilta tuleviin toimintakeskeytyksiin. Muilla osin

1. Kulshresthalla "opportunistic repair policy", ks. Kulshrestha III

noudatetaan edellä esitettyjä korjaustoiminnan yleisiä periaatteita.

Edellä esitetyt minimi- ja täyskorjauspolitiikka eroavat Kulshresthan esittämistä vastaavista politiikoista sikäli, että niissä on mukana em. S_1 :n ennakkohuolto-ohjelma. Kahdessa tapauksessa¹⁵ Kulshrestha on oletanut S_1 :n komponenttien vikataajuusfunktiot vakioiksi eli häiriöttömän toiminta-ajan jakautuman eksponentiaaliseksi, jolloin vielä toimivan komponentin uusiminen ei ole mielekasta (komponentin tuleva toiminta ei riipu komponentin jo saavuttamasta iästä eksponentiaalijakautuman tapauksessa). Kahdessa muussa tapauksessa¹⁶ vikataajuusfunktio on Kulshresthallakin ajan funktio ja näiden suhteen onkin todettava, että korjauspolitiikkoihin on tällöin sisällytettävä em. ennakkohuolto-ohjelma, jotta Kulshresthan esittämät tulokset olisivat voimassa.¹⁷

3.3. Systeemin satunnaissuureita koskevat olettamukset

Edellä on jo lyhyesti viitattu tekijöihin, jotka tekevät systeemin stokastisen systeemin. Komponentin häiriötön toiminta-aika, korjauksen alkuaan kuluva odotus- ja valmistelu-aika sekä varsinainen korjausaika oletetaan kaikki satunnaissuureiksi, joiden jakautumat tunnetaan. Jakautumat identifioidaan seuraavassa "intensiteettifunktion" perusteella: häiriöttömän toiminta-ajan yhteydessä vikataajuus, odotusajan yhteydessä odotuksen päättymisintensiteetti ja korjausajan jakautumalla korjauksen valmistumisintensiteetti. Tämä edellyttää, kuten aiemmin on jo todettu, jatkuvaa tiheysfunktion omaavaa jakautumaa. Muuten jakautumatyypille ei aseteta mitään rajoituksia. Tiheysfunktio esitetään aina intensiteettifunktion avulla muodossa (2.9). Mallin yleisyys kaikki jatkuvuusvaatimukset täyttävät jakautumat kattavaksi taataan jättämällä intensiteettifunktiot tarkemmin spesifioimatta.

1. Kulshrestha I ja V
2. Kulshrestha II ja III
3. Esimerkiksi yhtälöt (5) s. 30 Kulshrestha II ja (4) s. 162 Kulshrestha III edellyttävät mainittua ennakkohuolto-ohjelmaa ollakseen voimassa.

3.3.1. Vian esiintyminen

Systeemin komponenteissa ilmenevien vikojen esiintymistä kuvaamaan käytetään häiriöttömän toiminta-ajan jakautumaa. Häiriötön toiminta-aika voi olla sama kuin komponentin elinikä (jos korjausmenetelmänä on komponentin vaihto), mutta yleensä se on käsitteenä kuitenkin yleisempi. Komponenttien häiriöttömien toiminta-aitojen jakautumista tehdään seuraavat oletukset.

Osasysteemin S_1 komponentit ovat keskenään identtiset, joten niillä on sama jakautumakin. Jakautuman luonteeseen nähden ei oleteta muita rajoituksia kuin jatkuvuus ja tiheysfunktion olemassaolo, jakautuman tyyppi voi olla mielivaltainen. Tässä kohtaa onkin nähtävissä käytettyjen menetelmien ja ratkaisun löytyminen sekä sen yleispätevyyden kannalta yksi tärkeimmistä eroista nyt esitettävän työn ja lähtökohdana olleiden kulshresthan töiden välillä. Kulshresthalla on vain kahdessa yksinkertaisimmassa tapauksessa sallittu muukin jakautuma kuin eksponentiaalijakautuma. Näistä toinen ⁽¹⁾ on ratkaistu suljetussa muodossa loppuun asti, toisessa ⁽²⁾ on päädytty eräänlaiseen rekursiiviseen, numeeriset tulokset mahdollistavaan ratkaisualgoritmiin. Kahdessa muussa tapauksessa ⁽³⁾ on jakautumatyypiksi sallittu vain eksponentiaalijakautuma. Siirtyminen eksponentiaalijakautumasta yleiseen, kaikki jatkuvuus- ja tiheysfunktion olemassaolovaatimukset täyttävät jakautumat katkaiaan esitysmuotoon muuttaa systeemin tilayhtälöitä ratkaisevasti; tavallisista differentiaaliyhtälöistä joudutaan osittaisdifferentiaaliyhtälöihin ja osittaisdifferentiaaliyhtälöt saavat muodon, jossa kertoimet ovat muuttuvia, vieläpä niin, että tämä muuttuvuus ilmenee kertoimeen sisältyvänä funktiotyypin muuttumisena. Käyttämällä apuna sopivasti määriteltäviä tiheysfunktio-laurekkeita voidaan tarkastelut saattaa näillä yleisemmilläkin oletuksilla loppuun saakka suljetussa muodossa.

Osasysteemin S_2 komponenttien oletetaan noudattavan eksponentiaalista häiriöttömän toiminta-ajan jakautumaa, tukiin kuitenkin omina parametreineen. Aivan yleisessä tapauksessa matemaattiset

1. Kulshrestha III
2. Kulshrestha II
3. Kulshrestha I ja V

(30)
tarkastelut muodostuisivat kohtuuttoman hankaliksi, suljetussa muodossa kenties mahdottomiksi saattaa loppuun. Toisaalta eksponentiaalijakautuman käytölle tässä yhteydessä on olemassa vahvat perusteensa. Jaksossa 2.3.1 viitattiin jo selvityksiin, joissa on esitelty sekä empiirisiä että teoreettisia perusteluja eksponentiaalijakautuman soveltuvuudesta melko yleisiin edellytyksiin häiriöttömän toiminta-ajan malliksi. Tarkastelemalla vitataajuusfunktion yleistö, klassillista muotoa (vrt. kuva 2.2) voidaan lisäksi todeta, että niissäkin tapauksissa, joissa jakautuma ei ole eksponentiaalinen, suurimman osan ajasta eksponentiaalijakautuma käy kuitenkin varsin hyvänä approksimaationa. Lopuksi on vielä korostettava, että tarkastelujen päämielentiinto on osasysteemin S_1 , jolloin sen käsittely mahdollisimman yleisin oletuksin on kuitenkin tärkeintä. Tutemmat oletukset S_2 :ssa eivät tällöin tulosten kannalta nouse kovin merkittäväksi tekijäksi.

3.3.2. Korjausaika

Myöskin korjausaika oletetaan satunnaissuureeksi. Kullekin komponentille on oma jakautumansa (S_1 :n komponenteille luonnollisesti sama), jonka suhteen asetetaan ainoastaan jatkuvuus- ja tiheysfunktion olemassaolovaatimukset. Tyypillisimpiä korjausaajan jakautumia ovat katkaistu normaalijakautuma ja log-normaalinen jakautuma, mutta muutkin jakautumatyypit voivat tulla kysymykseen. Jakautuman identifiointiin käytetään seuraavassa pääasiassa korjauksen päättymisintensiteettiä, joka on vitataajuutta vastaava funktio korjausaajan jakautuman yhteydessä. Korjausaajan tiheysfunktio on tällöin muotoa (2.9). Esitysmuoto mahdollistaa kaikkien vaatimukset täyttävien jakautumien käsittelyn saman mallin puitteissa.

3.3.3. Korjauksen odotusaika

Sen jälkeen kun vika on syntynyt ja se on todettu, kestää yleensä jonkin aikaa ennen kuin varsinainen korjaustyö voi alkaa. Syytä on useampiakin. Korjausmiehistö voi olla kiinnitettynä johonkin muuhun työhön. Varaosalla voi olla tietty

toimintusaika tai korjaustyyjiä vaatii uusia piirustuksia tms. Kaikki tällaiset toimenpiteet on esillä olevassa mallissa huomioitu korjauksen odotus- ja valmisteluajana, joka on oletettu satunnaissuureeksi. Odotusajan jakautumalle asetetuista vaatimuksista on voimassa, mitä korjausajan jakautuman yhteydessä on esitetty.

Kulshrestha on ottanut odotusajan huomioon vain yhdessä¹¹ mainituista neljästä tapauksesta, siinäkin jakautumatyypiksi sallitaan vain eksponentiaalijakautuma. Odotusajan ottamiselle muutoin yleisessä muodossaan on kuitenkin olemassa perustelunsa. Edellä jo todettiin sen reaali maailmasta juontuva tausta. Seuraavissa luvuissa se osoittautuu myös teoreettisesti mielenkiintoiseksi. Voidaan nimittäin osoittaa, että stationäärisen vaiheen ratkaisussa odotusajan (samoin kuin korjausajan) jakautumatyypin vaihtus häviää, jäljelle jää vain jakautuman yksi parametri, odotusarvo.

1. Kulshrestha I

4. SYSTEEMIN KÄYTTÄYTYMINEN, KUN OSASYSTEEMI S_1 ON AKTIIVISESTI RINNANKYTKETTY

Tässä luvussa tarkastellaan systeemiä niissä olosuhteissa, jotka syntyvät, kun osasysteemi S_1 toimii aktiivisesti rinnankytkettynä. Maudatettavan korjauspolitiikan perusteella saadaan vielä kaksi eri tapausa; kappaleen 4.1 tarkasteluissa on korjauspolitiikkana minimikorjauspolitiikka ja kappaleessa 4.2 täyskorjauspolitiikka. Kytkentänsä ja korjauspolitiikkansa puolesta näin spesifioitua systeemiä kutsutaan jäljempänä (A, P_1) -systeemiksi (minimikorjauspolitiikka) tai (A, P_2) -systeemiksi (täyskorjauspolitiikka).

4.1. Korjauspolitiikkana minimikorjauspolitiikka P_1

4.1.1. (A, P_1) -systeemin tilat

Systeemin käyttäytymisen yksityiskohtaiseksi kuvaamiseksi otetaan käyttöön systeemin tila-käsite. Systeemin tilalla tarkoitetaan seuraavassa käsitettä, joka yksikäsitteisesti määrittelee ne systeemin toimintakyvyn kannalta relevantit olosuhteet, jotka systeemissä ja sen komponenteissa kulloinkin vallitsevat. Esillä olevan (A, P_1) -systeemin kuvaamiseksi osoittautuu tarkoituksenmukaiseksi valita seuraavat tilat:

D_m : systeemi on toimintatunnossa, S_1 :n komponenteista on m kpl vioittunut ($m=0, 1, \dots, M-1$)

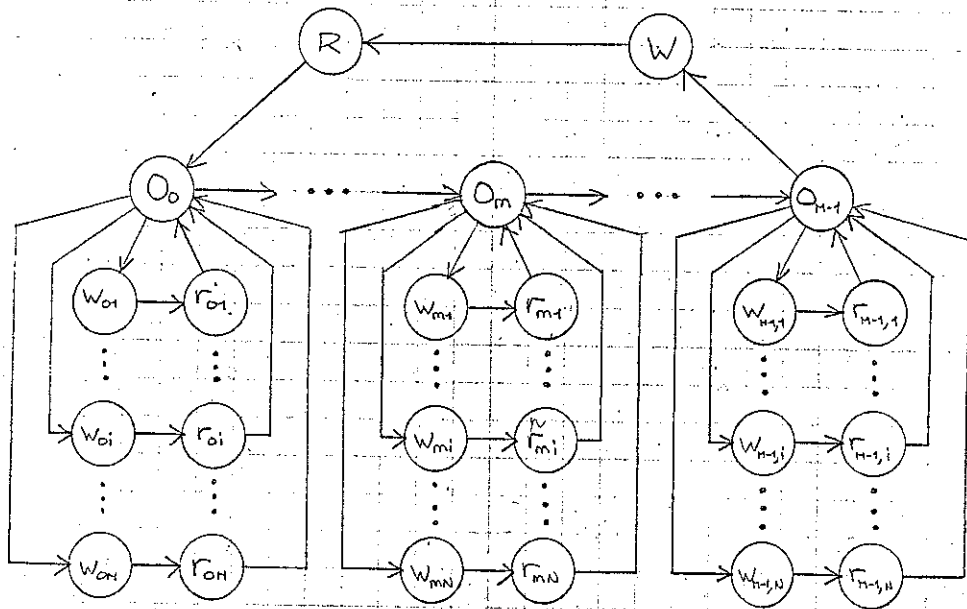
W : systeemi odottaa korjauksen alkua, toimintakyvyttömyyden syynä S_1 :n kaikkien komponenttien vioittuminen

R : systeemi korjauksen alaisena, S_1 :n violliset komponentit (M kpl) korjataan.

w_{mi} : systeemi odottaa korjauksen alkamista, toimintakeskityksen syynä S_2 :n komponentin i vikauminen; S_2 :n komponenteista on m viallista ($m=0,1,\dots,M-1$; $i=1,2,\dots,M$)

Γ_{mi} : systeemi korjataan alaisena, S_2 :n komponenttia i kunnostetaan; S_2 :n komponenteista on m viallista ($m=0,1,\dots,M-1$; $i=1,2,\dots,M$), S_2 :n toimivien komponenttien kohdalla toteutetaan ennakkohuolto-ohjelmaa

(A, P_1) -systeemin tilat ja mahdollisuudet siirtymä tilasta toiseen on esitetty kaaviona kuvassa 4.1.



Kuva 4.1. (A, P_1) -systeemin tilat ja siirtymämahdollisuudet tilasta toiseen

4.1.2. (A, P_1) - systeemin tilayhtälöt

4.1.2.1. Merkinnät

Systeemissä esiintyvien stokastisten prosessien kuvaamiseksi otetaan käyttöön joukko merkintöjä. Systeemin siirtymiseen tiettyyn tilaan tai tässä tilassa viipymiseen liittyvät seuraavat tilatodennäköisyyksien ja tiheysfunktioiden lausekkeet:

$F_m(x, t)$: kertymäfunktio, joka ilmoittaa todennäköisyyden sille, että systeemi hetkellä t on tilassa O_m ja että se on ollut tässä tilassa korkeintaan ajan x . ($m=0,1,\dots,M-1$)

$P_m(x, t)$: kertymäfunktioita $F_m(x, t)$ vastaava tiheysfunktio; lauseke $P_m(x, t) \cdot \Delta + o(\Delta)$ ilmoittaa tällöin todennäköisyyden, että systeemi on hetkellä t tilassa O_m ja että siirtyminen tähän tilaan on tapahtunut aikavälillä $(t-x-\Delta, t-x)$, ($m=0,1,\dots,M-1$)

$P_m(t)$: todennäköisyys, että systeemi hetkellä t on tilassa O_m ($m=0,1,\dots,M-1$)

$F_W(x, t)$: kertymäfunktio, joka ilmoittaa todennäköisyyden sille, että systeemi hetkellä t on tilassa W ja on ollut tässä tilassa korkeintaan ajan x

$P_W(x, t)$: edellistä vastaava tiheysfunktio

$P_W(t)$: todennäköisyys, että systeemi hetkellä t on tilassa W

$F_R(x, t)$: kertymäfunktio, joka ilmoittaa todennäköisyyden sille, että systeemi hetkellä t on tilassa R ja on ollut tässä tilassa korkeintaan ajan x

$P_R(x, t)$: edellistä vastaava tiheysfunktio

$P_R(t)$: todennäköisyys, että systeemi hetkellä t on tilassa R

$F_{w_{mi}}(x, t)$: kertymäfunktio, joka ilmaittaa todennäköisyyden sille, että systeemi hetkellä t on tilassa w_{mi} ja on ollut tässä tilassa korkeintaan ajan x ($m=0, 1, \dots, M-1$; $i=1, 2, \dots, M$)

$P_{w_{mi}}(x, t)$: edelliseen liittyvä tiheysfunktio ($m=0, 1, \dots, M-1$; $i=1, 2, \dots, M$)

$P_{w_{mi}}(t)$: todennäköisyys, että systeemi hetkellä t on tilassa w_{mi} ($m=0, 1, \dots, M-1$; $i=1, 2, \dots, M$)

$F_{r_{mi}}(x, t)$: kertymäfunktio, joka ilmaittaa todennäköisyyden sille, että systeemi hetkellä t on tilassa r_{mi} ja on ollut tässä tilassa korkeintaan ajan x ($m=0, 1, \dots, M-1$; $i=1, 2, \dots, M$)

$P_{r_{mi}}(x, t)$: edelliseen liittyvä tiheysfunktio ($m=0, 1, \dots, M-1$; $i=1, 2, \dots, M$)

$P_{r_{mi}}(t)$: todennäköisyys, että systeemi hetkellä t on tilassa r_{mi} ($m=0, 1, \dots, M-1$; $i=1, 2, \dots, M$)

Yllä määriteltyjä lausekkeita sitovat toisiinsa mm. yhtälöt:

$$(4.1) \quad P_m(t) = \int_0^{\infty} P_m(x, t) dx \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

$$(4.2) \quad P_w(t) = \int_0^{\infty} P_w(x, t) dx$$

$$(4.3) \quad P_R(t) = \int_0^{\infty} P_R(x, t) dx$$

$$(4.4) \quad P_{w_{mi}}(t) = \int_0^{\infty} P_{w_{mi}}(x, t) dx$$

$$(4.5) \quad P_{r_{mi}}(t) = \int_0^{\infty} P_{r_{mi}}(x, t) dx \quad (m=0, 1, \dots, M-1; i=1, 2, \dots, M)$$

Häiriöttömän käyntiajan, korjauksen alun odotusajan ja korjauksen kestoaajan intensiteetti- ja tiheysfunktioita merkitään

$\alpha(x)$: osasysteemin S_1 yksityisen komponentin vikataajuus; $\alpha(x) \cdot \Delta + o(\Delta)$ on tällöin todennäköisyys, että ajan x kestänyt komponentti vioittuu aikavälillä $(x, x+\Delta)$.

$A(x)$: S_1 :n yksityisen komponentin häiriöttömän käyntiajan tiheysfunktio

$\beta(x)$: osasysteemin S_1 korjauksen valmistumisintensiteetti; $\beta(x) \cdot \Delta + o(\Delta)$ ilmaittaa todennäköisyyden, että jo ajan x kestänyt korjaus päättyy aikavälillä $(x, x+\Delta)$.

$B(x)$: osasysteemin S_1 korjausajan tiheysfunktio

$\gamma(x)$: osasysteemin S_1 korjauksen odotusajan päättymisintensiteetti; $\gamma(x) \cdot \Delta + o(\Delta)$ ilmaittaa todennäköisyyden, että ajan x kestänyt S_1 :n korjaukseen liittyvä odotusaika päättyy aikavälillä $(x, x+\Delta)$.

$C(x)$: osasysteemin S_1 korjaukseen liittyvän odotusajan tiheysfunktio

λ_i : osasysteemin S_2 komponentin i vikataajuus (vakio; $i=1, 2, \dots, M$)

$\eta_i(x)$: osasysteemin S_2 komponentin i korjaukseen liittyvän odotusajan päättymisintensiteetti ($i=1, 2, \dots, M$)

$H_i(x)$: osasysteemin S_2 komponentin i korjaukseen liittyvän odotusajan tiheysfunktio ($i=1, 2, \dots, M$)

$\mu_i(x)$: osasysteemin S_2 komponentin i korjauksen valmistumisintensiteetti ($i=1, 2, \dots, M$)

$M_i(x)$: osasysteemin S_2 komponentin i korjausajan tiheysfunktio ($i=1, 2, \dots, M$)

Intensiteettisuureiden ja vastaavien tiheysfunktioiden välillä vallitsevat nyt yhtälön (2.9) mukaisesti seuraavat yhteydet:

$$(4.6) \quad A(x) = \alpha(x) e^{-\int_0^x \alpha(u) du}$$

$$(4.7) \quad B(x) = \beta(x) e^{-\int_0^x \beta(u) du}$$

$$(4.8) \quad C(x) = \gamma(x) e^{-\int_0^x \gamma(u) du}$$

$$(4.9) \quad H_i(x) = \eta_i(x) e^{-\int_0^x \eta_i(u) du}$$

$$(4.10) \quad M_i(x) = \mu_i(x) e^{-\int_0^x \mu_i(u) du}$$

$(i=1,2,\dots,M)$

Lisäksi merkitään

$$(4.11) \quad \lambda = \sum_{i=1}^M \lambda_i \quad \text{ja}$$

$$(4.12) \quad A_k(x) = k\alpha(x) e^{-\int_0^x k\alpha(u) du} \quad (k=1,2,\dots,M)$$

Tällöin on erityisesti

$$(4.13) \quad A_1(x) = A(x)$$

Muut merkinnät selostetaan siinä yhteydessä kuin ne tekstissä esiintyvät.

4.1.2.2. Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Tarkastellaan aluksi (A, P_1) -systeemin käyttäytymistä mielivaltaiseen ajonhetkeen t liittyvänä lyhyenä aikavälinä $(t, t+\Delta)$. Systeemissä hetkellä t vallinneen tilan säilymistä hetkeen $t+\Delta$ kuvaavat nyt seuraavat "eteenpäin" muodostetut differentssi yhtälöt:

$$(4.14) \quad P_m(x+\Delta, t+\Delta) = P_m(x, t) \left\{ [1 - \alpha(x) \cdot \Delta] \prod_{i=t}^{t+\Delta} (1 - \lambda_i \Delta) \right\} + o(\Delta) \quad (m=0,1,\dots,M-1)$$

$$(4.15) \quad P_w(x+\Delta, t+\Delta) = P_w(x, t) [1 - \gamma(x) \Delta] + o(\Delta)$$

$$(4.16) \quad P_r(x+\Delta, t+\Delta) = P_r(x, t) [1 - \beta(x) \Delta] + o(\Delta)$$

$$(4.17) \quad P_{wmi}(x+\Delta, t+\Delta) = P_{wmi}(x, t) [1 - \eta_i(x) \Delta] + o(\Delta)$$

$$(4.18) \quad P_{rmi}(x+\Delta, t+\Delta) = P_{rmi}(x, t) [1 - \mu_i(x) \Delta] + o(\Delta)$$

$(m=0,1,\dots,M-1; i=1,2,\dots,M)$

Kun nyt yhtälöissä (4.14) - (4.18) siirrytään raja-tarkasteluihin, eli annetaan lähestyvä $\Delta \rightarrow 0$, saadaan tiheysfunktio lausekkeiden määrittämiseksi seuraavat osittaisdifferentiaaliyhtälöt:

$$(4.19) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + (M-m)\alpha(x) + \lambda \right] P_m(x, t) = 0 \quad (m=0,1,\dots,M-1)$$

$$(4.20) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \gamma(x) \right] P_w(x, t) = 0$$

1. Yhtälöiden muodostamisperiaale rakentuu Keilsonin ja Koo-harianin (ss. 104-105) jonoteoreettisten tarkastelujen yhteydessä kehittämälle tekniikalle, jota Kulshrestha (I-V) on puolestaan soveltanut luotettavuusteoreettisissa yhteyksissä

© ms. lisämuuttaja =

$$(4.21) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \beta(x) \right] P_R(x, t) = 0$$

$$(4.22) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \eta_i(x) \right] P_{wmi}(x, t) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} (m=0, 1, \dots, M-1; \\ i=1, 2, \dots, M) \end{array} \right\}$$

$$(4.23) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \mu_i(x) \right] P_{rmi}(x, t) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} (m=0, 1, \dots, M-1; \\ i=1, 2, \dots, M) \end{array} \right\}$$

Yhtälöissä (4.19) - (4.23) x ja t ovat aitasuureita, joten tiheysfunktiot on määritelty vain alueella

$$(4.24) \quad \Gamma = \{ (x, t) \mid x \geq 0, t \geq 0 \}.$$

Yhtälöitä ratkaistaessa on näin otettava huomioon alueen Γ reunoilla

$$(4.25) \quad \Gamma_x = \{ (x, 0) \mid x \geq 0 \}$$

$$(4.26) \quad \Gamma_t = \{ (0, t) \mid t \geq 0 \}$$

vallitsevat erikoisehdot.

4.1.2.3. Reunaehdot

Ratkaisualueen reunalla Γ_t vallitsevat ehdot kuvaavat systeemin siirtymistä tilasta toiseen (onhan tällöin uudessa tilassa viivytetty aika $x=0$). Reunaehdot saavat muodon⁽¹⁾:

1. Reunaehtojen muodostamisperiaate on yksityiskohtaisesti esitetty Keilsonin ja Kooharianin tutkimuksessa s. 106; tätä alunperin jonoteoreettisessa tapauksessa esitettyä periaatetta on Kulkhrestha soveltanut nyt tarkastelujen kohtena olevissa yhteyksissä.

$$(4.27) \quad P_0(0, t) = \int_0^\infty P_R(x, t) \beta(x) dx + \sum_{i=1}^M \int_0^\infty P_{roi}(x, t) \mu_i(x) dx$$

$$(4.28) \quad P_m(0, t) = \int_0^\infty P_{m-1}(x, t) [H-m+1] \alpha(x) dx + \sum_{i=1}^M \int_0^\infty P_{rmi}(x, t) \mu_i(x) dx \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(4.29) \quad P_w(0, t) = \int_0^\infty P_{H-1}(x, t) \alpha(x) dx$$

$$(4.30) \quad P_R(0, t) = \int_0^\infty P_w(x, t) \gamma(x) dx$$

$$(4.31) \quad P_{wmi}(0, t) = \lambda_i P_m(t)$$

$$(4.32) \quad P_{rmi}(0, t) = \int_0^\infty P_{wmi}(x, t) \eta_i(x) dx \quad \left. \begin{array}{l} (m=0, 1, \dots, M-1; \\ i=1, 2, \dots, M) \end{array} \right\}$$

Systeemin käyttäytymisen yksitösisiteiseksi selvittämiseksi on vielä tunnettava systeemin alkutila, ts. tila hetkellä $t=0$. Alkutila voidaan määrittellä reunalla Γ_x vallitsevilla reunaehdoilla. Kun alkutilaksi valitaan D_0 , ovat reunaehdot muotoa

$$(4.33) \quad P_0(x, 0) = \delta(x)$$

$$(4.34) \quad P_m(x, 0) = 0 \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(4.35) \quad P_w(x, 0) = P_R(x, 0) = 0$$

$$(4.36) \quad P_{wmi}(x, 0) = P_{rmi}(x, 0) = 0 \quad (m=0, 1, \dots, M-1; i=1, 2, \dots, M)$$

Yhtälössä (4.33) on symbolilla $\delta(x)$ merkitty Dirac'in delta-funktiota⁽¹⁾.

Yhtälöitä (4.19) - (4.23), (4.27) - (4.32) ja (4.33) - (4.36), joiden perusteella voidaan määrätä kutakin ajan hetkeä t vastaavat todennäköisyydet systeemin eri tiloissa olemiselle, kutsutaan seuraavassa systeemin tilayhtälöiksi.

1. Delta-funktiasta ks. esim. Zadeh ja Desoer, s. 515

4.1.3. Tilayhtälöiden ratkaisut

4.1.3.1. Tilayhtälöiden Laplace-muunnokset

Osittaisdifferentiaaliyhtälöissä (4.19) - (4.23) esiintyy sekä muuttujan x että muuttujan t suhteen muodostetut osittaisderivaatat. Siirtymällä yhtälöiden Laplace-muunnoksiin päästään yhtälöihin, joissa esiintyy ainoastaan osittaisderivaatta muuttujan x suhteen. Merkittään seuraavassa yleisesti funktion $F(t)$ Laplace-muunnosta $\mathcal{L}\{F(t)\}$ (edellyttäen, että se on olemassa) vastaavalla pienellä kirjaimella, ts.

$$(4.37) \quad \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = f(s).$$

Kun yhtälöihin (4.19) - (4.23) suoritetaan Laplace-muunnokset ja otetaan huomioon reunaehdot (33) - (36), saadaan osittaisdifferentiaaliyhtälöt:

$$(4.38) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + M\alpha(x) + \lambda \right] p_0(x, s) = \delta(x)$$

$$(4.39) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + (M-m)\alpha(x) + \lambda \right] p_m(x, s) = 0 \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(4.40) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \gamma(x) \right] p_w(x, s) = 0$$

$$(4.41) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \beta(x) \right] p_r(x, s) = 0$$

$$(4.42) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \eta_i(x) \right] p_{wmi}(x, s) = 0$$

$$(4.43) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \mu_i(x) \right] p_{rmi}(x, s) = 0$$

$(m=0, 1, \dots, M-1; i=1, 2, \dots, I)$

Reunaehtoyhtälöiden (4.27) - (4.32) Laplace-muunnokset puolestaan ovat:

$$(4.44) \quad p_0(0, s) = \int_0^{\infty} p_r(x, s) \beta(x) dx + \sum_{i=1}^I \int_0^{\infty} p_{roi}(x, s) \mu_i(x) dx$$

$$1. \quad \mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0), \text{ Spiegel I, s. 4}$$

$$(4.45) \quad p_m(0, s) = \int_0^{\infty} p_{m-1}(x, s) (M-m+1) \alpha(x) dx + \sum_{i=1}^I \int_0^{\infty} p_{rmi}(x, s) \mu_i(x) dx \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(4.46) \quad p_w(0, s) = \int_0^{\infty} p_{M-1}(x, s) \alpha(x) dx$$

$$(4.47) \quad p_r(0, s) = \int_0^{\infty} p_w(x, s) \gamma(x) dx$$

$$(4.48) \quad p_{wmi}(0, s) = \lambda_i p_m(s)$$

$$(4.49) \quad p_{rmi}(0, s) = \int_0^{\infty} p_{wmi}(x, s) \eta_i(x) dx$$

$(m=0, 1, \dots, M-1; i=1, 2, \dots, I)$

4.1.3.2. Muunnosyhtälöiden ratkaisut

Yhtälöiden (4.38) - (4.43) ratkaisuksi saadaan integroimalla ja hetken $t=0$ arvot alkuehdoiksi ottamalla lausekkeet:

$$(4.50) \quad p_0(x, s) = [1 + p_0(0, s)] e^{-(s+\lambda)x - \int_0^x M\alpha(u) du} \exp\left[-(s-\lambda)x - \int_0^x M\alpha(u) du\right]$$

$$(4.51) \quad p_m(x, s) = p_m(0, s) e^{-(s+\lambda)x - \int_0^x (M-m)\alpha(u) du} \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(4.52) \quad p_w(x, s) = p_w(0, s) e^{-sx - \int_0^x \gamma(u) du}$$

$$(4.53) \quad p_r(x, s) = p_r(0, s) e^{-sx - \int_0^x \beta(u) du}$$

1. Lisäksi on käytetty hyväksi delta-funktion ominaisuutta $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t) dt = g(0)$, vrt. esim. Zadeh ja Desoer, s. 516

$$(4.54) \quad P_{vmi}(x, s) = P_{vmi}(0, s) e^{-sx - \int_0^x \eta_i(u) du} \\ (4.55) \quad P_{rmi}(x, s) = P_{rmi}(0, s) e^{-sx - \int_0^x \mu_i(u) du} \quad \left. \begin{array}{l} (m=0, 1, \dots, M-1, \\ i=1, 2, \dots, M) \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

Seuraavaksi todistetaan kaksi lemmaa, joiden tuloksia tullaan myöhemmin toistuvasti tarvitsemaan. Lemma 4.1 esitetään komponentin häiriöttömään käyntiaikaan liittyviä suureita koskevana, mutta sen antama tulos on suoraan sovellettavissa odotusaika- ja korjausaikasuureisiin; kunhan $\alpha(x)$, $A(x)$ ja $a(s)$ korvataan vastaavasti suureilla $\beta(x)$, $B(x)$ ja $b(s)$ jne.

Lemma 4.1. Lausekkeen $e^{-\int_0^x \alpha(u) du}$ Laplace-muunnos on

$$\mathcal{L}\{e^{-\int_0^x \alpha(u) du}\} = \int_0^\infty e^{-sx - \int_0^x \alpha(u) du} dx = \frac{1}{s} [1 - a(s)],$$

missä $a(s) = \mathcal{L}\{A(x)\}$.

Todistus. Osittaisintegrointia soveltamalla sekä yhtälö (2.9) ja sovitut merkinnät huomioiden saadaan

$$\int_0^\infty e^{-sx - \int_0^x \alpha(u) du} dx = \int_0^\infty e^{-sx} e^{-\int_0^x \alpha(u) du} dx \\ = \int_0^\infty \left\{ -\frac{1}{s} e^{-sx} e^{-\int_0^x \alpha(u) du} \right\} - \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-sx} \alpha(x) e^{-\int_0^x \alpha(u) du} dx \\ = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-sx} A(x) dx = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} a(s) = \frac{1}{s} [1 - a(s)].$$

Lemma 4.2. On voimassa

$$\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x - \int_0^x k \alpha(u) du} dx = \frac{1}{s+\lambda} [1 - a_k(s+\lambda)] \quad (k=1, 2, \dots, M)$$

Todistus. Lemma 4.2 voidaan osoittaa oikeaksi vastaavalla tavalla kuin lemma 4.1 suoraan osittaisintegrointia soveltamalla. Tässä todistus kuitenkin (triviaalina) sivuutetaan.

Kun yhtälöön (4.1) puolittain suoritetaan Laplace-muunnos, saadaan

$$(4.56) \quad P_m(s) = \int_0^\infty P_m(x, s) dx \quad (m=0, 1, \dots, M-1).$$

Tämä sekä lemmän 4.2 tulos huomioiden voidaan yhtälöstä (4.50) lähtien kirjoittaa

$$P_0(s) = \int_0^\infty [1 + P_0(0, s)] e^{-(s+\lambda)x - \int_0^x M \alpha(u) du} dx \\ = [1 + P_0(0, s)] \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x - \int_0^x M \alpha(u) du} dx \\ = [1 + P_0(0, s)] \frac{1 - a_M(s+\lambda)}{s+\lambda}$$

eli viimein

$$(4.57) \quad P_0(0, s) = \frac{s+\lambda}{1 - a_M(s+\lambda)} P_0(s) - 1.$$

Samalla tavalla saadaan yhtälöstä (4.51) lähtien tulos

$$(4.58) \quad P_m(0, s) = \frac{s+\lambda}{1 - a_{M-m}(s+\lambda)} P_m(s) \quad (m=1, 2, \dots, M-1).$$

Yhtälöä (4.2) vastaavasta muunnosyhtälöstä lähtien ja lemmän 4.1 "tulosta" sekä yhtälöitä (4.46), (4.51), (4.52) ja (4.58) soveltaen saadaan

$$P_w(s) = \int_0^\infty P_w(x, s) dx \\ = P_w(0, s) \int_0^\infty e^{-sx - \int_0^x \gamma(u) du} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= P_W(0, s) \frac{1-c(s)}{s} \\
 &= \frac{1-c(s)}{s} \int_0^{\infty} P_{H-1}(x, s) \alpha(x) dx \\
 &= \frac{1-c(s)}{s} P_{H-1}(0, s) \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x} \alpha(x) e^{-\int_0^x \alpha(u) du} dx \\
 &= \frac{1-c(s)}{s} \frac{s+\lambda}{1-a(s+\lambda)} P_{H-1}(s) a(s+\lambda)
 \end{aligned}$$

eli lopullisessa muodossaan

$$(4.59) \quad P_W(s) = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda) [1-c(s)]}{s [1-a(s+\lambda)]} P_{H-1}(s).$$

Muiden tilatodennäköisyyksien Laplace-muunnoksille voidaan johtaa oivan vastaavalla tavalla lausekkeet

$$(4.60) \quad P_R(s) = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda) [1-b(s)] c(s)}{s [1-a(s+\lambda)]} P_{H-1}(s)$$

$$\begin{aligned}
 (4.61.) \quad P_{Wm_i}(s) &= \frac{\lambda_i [1-h_i(s)]}{s} P_m(s) \\
 (4.62) \quad P_{Rm_i}(s) &= \frac{\lambda_i h_i(s) [1-m_i(s)]}{s} P_m(s)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} P_{Wm_i}(s) \\ P_{Rm_i}(s) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, M \\ m=0, 1, \dots, M-1 \end{array}$$

Tilatodennäköisyyksien Laplace-muunnokset ovat nyt siis kaikki lausutut lausekkeiden $P_m(s)$ ($m=0, 1, \dots, M-1$) avulla. Nämä lausekkeet ovat kuitenkin vielä tuntemattomat. Ratkaisua varten ovat käytettävissä tähän saakka sivussa alleet yhtälöt (4.44) ja (4.45). Kun yhtälöön (4.45) sijoitetaan yhtälöiden (4.48), (4.49), (4.51), (4.54), (4.55) ja (4.58) tulokset, saa se muodon

$$\begin{aligned}
 &\frac{s+\lambda}{1-a_{H-m}(s+\lambda)} P_m(s) \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{s+\lambda}{1-a_{H-m+1}(s+\lambda)} P_{m-1}(s) e^{-(s+\lambda)x} (H-m+1) \alpha(x) e^{-\int_0^x (H-m+1) \alpha(u) du} dx \\
 &+ \sum_{i=1}^M \lambda_i P_m(s) \left[\int_0^{\infty} e^{-sx} \mu_i(x) e^{-\int_0^x \mu_i(u) du} dx \right] \left[\int_0^{\infty} e^{-sx} \eta_i(x) e^{-\int_0^x \eta_i(u) du} dx \right]
 \end{aligned}$$

Tämä voidaan termejä yhdistämällä ja alussa sovituja merkintöjä käyttäen saattaa muotoon

$$(4.63) \quad \begin{cases} \left[\frac{s+\lambda}{1-a_{H-m}(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] P_m(s) \\ = \frac{[s+\lambda] a_{H-m+1}(s+\lambda)}{1-a_{H-m+1}(s+\lambda)} P_{m-1}(s) \quad (m=1, 2, \dots, M-1) \end{cases}$$

Kiinnällä s :n arvolla yhtälö (4.63) on systeemin tiibihin liittyvän indikaattorin m suhteen 1. kertaluvun homogeeninen differenssiyhtälö, jonka kertoimet ovat kuitenkin mistä riippuvaiset. Riippuvuus on lisäksi sen luonteista, että m :n mukana muuttuvat $P_m(s)$:n ja $P_{m-1}(s)$:n kerroinlausekkeisiin sisältyvät funktiot $a_{H-m}(s+\lambda)$. Yleisessä tapauksessa tällaisen yhtälön ratkaisun löytyminen suljetussa muodossa voi muodostua varsin hankalaksi. Yhtälöstä (4.63) huomataan kuitenkin, että $P_m(s)$:n kertoimessa esiintyy vain funktio $a_{H-m}(s+\lambda)$ ja $P_{m-1}(s)$:n kertoimessa funktio $a_{H-(m-1)}(s+\lambda)$. Tämä antaa aiheen etsiä ratkaisua, joka on muotoa:

$$(4.64) \quad P_m(s) = \frac{D(s) [1-a_{H-m}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_{H-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1), \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

1. Ratkaisun tulomuotoisuus voidaan johtaa esim. parametrien variainti- tai summaustekijä-menetelmällä, myös generoivien funktioiden käyttö johtaa ratkaisun löytymiseen; ks. esim. Spiegel I, s.175

missä $Q(s, m)$ on tulolauseke

$$(4.65) \begin{cases} Q(s, m) = \prod_{k=1}^m \frac{s+\lambda - [1-a_k(s+\lambda)] \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{[s+\lambda] a_k(s+\lambda)} & (m=1, 2, \dots) \\ Q(s, 0) = 1 \end{cases}$$

ja $D(s)$ on m :stä riippumaton (toistaiseksi tuntematon s :n funktio. Yhtälöiden (4.64) ja (4.65) määrittelemän $p_m(s)$:n lausekkeen voidaan osoittaa todella olevan yhtälön (4.63) ratkaisu. Tämä nähdään helposti suorittamalla tähän yhtälöön (4.64):n ja (4.65):n mukaiset sijoitukset ja sieventämällä:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{s+\lambda}{1-a_{H-m}(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] \frac{D(s) [1-a_{H-m}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_{H-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1) \\ & - \frac{[s+\lambda] a_{H-m+1}(s+\lambda)}{1-a_{H-m+1}(s+\lambda)} \frac{D(s) [1-a_{H-m+1}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_{H-m+1}(s+\lambda)} Q(s, M-m) \\ & = D(s) \left\{ \frac{s+\lambda - [1-a_{H-m}(s+\lambda)] \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{[s+\lambda] a_{H-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1) - Q(s, M-m) \right\} \\ & = D(s) \{ Q(s, M-m) - Q(s, M-m) \} = 0. \end{aligned}$$

Yhtälön (4.63) ja samalla kaikkien muunnosyhtälöiden ratkaisut ovat nyt lauseketta $D(s)$ vaille tunnetut. $D(s)$:n määrittämiseksi on vielä käytettävissä yhtälö (4.44). Kun tähän tehdään tarpeelliset sijoitukset, saadaan vastaavalla tavalla kuin yhtälöä (4.63) johdettaessa

$$\begin{aligned} & \left[\frac{s+\lambda}{1-a_H(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] p_0(s) \\ & - \frac{a(s+\lambda) c(s) b(s) [s+\lambda]}{1-a(s+\lambda)} p_{H-1}(s) = 1, \end{aligned}$$

josta saadaan (4.64):n perusteella yhtälö

$$\begin{aligned} & \left[\frac{s+\lambda}{1-a_H(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] \frac{[1-a_H(s+\lambda)] D(s)}{[s+\lambda] a_H(s+\lambda)} Q(s, M-1) \\ & - \frac{a(s+\lambda) b(s) c(s) [s+\lambda]}{1-a(s+\lambda)} \frac{[1-a(s+\lambda)] D(s)}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} Q(s, 0) = 1, \end{aligned}$$

ja (4.65):n perusteella edelleen

$$D(s) \{ Q(s, M) - b(s) c(s) \} = 1.$$

Lauseke $D(s)$ on siis lopulta muotoa

$$(4.66) \quad D(s) = \frac{1}{Q(s, M) - b(s) c(s)}$$

Muunnosyhtälöiden ratkaisut ovat tämän jälkeen

$$(4.67) \quad p_m(s) = \frac{[1-a_{H-m}(s+\lambda)] Q(s, M-m-1)}{[s+\lambda] a_{H-m}(s+\lambda) [Q(s, M) - b(s) c(s)]} \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

$$(4.68) \quad p_W(s) = \frac{1-c(s)}{s [Q(s, M) - b(s) c(s)]}$$

$$(4.69) \quad p_R(s) = \frac{[1-b(s)] c(s)}{s [Q(s, M) - b(s) c(s)]}$$

Lausekkeet $p_{Wmi}(s)$ ja $p_{Rmi}(s)$ ($m=0, 1, \dots, M-1$; $i=1, 2, \dots, M$) saadaan yhtälöistä (4.61) ja (4.62), kun niissä $p_m(s)$ on yhtälön (4.67) mukainen.

4.1.3.3. Tilayhtälöiden ratkaisut muunnosyhtälöiden ratkaisujen käänteismuunnoksina

Edellisessä jaksossa johdettiin tilayhtälöiden ratkaisuja, tilatodennäköisyyksiä, vastaavat Laplace-muunnokset. Ennen kuin siirrytään tarkastelemaan kysymystä näiden muunnosten käänteismuunnoksista, suoritetaan eräänlainen "tarkistuslaskelma". Jotta kuvassa 4.1 esitetty tilojen joukko todella olisi hyvin määritelty (A, P_t) -systemin tilajoukko, on tilojen toisalta oltava toisistaan erilliset ja toisalta katettava systemin kaikki mahdolliset tilat. Tilatodennäköisyyksien avulla lausuttuna tämä merkitsee, että on oltava voimassa kaikilla t :n arvoilla identiteetti

$$(4.70) \sum_{m=0}^{H-1} P_m(t) + P_W(t) + P_R(t) + \sum_{m=0}^{H-1} \sum_{i=1}^N [P_{wmi}(t) + P_{rmi}(t)] = 1.$$

Yhtälö (4.70) voidaan osoittaa oikeaksi näyttämällä, että vastaava muunnosyhtälö on voimassa:

$$(4.71) \sum_{m=0}^{H-1} P_m(s) + P_W(s) + P_R(s) + \sum_{m=0}^{H-1} \sum_{i=1}^N [P_{wmi}(s) + P_{rmi}(s)] = \frac{1}{s}.$$

Jälkimmäisen yhtälön paikkansapitävyyden osoittamiseksi todistetaan ensin seuraava lemma:

Lemma 4.3. Kun merkitään

$$g_k(s) = \frac{[1 - a_k(s+\lambda)] [s + \lambda - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)]}{[s + \lambda] a_k(s + \lambda)} \quad (k=1, 2, \dots, M)$$

on voimassa yhtälö

$$Q(s, M) = \sum_{k=1}^M g_k(s) Q(s, k-1) + 1.$$

Todistus. Lausekkeiden $Q(s, m)$ ja $g_k(s)$ määritelmät huomioiden ottaen voidaan kirjoittaa yhtälöketju

$$\begin{aligned} Q(s, M) &= \prod_{k=1}^M \frac{s + \lambda - [1 - a_k(s + \lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{[s + \lambda] a_k(s + \lambda)} \\ &= \frac{s + \lambda - [1 - a_M(s + \lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{[s + \lambda] a_M(s + \lambda)} Q(s, M-1) \\ &= Q(s, M-1) + \frac{[1 - a_M(s + \lambda)] [s + \lambda - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)]}{[s + \lambda] a_M(s + \lambda)} Q(s, M-1) \\ &= Q(s, M-1) + g_M(s) Q(s, M-1) \\ &= Q(s, M-2) + g_{M-1}(s) Q(s, M-2) + g_M(s) Q(s, M-1) \\ &= \dots \\ &= Q(s, 0) + g_1(s) Q(s, 0) + \dots + g_{M-1}(s) Q(s, M-2) \\ &\quad + g_M(s) Q(s, M-1) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^M g_k(s) Q(s, k-1), \end{aligned}$$

jonka viimeinen yhtälö osoittaa lemmän oikeaksi

Yhtälöiden (4.61) - (4.62) ja (4.66) - (4.69) sekä lemmän 4.3 perusteella saadaan nyt

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{H-1} P_m(s) + P_W(s) + P_R(s) + \sum_{m=0}^{H-1} \sum_{i=1}^N [P_{wmi}(s) + P_{rmi}(s)] \\ &= \sum_{m=0}^{H-1} \left\{ s + \sum_{i=1}^N [\lambda_i (1 - h_i(s)) + \lambda_i h_i(s) (1 - m_i(s))] \right\} \frac{P_m(s)}{s} \\ &\quad + P_W(s) + P_R(s) \\ &= \sum_{m=0}^{H-1} \left\{ s + \sum_{i=1}^N \lambda_i - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right\} \frac{P_m(s)}{s} + P_W(s) + P_R(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{s + \lambda - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s} \sum_{m=0}^{M-1} P_m(s) + P_w(s) + P_r(s) \\
&= \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \frac{[s + \lambda - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)] [1 - a_{M-m}(s + \lambda)]}{[s + \lambda] a_{M-m}(s + \lambda)} Q(s, M - m - 1) \right. \\
&\quad \left. + [1 - c(s)] + [1 - b(s)] c(s) \right\} \frac{D(s)}{s} \\
&= \left\{ \sum_{k=1}^M \frac{[s + \lambda - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)] [1 - a_k(s + \lambda)]}{[s + \lambda] a_k(s + \lambda)} Q(s, k - 1) \right. \\
&\quad \left. + 1 - b(s) c(s) \right\} \frac{D(s)}{s} \\
&= \left\{ \sum_{k=1}^M g_k(s) Q(s, k - 1) + 1 - b(s) c(s) \right\} \frac{D(s)}{s} \\
&= \left\{ Q(s, M) - b(s) c(s) \right\} \frac{D(s)}{s} \\
&= \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{D(s)}{s} = \frac{1}{s},
\end{aligned}$$

mitä tulos osoittaa yhtälön (4.71) ja samalla yhtälön (4.70) päikkänsä pitäväksi.

Tilatodennäköisyyksien lausekkeet saadaan nyt käänteismuunnoksina

$$(4.72) \quad P_m(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_m(s)\} \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

$$(4.73) \quad P_w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_w(s)\}$$

$$(4.74) \quad P_r(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_r(s)\}$$

$$(4.75) \quad P_{wmi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_{wmi}(s)\}$$

$$(4.76) \quad P_{rmi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P_{rmi}(s)\} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (m=0, 1, \dots, M-1; i=1, 2, \dots, M)$$

Yleisessä tapauksessa, kun tiheysfunktioiden $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $H_i(x)$ ja $M_i(x)$ luonne on tarkemmin määriteltä-

mättä, ei käänteismuunnosten lausekkeitä luonnollisestikaan voida esittää. Tietyissä erikoistapauksissa todennäköisyyslausekkeet (4.72) - (4.76) ovat sen sijaan verraten helposti määritettävissä. Näin on esimerkiksi silloin, kun systeemissä esiintyvät jakautumat ovat kaikki eksponentiaalisia, ts. intensiteettifunktiot $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\eta_i(x)$ ja $\mu_i(x)$ ovat vakioita. Näiden yksittäistapauksen käsittelyyn ei tässä yhteydessä kuitenkaan puututa, sillä huomattavasti mielenkiintoisemmaksi osoittautuu stationäärisen vaiheen tarkastelu, jota voidaan suorittaa hyvin yleisillä systeemin jakautumia koskevilla oletuksilla.

4.1.3.4. Stationäärisen vaiheen ratkaisut

Seuraavassa osoitetaan, miten eräillä hyvin yleisillä edellytyksillä (tiettyjen odotusarvojen olemassaolo) systeemi t :n kasvaessa saavuttaa stationäärisen vaiheen, jolloin tilatodennäköisyydet ovat systeemissä esiintyvistä jakautumista välittömästi riippumattomat. Riippuvuutta esiintyy ainoastaan jakautumien tiheyden tunnuslukujen, odotusarvojen ja eräiden integraalilausekkeiden välityksellä. Stationäärisen vaiheen ratkaisut voidaankin johtaa tuntematta tarkemmin systeemin jakautumien tiheys- tai intensiteettifunktiolta.

Stationäärisen vaiheen ratkaisut johdetaan tunnetuista tilatodennäköisyyksien muunnoksista (4.61) - (4.62) ja (4.67) - (4.69) käyttäen hyväksi Laplace-muunnosten yleistä loppuarvoteoremaa:

$$(4.77) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s f(s).$$

Yhtälön (4.77) voimassaolon edellytyksenä on luonnollisesti, että oikean puolen raja-arvo on olemassa. Aluksi esitetään eräitä aputuloksia.

1. final-value theorem, ks. Spiegel I, s. 20

Lemma 4.4. $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - D(s)}{s} = \bar{B}$,

missö on merkitty

$$\bar{B} = \int_0^{\infty} x B(x) dx,$$

ts. \bar{B} merkitsee asaysteemin S_1 korjauksen odotusarvoa.

Todistus. Loppuarvoteoreeman ja Laplace-muunnosten konvoluutio-ominaisuuden¹ perusteella sekä ottamalla huomioon, että $B(x)$ on tiheysfunktio, saadaan väitetty tulos aikaan:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - b(s)}{s} &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{1 - b(s)}{s^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} [1 - b(s)] \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \cdot b(s) \right\} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[t - \int_0^t (t-u) B(u) du \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t \left[1 - \int_0^t B(u) du \right] + \int_0^t u B(u) du \right\} \\ &= \int_0^{\infty} u B(u) du = \bar{B}. \end{aligned}$$

Lemma 4.5. $\lim_{s \rightarrow 0} b(s) = 1$.

Todistus. $\lim_{s \rightarrow 0} b(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{b(s)}{s}$

1. $\mathcal{L}^{-1} \{ f(s)g(s) \} = \int_0^t F(u)G(t-u)du$, Spiegel I, s.45.

(53)

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{D(s)}{s} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t B(u) du \\ &= \int_0^{\infty} B(u) du = 1. \end{aligned}$$

Lemma 4.6. $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - b(s)c(s)}{s} = \bar{B} + \bar{C}$.

Todistus.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - b(s)c(s)}{s} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{[1 - b(s)] + [1 - c(s)] - [1 - b(s)][1 - c(s)]}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1 - b(s)}{s} + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1 - c(s)}{s} + \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1 - b(s)}{s} \lim_{s \rightarrow \infty} [1 - c(s)] \\ &= \bar{B} + \bar{C} + \bar{B} \cdot 0 = \bar{B} + \bar{C}. \end{aligned}$$

Lemma 4.7. $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_k(s)}{s} = \frac{1 - a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right\}$
($k=1, 2, \dots, M$)

Todistus.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_k(s)}{s} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 - a_k(s+\lambda)}{[s+\lambda] a_k(s+\lambda)} \cdot \frac{s+\lambda - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s} \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 - a_k(s+\lambda)}{[s+\lambda] a_k(s+\lambda)} \left[1 + \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i [1 - h_i(s) m_i(s)]}{s} \right] \right\} \\ &= \frac{1 - a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} \left[1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \end{aligned}$$

Lemma 4.8. $\lim_{s \rightarrow 0} Q(s, m) = 1$ ($m=1, 2, \dots, M$)

Todistus.

$$\lim_{s \rightarrow 0} Q(s, m) = \lim_{s \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \frac{s+\lambda - [1 - a_k(s+\lambda)] \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{[s+\lambda] \cdot a_k(s+\lambda)}$$

$$= \prod_{k=1}^M \frac{\lambda - [1 - a_k(\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i}{\lambda a_k(\lambda)}$$

$$= \prod_{k=1}^M \frac{\lambda a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} = 1.$$

Lemma 4.9.

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot D(s) = \left\{ \left[1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \sum_{k=1}^M \frac{1 - a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} + \bar{B} + \bar{C} \right\}^{-1}$$

Todistus.

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot D(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{Q(s, M) - b(s)c(s)}{s} \right\}^{-1}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{Q(s, M) - 1}{s} + \frac{1 - b(s)c(s)}{s} \right\}^{-1}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \sum_{k=1}^M \frac{a_k(s)}{s} Q(s, k-1) + \frac{1 - b(s)c(s)}{s} \right\}^{-1}$$

$$= \left\{ \left[1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \sum_{k=1}^M \frac{1 - a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} + \bar{B} + \bar{C} \right\}^{-1}$$

Otetaan seuraavassa käyttöön merkintä, jossa tilatodennäköisyyksien (4.72) - (4.76) raja-arvot, kun $t \rightarrow \infty$, ilmaistaan vastaavalla symbolilla ilman argumenttia. Merkitään siis esimerkiksi

$$P_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t)$$

Tilatodennäköisyyksille saadaan tällöin stationäärisen vaiheen arvot

$$(4.78) \quad P_m = \lim_{t \rightarrow \infty} P_m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s P_m(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot D(s) [1 - a_{H-m}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_{H-m}(s+\lambda)} Q(s, H-m-1)$$

$$= \frac{1 - a_{H-m}(\lambda)}{\lambda a_{H-m}(\lambda)} \frac{1}{\left[1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \sum_{k=1}^M \frac{1 - a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} + \bar{B} + \bar{C}}$$

$$= \frac{1 - a_{H-m}(\lambda)}{\lambda a_{H-m}(\lambda)} \frac{S_H(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_H(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

($m=0, 1, \dots, H-1$)

$$(4.79) \quad P_W = \lim_{t \rightarrow \infty} P_W(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s P_W(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - c(s)}{s} \cdot s \cdot D(s) \right\}$$

$$= \frac{\bar{C} S_H(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_H(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

$$(4.80) \quad P_R = \lim_{t \rightarrow \infty} P_R(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s P_R(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - b(s)}{s} c(s) s D(s) \right\}$$

$$= \frac{\bar{B} S_H(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_H(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

$$(4.81) \quad P_{wmi} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{wmi}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s P_{wmi}(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \lambda_i \frac{1 - h_i(s)}{s} s P_m(s) \right\}$$

$$= \frac{1 - a_{H-m}(\lambda)}{\lambda a_{H-m}(\lambda)} \frac{\lambda_i \bar{H}_i S_H(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_H(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

($m=0, 1, \dots, H-1; i=1, 2, \dots, N$)

$$(4.82) \quad P_{rmi} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{rmi}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s P_{rmi}(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \lambda_i h_i(s) \frac{1 - m_i(s)}{s} s P_m(s) \right\}$$

$$= \frac{1 - a_{H-m}(\lambda)}{\lambda a_{H-m}(\lambda)} \left(1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i \bar{M}_i S_H(\lambda) \right)$$

($m=0,1,\dots,H-1; i=1,2,\dots,M$)

Yllä esitetyissä yhtälöissä on merkitty

$$(4.83) \quad S_H(\lambda) = \left\{ \sum_{k=1}^M \frac{1 - a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} \right\}^{-1}$$

Myöskin stationäärisen vaiheen ratkaisussa on tilatodennäköisyyksien summan luonnollisesti oltava 1. Yhtälöistä (4.78) - (4.83) saadaankin helposti

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{H-1} \left\{ P_m + \sum_{i=1}^M [P_{wmi} + P_{rmi}] \right\} + P_w + P_r \\ &= \frac{S_H(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + (\bar{B} + \bar{Z}) S_H(\lambda)} \left\{ \sum_{m=0}^{H-1} \frac{1 - a_{H-m}(\lambda)}{\lambda a_{H-m}(\lambda)} \left[1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \right. \\ & \quad \left. + (\bar{B} + \bar{Z}) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{S_H(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + (\bar{B} + \bar{Z}) S_H(\lambda)} \left\{ \frac{1}{S_H(\lambda)} \left[1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] + \bar{B} + \bar{Z} \right\} = 1.$$

Tuloksia (4.78) - (4.82) tarkasteltaessa huomataan, että stationääriset ratkaisut ovat tosiaan systeemissä esiintyvien korjaus- ja odotusajojen jakautumatyypeistä riippumattomat, ratkaisussa esiintyvät vain näiden jakautumien odotusarvot. Riippuvuus osasysteemin S_1 yksittäisen komponentin häiriöttömän käyntiajan jakautumasta on sekin "välillistä", riippuvuus ilmenee lausekkeiden $a_k(\lambda)$ ($k=1,2,\dots,M$) välityksellä. Määritelmien mukaan on

$$(4.84) \quad a_k(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} k \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} dx \quad (k=1,2,\dots,M)$$

Edellytyksenä stationäärisen vaiheen saavuttamiselle on siis vain odotusarvojen \bar{B} , \bar{Z} , \bar{H}_i ja \bar{M}_i ,

($i=1,2,\dots,M$), sekä integraalilausekkeiden $a_k(\lambda)$, ($k=1,2,\dots,M$) olemassaolo. Kaikille tavallisimmille jakautumille, mm. kappalessa 2.3 esitetyille, nämä aina ovat olemassa.

4.1.4. (A, P_i) -systeemin luotettavuudesta

Kappalessa 2.1 tehdyn sopimuksen mukaisesti valitaan (A, P_i) -systeemin luotettavuutta kuvaavaksi tunnusluvaksi todennäköisyys, että systemi tietyllä hetkellä t on sellaisessa tilassa, että se pystyy suoriutumaan sille asetetuista tehtävistä ja vaatimuksista. Valitun (A, P_i) -systeemin tilajakuton mukaan systeemin toiminnan edellytyksenä on, että se on jossakin tiloista O_0, O_1, \dots, O_{M-1} . Todennäköisyys $P(t)$, että systemi hetkellä t on toimintakykyinen, on siis

$$(4.85) \quad P(t) = \sum_{m=0}^{M-1} P_m(t)$$

Tämän Laplace-muunnos on

$$(4.86) \quad p(s) = \sum_{m=0}^{M-1} P_m(s) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{[1 - a_{H-m}(s+\lambda)] Q(s, M-m-1)}{[s+\lambda] a_{H-m}(s+\lambda) [Q(s, M) - b(s)C(s)]}$$

$$= \frac{1}{s+\lambda - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)} \sum_{k=1}^M \frac{g_k(s) Q(s, k-1)}{[Q(s, M) - b(s)C(s)]}$$

$$= \frac{1}{s+\lambda - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)} \frac{Q(s, M) - 1}{Q(s, M) - b(s)C(s)}$$

Todennäköisyyslauseke $P(t)$ voidaan nyt määrittää, mikäli lausekkeen $p(s)$ käänteismuunnos löydetään. Tämä jää kussakin yksityistapauksessa luonnollisesti riippumaan jakautumien tiheysfunktioiden luonteesta.

Suuremman mielenkiinnon ja merkityksen omaa kuitenkin myös nyt stationäärinen vaihe. Tässä tapauksessa on

$$(4.87) \quad P = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{M-1} P_m(t) = \sum_{m=0}^{M-1} P_m$$

$$= \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1 - O_{M-m}(\lambda)}{\lambda O_{M-m}(\lambda)} \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

$$= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

Vastaavalla tavalla saadaan todennäköisyyksiksi, että systeemi odottaa korjauksen alkua tai on korjattavana, laitteet

$$(4.88) \quad W = P_W + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=1}^N P_{Wmi}$$

$$= \frac{\bar{C} S_M(\lambda) + \sum_{i=1}^M \lambda_i \bar{H}_i}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

$$(4.89) \quad R = P_R + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=1}^N P_{Rmi}$$

$$= \frac{\bar{B} S_M(\lambda) + \sum_{i=1}^M \lambda_i \bar{M}_i}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

4.2. Korjauspolitiikkana täyskorjauspolitiikka P_2

4.2.1. (A, P_2) -systeemin tilat

(A, P_2) -systeemin olennaisena piirteenä systeemin tilamäärittelyjen kannalta on noudatettava täyskorjauspolitiikka P_2 . (A, P_1) -systeemin yhteydessä määritelty tilajoukko ei ole tämän johdosta selkisenään käyttökelpoinen (A, P_2) -systeemin tapauksessa. Korjauspolitiikan P_2 mukaanhan osasysteemin S_2 jolotin komponenttia korjattaessa käytetään tilaisuutta hyväksi ja kunnostetaan myös S_1 :n mahdollisesti vialliset komponentit. Korjauksen suorituksen jälkeen on näin ollen tarpeellista tietää, montako S_1 :n komponenttia oli ennen korjaustyöhön ryhtymistä viallista, systeemin tila työn jälkeen on jola tapauksessa O_0 , ts. systeemin kaikki komponentit ovat toimintakunnossa. Tarkoitukseenmukainen (A, P_2) -systeemin tilajoukko onkin nyt seuraava:

O_m : systeemi on toimintakunnossa, S_1 :n komponenteissa on m kpl vioittuneita ($m = 0, 1, \dots, M-1$)

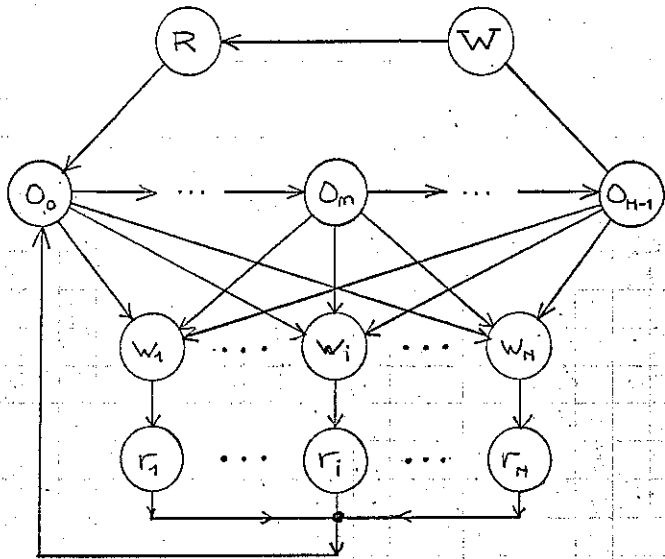
W : systeemi odottaa korjauksen alkua, toimintakyvyttömyyden syynä on S_1 :n kaikkien komponenttien vioittuminen

R : systeemi on korjauksen alaisena, S_1 :n vialliset komponentit (kaikki M kpl) korjataan

W_i : systeemi odottaa korjaustyön alkua, toimintakäytetyksen syynä on S_2 :n komponentin i vioittuminen ($i = 1, 2, \dots, M$)

r_i : systeemi on korjaustyön alaisena, korjausimpulssin on antanut S_2 :n komponentti i ($i = 1, 2, \dots, M$); samalla kunnostetaan S_1 :n mahdollisesti vialliset komponentit ja toteutetaan S_1 :n ennakkohuolto-ohjelma

(A, P_2) -systemin tilat ja näiden väliset siirtymismahdollisuudet on esitetty kuviossa 4.2.



Kuva 4.2. (A, P_2) -systemin tilat

Kun verrataan (A, P_1) - ja (A, P_2) -systemien tiloja keskenään, huomataan, että tilat $O_0, O_1, \dots, O_{M-1}, W$ ja R ovat täsmälleen samat, (A, P_1) -systemin tilat $w_{0i}, w_{1i}, \dots, w_{M-1,i}$ sen sijaan on (A, P_2) -systemin tapauksessa voitu yhdistää yhdeksi tilaksi w_i ($i=1, 2, \dots, M$), samoin on tilat $r_{0i}, r_{1i}, \dots, r_{M-1,i}$ korvattu yhdellä tilalla r_i ($i=1, 2, \dots, M$).

4.2.2. (A, P_2) -systemin tilayhtälöt

4.2.2.1. Merkinnät

Merkintöjen suhteen noudatetaan niin paljon kuin mahdollista (A, P_1) -systemin tarkastelun yhteydessä sovittua käytäntöä. Niinpä häiriöttömän

toiminta-ajan, korjauksen odotusajan ja varsinaisen korjausajan jatkautumiin liittyviä funktioita merkitään täsmälleen samoin kuin kohdassa 4.1.2.1. Yhtälöt (4.6) - (4.13) ovat siten voimassa myös (A, P_2) -systemin yhteydessä. Kertymä- ja tiheysfunktio- sekä tilatodennäköisyyslausekkeiden määritelmät säilyvät ennallaan tai muuttuvat sen mukaisesti, onko vastaavan tilan määrittely säilynyt ennallaan vai ei. Merkinnät $F_m(x, t)$, $P_m(x, t)$ ja $P_m(t)$, $m=0, 1, \dots, M-1$, sekä $F_w(x, t)$, $P_w(x, t)$, $P_w(t)$, $F_r(x, t)$, $P_r(x, t)$ ja $P_r(t)$ otetaan siten käyttöön (A, P_2) -systemin yhteydessä esitetyllä tavalla ja uusina funktioina määritellään:

$F_{wi}(x, t)$: kertymäfunktio, jota ilmoittaa todennäköisyyden sille, että systemi hetkellä t on tilassa w_i ja on ollut tässä tilassa korkeintaan ajan x ($i=1, 2, \dots, M$)

$P_{wi}(x, t)$: edellistä vastaava tiheysfunktio ($i=1, 2, \dots, M$)

$P_{wi}(t)$: todennäköisyys, että systemi hetkellä t on tilassa w_i ($i=1, 2, \dots, M$)

$F_{ri}(x, t)$: kertymäfunktio, jota ilmoittaa todennäköisyyden sille, että systemi hetkellä t on tilassa r_i ja on ollut tässä tilassa korkeintaan ajan x ($i=1, 2, \dots, M$)

$P_{ri}(x, t)$: edellistä vastaava tiheysfunktio ($i=1, 2, \dots, M$)

$P_{ri}(t)$: todennäköisyys, että systemi hetkellä t on tilassa r_i ($i=1, 2, \dots, M$)

Määritelmien mukana yhtälöt (4.1) - (4.3) säilyvät ennallaan, yhtälöt (4.4) ja (4.5) korvautuvat yhtälöillä

$$\left. \begin{aligned} (4.90) \quad P_{wi}(t) &= \int_0^{\infty} P_{wi}(x, t) dx \\ (4.91) \quad P_{ri}(t) &= \int_0^{\infty} P_{ri}(x, t) dx \end{aligned} \right\} (i=1, 2, \dots, M)$$

4.2.2.2. Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Systeemin käyttäytymistä kuvaavien osittais-differentiaaliyhtälöiden johto on täysin vastaavanlainen kuin (A, P_1) -systeemin tapauksessa. Tarkastellaan kohta lähekkäistä ajanhetkeä t ja $t+\Delta$, muodostetaan tilan säilymistä kuvaavat eteenpäin-differenssiyhtälöt ja siirrytään lopuksi rajatarkasteluihin, joissa $\Delta \rightarrow 0$ (vrt. yhtälöiden (4.19)-(4.23) johto kohdassa 4.1.2.2). Tuloksena saadaan yhtälöt:

$$(4.92) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + (M-m)\alpha(x) + \lambda \right] P_m(x, t) = 0 \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

$$(4.93) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \gamma(x) \right] P_W(x, t) = 0$$

$$(4.94) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \beta(x) \right] P_R(x, t) = 0$$

$$(4.95) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \eta_i(x) \right] P_{wi}(x, t) = 0$$

$$(4.96) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \mu_i(x) \right] P_{ri}(x, t) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

Yhtälöissä (4.92) - (4.96) esiintyvät funktiot on määritelty alueella Γ . Ratkaisuja etsittäessä on otettava huomioon alueen Γ reunoilla Γ_x ja Γ_t vallitsevat reunaehdot.

4.2.2.3. Reunaehdot

(A, P_2) -systeemin siirtymistä tilasta toiseen kuvaavat reunaehdot, reunan Γ_t ehdot, saavat muodon (vrt. alaviite (A, P_1) -systeemin tapauksessa s. 39):

$$(4.97) \quad P_0(0, t) = \int_0^\infty P_R(x, t) \beta(x) dx + \sum_{i=1}^M \int_0^\infty P_{ri}(x, t) \mu_i(x) dx$$

$$(4.98) \quad P_m(0, t) = \int_0^\infty P_{m-1}(x, t) [M-m+1] \alpha(x) dx \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(4.99) \quad P_W(0, t) = \int_0^\infty P_{M-1}(x, t) \alpha(x) dx$$

$$(4.100) \quad P_R(0, t) = \int_0^\infty P_W(x, t) \gamma(x) dx$$

$$(4.101) \quad P_{wi}(0, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_i P_m(t) \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

$$(4.102) \quad P_{ri}(0, t) = \int_0^\infty P_{wi}(x, t) \eta_i(x) dx \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

Systeemin alkutilan määrittelevät ehdot, reunan Γ_x alkuehdot, ovat (A, P_2) -systeemin tapauksessa, kun alkutilaksi valitaan 0_0 :

$$(4.103) \quad P_0(x, 0) = \delta(x)$$

$$(4.104) \quad P_m(x, 0) = 0 \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(4.105) \quad P_W(x, 0) = P_R(x, 0) = 0$$

$$(4.106) \quad P_{wi}(x, 0) = P_{ri}(x, 0) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

(A, P_2) -systeemin tilayhtälöt on näin muodostettu. Seuraavana tehtävänä on ratkaista yhtälöt (4.92) - (4.96) reunaehdot (4.97) - (4.106) huomioonottaen.

4.2.3. Tilayhtälöiden ratkaisut

4.2.3.1. Tilayhtälöiden Laplace-muunnokset

Yhtälöiden (4.92) - (4.96) Laplace-muunnokset ovat nyt

$$(4.107) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + M\alpha(x) + \lambda \right] p_0(x, s) = \delta(x)$$

$$(4.108) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + (M-m)\alpha(x) + \lambda \right] p_m(x, s) = 0 \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(4.109) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \gamma(x) \right] p_W(x, s) = 0$$

$$(4.110) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \beta(x) \right] p_R(x, s) = 0$$

$$(4.111) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \eta_i(x) \right] p_{wi}(x, s) = 0$$

$$(4.112) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \mu_i(x) \right] p_{ri}(x, s) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

Reunaehtoyhtälöiden (4.97) - (4.102) Laplace-muunnokset ovat

$$(4.113) \quad p_0(0, s) = \int_0^{\infty} p_r(x, s) \beta(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} p_{ri}(x, s) \mu_i(x) dx$$

$$(4.114) \quad p_m(0, s) = \int_0^{\infty} p_{m-1}(x, s) [M-m+1] \alpha(x) dx \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(4.115) \quad p_w(0, s) = \int_0^{\infty} p_{H-1}(x, s) \alpha(x) dx$$

$$(4.116) \quad p_r(0, s) = \int_0^{\infty} p_w(x, s) \gamma(x) dx$$

$$(4.117) \quad p_{wi}(0, s) = \sum_{m=0}^{M-1} \lambda_i p_m(s)$$

$$(4.118) \quad p_{ri}(0, s) = \int_0^{\infty} p_{wi}(0, s) \eta_i(x) dx \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

4.2.3.2. Muunnosyhtälöiden ratkaisut

Jakson 4.1.3.2 aputuloksia (lemmat 4.1 ja 4.2) soveltaen ja samantaista käsittelyjärjestystä noudottaen saadaan ratkaisuksi oluksi (A, P_i) -systeemin yhtälöt (4.57) - (4.62) vastaten:

$$(4.119) \quad p_0(0, s) = \frac{s+\lambda}{1-a_M(s+\lambda)} p_0(s) - 1$$

$$(4.120) \quad p_m(0, s) = \frac{s+\lambda}{1-a_{H-m}(s+\lambda)} p_m(s) \quad (m=1, 2, \dots, H-1)$$

$$(4.121) \quad p_w(s) = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda) [1-c(s)]}{s [1-a(s+\lambda)]} p_{H-1}(s)$$

$$(4.122) \quad p_r(s) = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda) [1-b(s)] c(s)}{s [1-a(s+\lambda)]} p_{H-1}(s)$$

$$(4.123) \quad p_{wi}(s) = \lambda_i \frac{1-h_i(s)}{s} \sum_{m=0}^{H-1} p_m(s)$$

$$(4.124) \quad p_{ri}(s) = \lambda_i h_i(s) \frac{1-m_i(s)}{s} \sum_{m=0}^{H-1} p_m(s) \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

Tiladennäköisyyksien Laplace-muunnokset on jälleen kaikki esitetty lausekkeiden $p_m(s)$ ($m=0, 1, \dots, H-1$) avulla, jotta lausekkeet ovat toistaiseksi vielä tuntemattomat. Näiden tuntemattomien lausekkeiden määrittäminen sujuu samoin kuin (A, P_i) -systeemin yhteydessä esitettiin, lähtökohtana olevina yhtälöinä ovat nyt yhtälöt (4.113) ja (4.114). Suorittamalla yhtälöön (4.114) tarpeelliset sijoitukset saadaan

$$\frac{s+\lambda}{1-a_{H-m}(s+\lambda)} p_m(s) = \int_0^{\infty} \frac{[s+\lambda] p_{m-1}(s)}{1-a_{H-m+1}(s+\lambda)} e^{-(s+\lambda)x} [M-m+1] \alpha(x) e^{-\int_0^x [M-m+1] \alpha(u) du} dx \quad (m=1, 2, \dots, H-1)$$

eli sievennettyinä

$$(4.125) \quad p_m(s) = \frac{1-a_{H-m}(s+\lambda)}{1-a_{H-m+1}(s+\lambda)} a_{H-m+1}(s+\lambda) p_{m-1}(s) \quad (m=1, 2, \dots, H-1)$$

Yhtälön (4.125) yleinen ratkaisu on muotoa⁽¹⁾

$$(4.126) \quad p_m(s) = \frac{D(s) [1-a_{H-m}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_{H-m}(s+\lambda)} Q(s, H-m-1), \quad (m=0, 1, \dots, H-1)$$

missä $Q(s, m)$ on tulolauseke

$$(4.127) \quad \begin{cases} Q(s, m) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{a_k(s+\lambda)} \\ Q(s, 0) = 1 \end{cases} \quad (m=1, 2, \dots, H-1)$$

ja $D(s)$ mistä riippumaton s :n funktio. Yhtälön (4.126) mukaisen $p_m(s)$:n lausekkeen kelpaavuus differenssiyhtälön (4.125) ratkaisuksi todetaan suoralla laskulla:

1. vrt. sivulla 46 ja sen alaviitteessä suoritettua tarkastelua

$$\begin{aligned}
& \frac{1-a_{H-m}(s+\lambda)}{1-a_{H-m+1}(s+\lambda)} a_{H-m+1}(s+\lambda) p_{m-1}(s) \\
&= \frac{1-a_{H-m}(s+\lambda)}{1-a_{H-m+1}(s+\lambda)} a_{H-m+1}(s+\lambda) \frac{D(s) [1-a_{H-m+1}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_{H-m+1}(s+\lambda)} Q(s, M-m) \\
&= \frac{D(s) [1-a_{H-m}(s+\lambda)]}{s+\lambda} Q(s, M-m) \\
&= \frac{D(s) [1-a_{H-m}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_{H-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1) = P_m(s).
\end{aligned}$$

Tulomuotoisen ratkaisun (4.126) yleisyys on perusteltavissa samoin kuin yhtälön (4.64) tapauksessa (sivun 46 alaviittaus). Kerroin $D(s)$ määritetään yhtälön (4.113) perusteella. Sijoitusten ja sievennysten jälkeen on ensin

$$\begin{aligned}
\frac{s+\lambda}{1-a_H(s+\lambda)} p_0(s) &= \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda) b(s) c(s)}{1-a(s+\lambda)} p_{H-1}(s) \\
&+ \left[\sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] \left[\sum_{m=0}^{M-1} P_m(s) \right] + 1,
\end{aligned}$$

josta yhtälön (4.126) perusteella saadaan edelleen

$$\begin{aligned}
& \frac{s+\lambda}{1-a_H(s+\lambda)} \frac{D(s) [1-a_H(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_H(s+\lambda)} Q(s, M-1) \\
&= \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda) b(s) c(s)}{1-a(s+\lambda)} \frac{D(s) [1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} Q(s, 0) \\
&+ \left[\sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] \left[\frac{D(s)}{s+\lambda} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1-a_{H-m}(s+\lambda)}{a_{H-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1) \right] + 1
\end{aligned}$$

ja sieventämällä

$$D(s) \left\{ Q(s, M) - b(s) c(s) - \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s+\lambda} [Q(s, M) - 1] \right\} = 1.$$

Lausekkeella $D(s)$ on näin muoto

$$(4.128) \quad D(s) = \frac{1}{Q(s, M) - b(s) c(s) - \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s+\lambda} [Q(s, M) - 1]}$$

Yllä on käytetty hyväksi lemmän 4.10 tulosta:

Lemma 4.10.

$$\sum_{m=0}^{M-1} \frac{1-a_{H-m}(s+\lambda)}{a_{H-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1) = Q(s, M) - 1$$

Todistus. $Q(s, M)$:in määritelmän perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
Q(s, M) &= \frac{Q(s, M-1)}{a_H(s+\lambda)} \\
&= \frac{1-a_H(s+\lambda)}{a_H(s+\lambda)} Q(s, M-1) + Q(s, M-1) \\
&= \frac{1-a_H(s+\lambda)}{a_H(s+\lambda)} Q(s, M-1) + \frac{1-a_{H-1}(s+\lambda)}{a_{H-1}(s+\lambda)} Q(s, M-2) + Q(s, M-2) \\
&= \dots \\
&= \frac{1-a_H(s+\lambda)}{a_H(s+\lambda)} Q(s, M-1) + \frac{1-a_{H-1}(s+\lambda)}{a_{H-1}(s+\lambda)} + \dots \\
&\quad + \frac{1-a(s+\lambda)}{a(s+\lambda)} Q(s, 0) + Q(s, 0) \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1-a_{H-m}(s+\lambda)}{a_{H-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1) + 1.
\end{aligned}$$

Yllä olevan yhtälökettujen viimeinen yhtälö on lemmän väite toiseen muotoon kirjoitettuna, joten lemma on osoitettu oikeaksi.

Tilatodennäköisyyksien Laplace-muunnoksille soodan tämän jälkeen lausekkeet

$$(4.129) \quad P_m(s) = \frac{D(s)[1-a_{H-m}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_{H-m}(s+\lambda)} Q(s, H-m-1) \\ = \frac{D(s)[1-a_{H-m}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] \prod_{k=1}^{H-m} a_k(s+\lambda)} \quad (m=0, 1, \dots, H-1)$$

$$(4.130) \quad P_W(s) = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)[1-c(s)]}{s[1-a(s+\lambda)]} \frac{D(s)[1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} \\ = D(s) \frac{1-c(s)}{s}$$

$$(4.131) \quad P_R(s) = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)[1-b(s)]c(s)}{s[1-a(s+\lambda)]} \frac{D(s)[1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} \\ = D(s) \frac{[1-b(s)]c(s)}{s}$$

$$(4.132) \quad P_{W_i}(s) = \lambda_i \frac{1-h_i(s)}{s} \frac{D(s)}{s+\lambda} \sum_{m=0}^{H-1} \frac{1-a_{H-m}(s+\lambda)}{a_{H-m}(s+\lambda)} Q(s, H-m-1) \\ = D(s) \frac{\lambda_i [1-h_i(s)] [Q(s, H)-1]}{s[s+\lambda]} \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

$$(4.133) \quad P_{R_i}(s) = \lambda_i h_i(s) \frac{1-m_i(s)}{s} \frac{D(s)}{s+\lambda} \sum_{m=0}^{H-1} \frac{1-a_{H-m}(s+\lambda)}{a_{H-m}(s+\lambda)} Q(s, H-m-1) \\ = D(s) \frac{\lambda_i h_i(s) [1-m_i(s)] [Q(s, H)-1]}{s[s+\lambda]} \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

4.2.3.3. Tilayhtälöiden ratkaisut muunnosyhtälöiden ratkaisujen käänteismuunnoksina

Tarkasteltavassa (A, P_2) -systeemin tapauksessa valittiin systeemin tilajoukko (A, P_1) -systeemin tiloista poikkeavalla, tätä yksintertaisemmalla tavalla. Josson oltsi osoitetaan tilajoukko hyvin määritellyksi, ts. osoitetaan, että kaikilla t :n arvoilla on voimassa identiteetti

$$(4.134) \quad \sum_{m=0}^{H-1} P_m(t) + P_W(t) + P_R(t) + \sum_{i=1}^N [P_{W_i}(t) + P_{R_i}(t)] = 1.$$

Tämän kanssa yhtäpitävä on yhtälö

$$(4.135) \quad \sum_{m=0}^{H-1} P_m(s) + P_W(s) + P_R(s) + \sum_{i=1}^N [P_{W_i}(s) + P_{R_i}(s)] = \frac{1}{s},$$

joka seuraavassa osoitetaan voimassa olevaksi. Yhtälöiden (4.129) - (4.133) mukaan on

$$\sum_{m=0}^{H-1} P_m(s) + P_W(s) + P_R(s) + \sum_{i=1}^N [P_{W_i}(s) + P_{R_i}(s)] \\ = D(s) \left\{ \frac{1}{s+\lambda} \sum_{m=0}^{H-1} \frac{1-a_{H-m}(s+\lambda)}{a_{H-m}(s+\lambda)} Q(s, H-m-1) + \frac{1-c(s)}{s} + \frac{[1-b(s)]c(s)}{s} \right. \\ \left. + \frac{Q(s, H)-1}{s+\lambda} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i [1-h_i(s)] + \lambda_i h_i(s) [1-m_i(s)]}{s} \right\} \\ = \frac{D(s)}{s} \left\{ \frac{s[Q(s, H)-1]}{s+\lambda} + 1-b(s)c(s) + \frac{Q(s, H)-1}{s+\lambda} \sum_{i=1}^N \lambda_i [1-h_i(s)m_i(s)] \right\} \\ = \frac{D(s)}{s} \left\{ \frac{[s+\lambda][Q(s, H)-1]}{s+\lambda} + 1-b(s)c(s) - \frac{Q(s, H)-1}{s+\lambda} \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s)m_i(s) \right\} \\ = \frac{D(s)}{s} \left\{ Q(s, H) - b(s)c(s) - \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s)m_i(s)}{s+\lambda} [Q(s, H)-1] \right\} \\ = \frac{D(s)}{s} \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{s},$$

joten (4.135) ja samalla (4.134) on osoitettu oikeaksi.

Tilatodennäköisyyksien lausekkeet saadaan nyt lausekkeiden (4.129) - (4.133) käänteismuunnoksina, eli on

$$(4.136) \quad P_m(t) = \mathcal{L}^{-1}\{p_m(s)\} \quad (m=0,1,\dots,M-1)$$

$$(4.137) \quad P_W(t) = \mathcal{L}^{-1}\{p_W(s)\}$$

$$(4.138) \quad P_R(t) = \mathcal{L}^{-1}\{p_R(s)\}$$

$$(4.139) \quad P_{wi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{p_{wi}(s)\}$$

$$(4.140) \quad P_{ri}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{p_{ri}(s)\} \quad (i=1,2,\dots,M)$$

Kysymys kääntämuunnosten löytymisestä jää yleisessä muodossa avoimeksi, sen ratkaisee kussakin yksittäistapauksessa syvempi tiheysfunktioiden tunne. Yksittäistapauksen käsittelyyn ei nytään mennä, vaan siirrytään tarkastelemaan systeemin saavuttamaa stationääristä vaihetta, jollain tilatodennäköisyydet voidaan määrittää myös yleisessä tapauksessa, jakautumatyyppejä yksityiskohtaisesti tuntematta.

4.2.34. Stationäärinen vaiheen ratkaisut

Stationäärinen vaihe saavutetaan samoilla verraten lievillä ehdoilla kuin (A, P_0) -systeeminkin tapauksessa: systeemissä esiintyvien jakautumien odotusarvojen ja lausekkeiden $a_k(\lambda)$ ($k=1,2,\dots,M$) olemassaolo. Samoin ratkaisut voidaan osoittaa jakautumatyypeistä riippumattomiksi, niissä esiintyvät vain jakautumien tietyt tunnusluvut: odotus- ja korjausaitojen odotusarvot sekä lausekkeet $a_k(\lambda)$.

Aluksi esitetään eräs aputuloks.

Lemma 4.11. Kun merkitään

$$(4.141) \quad S_M(\lambda) = \frac{\lambda}{Q(0,M)-1}$$

on voimassa

$$\lim_{s \rightarrow 0} sD(s) = \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

Todistus. $\lim_{s \rightarrow 0} sD(s)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{Q(s,M) - b(s)c(s)}{s} - \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s[s+\lambda]} [Q(s,M) - 1] \right\}^{-1} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ [Q(s,M) - 1] \left[\frac{s + \lambda - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s[s+\lambda]} \right] + \frac{1 - b(s)c(s)}{s} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ [Q(0,M) - 1] \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s + \sum_{i=1}^M \lambda_i [1 - h_i(s)] + \sum_{i=1}^M \lambda_i [1 - m_i(s)] - \sum_{i=1}^M \lambda_i [1 - h_i(s)] [1 - m_i(s)]}{s[s+\lambda]} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - b(s)}{s} + \frac{1 - c(s)}{s} - \frac{[1 - b(s)][1 - c(s)]}{s} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ [Q(0,M) - 1] \frac{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i)}{\lambda} + \bar{B} + \bar{C} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \frac{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i)}{S_M(\lambda)} + \bar{B} + \bar{C} \right\}^{-1} \\ &= \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \end{aligned}$$

Yllä esitetyn todistusketjun eri vaiheet perustuvat pääasiassa lemmojen 4.4 - 4.6 tuloksiin.

Tilatodennäköisyyksien raja-arvoksi, kun t kasvaa rajatta, ts. stationäärinen vaiheen ratkaisuksi saadaan loppuarvoteoreeman nojalla tämän jälkeen

$$(4.142) \quad P_m = \lim_{t \rightarrow \infty} P_m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sP_m(s) \\ = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ sD(s) \frac{1 - a_{M-m}(s+\lambda)}{[s+\lambda] \prod_{k=1}^{M-m} a_k(s+\lambda)} \right\}$$

$$= \frac{S_H(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_H(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})} \frac{1 - a_{H-m}(\lambda)}{\lambda \prod_{k=1}^{H-m} a_k(\lambda)} \quad (i=0,1,\dots,H)$$

$$(4.143) \quad P_W = \lim_{t \rightarrow \infty} P_W(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s P_W(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s D(s) \frac{1 - c(s)}{s} \right\}$$

$$= \frac{\bar{C} S_H(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_H(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

$$(4.144) \quad P_R = \lim_{t \rightarrow \infty} P_R(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s P_R(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s D(s) \frac{1 - b(s)}{s} c(s) \right\}$$

$$= \frac{\bar{B} S_H(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_H(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

$$(4.145) \quad P_{wi} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{wi}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s P_{wi}(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s D(s) \lambda_i \frac{1 - h_i(s)}{s} \frac{Q(s, M) - 1}{s + \lambda} \right\}$$

$$= \frac{\lambda_i \bar{H}_i c_i}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_H(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})} \quad (i=1,2,\dots,N)$$

$$(4.146) \quad P_{ri} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ri}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s P_{ri}(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s D(s) \lambda_i h_i(s) \frac{1 - m_i(s)}{s} \frac{Q(s, M) - 1}{s + \lambda} \right\}$$

$$= \frac{\lambda_i \bar{M}_i}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_H(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})} \quad (i=1,2,\dots,N)$$

Tilastodennököisyyksien summan huomataan myös stationäärisessä tapauksessa olevan = 1. Tämän seikan toteaminen vaatii vain yhtälöissä (4.142) - (4.146) esiintyvien todennököisyyksien yhteenlaskun. Lastuissa oletaan erityisesti huomioon lemma 4.10 sekä merkinnät (4.127) ja (4.141):

$$\frac{1}{S_H(\lambda)} = \frac{Q(0, H) - 1}{\lambda} = \sum_{m=0}^{H-1} \frac{1 - a_{H-m}(\lambda)}{\lambda a_{H-m}(\lambda)} Q(0, H-m-1) = \sum_{m=0}^{H-1} \frac{1 - a_{H-m}(\lambda)}{\lambda \prod_{k=1}^{H-m} a_k(\lambda)}$$

Stationäärisen vaiheen ratkaisuja lähemmin tarkasteltaessa huomataan, että tämän vaiheen saavuttamisen edellytyksistä se ratkaisujen luonteesta ja ominaisuuksista on voimassa, kaikki se, mitä (A, P_1) -systemin tapauksessa jaksossa 4.1.3.4 on esitetty.

4.2.4. (A, P_2) -systemin luotettavuudesta

Systemin luotettavuutta mittaavaksi suureeksi valittu todennököisyys (vrt. loppuosa 2.1) saadaan nytkin summana.

$$(4.147) \quad P(t) = \sum_{m=0}^{H-1} P_m(t)$$

Tämän Laplace-muunnos on

$$(4.148) \quad p(s) = \sum_{m=0}^{H-1} p_m(s) = \frac{D(s)}{s + \lambda} \sum_{m=0}^{H-1} \frac{1 - a_{H-m}(s + \lambda)}{a_{H-m}(s + \lambda)} Q(s, H-m-1)$$

$$= \frac{D(s)}{s + \lambda} [Q(s, M) - 1]$$

$$= \frac{Q(s, M) - 1}{[Q(s, M) - b(s)c(s)][s + \lambda] - [Q(s, M) - 1] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}$$

Todennököisyyden (4.147) löytyminen jää tässäkin riippumaan $p(s)$:n lausekkeen käänteismuunnoksen löytymisestä. Tämä on kysymys, jota voidaan ratkaista

vasta kussakin yksittäistapauksessa erikseen sen perusteella, mitkä luonteisia esiintyvät tiheysfunktiot ovat. Mutta stationäärisessä vaiheessa tämä todennäköisyys löydetään yleisessä tapauksessa:

$$\begin{aligned}
 (4.149) \quad P &= \sum_{m=0}^{M-1} P_m \\
 &= \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1 - a_{M-m}(\lambda)}{\lambda a_{M-m}(\lambda)} Q(0, M-m) \\
 &= \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})} \frac{Q(0, M) - 1}{\lambda} \\
 &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}
 \end{aligned}$$

Systemin odotus- ja korjaustiloissa oloa kuvaavat stationäärisessä vaiheessa todennäköisyyslausekkeet

$$(4.150) \quad W = P_W + \sum_{i=1}^M P_{W_i} = \frac{\bar{C} S_M(\lambda) + \sum_{i=1}^M \lambda_i \bar{H}_i}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

$$(4.151) \quad R = P_R + \sum_{i=1}^M P_{R_i} = \frac{\bar{B} S_M(\lambda) + \sum_{i=1}^M \lambda_i \bar{M}_i}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

Voikka (A, P_1) - ja (A, P_2) -systemit määrittelevissä ominaisuuksissa ja sitä kautta niiden käyttäytymisissä on erittäin ratkaisevia peruseroja, voidaan varsinkin toisiaan vastaavista yhtälöistä (4.87) - (4.89) ja (4.149) - (4.151) todeta myös pitkälle ulottuvaa yhdenmukaisuutta. Määrittelemällä lausekkeet $Q(s, m)$ ja $S_M(\lambda)$ kummassakin tapauksessa tarpeitukseen sopivalla tavalla on todennäköisyydet P , W ja R voitu esittää täsmälleen samassa muodossa. Eri systeemeihin kohdistuvat vertailut tulevat näin huomattavan selkeiksi: ratkaiseräksi tekijäksi muodostuu lauseke $S_M(\lambda)$. Näihin kysymyksiin palataan kuitenkin tarkemmin myöhemmin, sen jälkeen kun myös passiivisen rinnankytkennän systemit on käsitelty.

5. SYSTEMIN KÄYTTÄYTYMINEN, KUN OSASYSTEMI S_1 ON PASSIIVISESTI RINNANKYTKETTY

Luvussa 5 tarkastellaan kuvan 3.1 esittämää systemiä siten tarkemmin spesifioituna, että osasystemi S_1 on passiivisesti rinnankytketty. Noudatettava korjauspolitiikka tuo mukanaan vielä kaksi eri tapausta; kappaleen 5.1 tarkasteluissa on korjauspolitiikkana minimikorjauspolitiikka ja kappaleessa 5.2 täyskorjauspolitiikka. Näin täsmennettyä systemiä kutsutaan jäljempänä (P, P_1) -systemiksi (minimikorjauspolitiikka) tai (P, P_2) -systemiksi (täyskorjauspolitiikka).

Luvussa 4 suoritetuille tarkasteluille oli ominaista merkintöjen, ratkaisujen johtojen ja lauseiden todistusten varsin yksityiskohtainen selostaminen. Kun nyt luvussa 5 käytetään valtaosaltaan samoja symboleja ja tarkastelun eteneminen on perusratkaisuillaan samantainen kuin edellä, tyydytään tarkasteluissa vain päävaiheitten esittelyyn. Näin välttytään tekstin paisumiselta kohtuuttoman laajaksi esityksen seurattavuuden kuitenkin sanottavasti lärsimättä. Olennaiset erot ja poikkeamat lukuun 4 verrattuna tuodaan luonnollisesti selvästi esiin.

5.1. Korjauspolitiikkana minimikorjauspolitiikka P_1

5.1.1. (P, P_1) -systemin tilat

Osasystemin S_1 täsmennetty rakenne määrittelee ne puitteet, joissa systemin tilajoukko on tarpeitukseenmukaista konstruoida. (P, P_1) -systemin tilat valitaankin näin samoin kuin (A, P_1) -systemin tilat jaksossa 4.1.1. Tilajoukkoa ja systemin mahdollisuuksia siirtyä tilasta toiseen esittää siis täsmälleen tapauksessa kuva 4.1. Siirtymätodennäköisyydet tilojen välillä sen sijaan ovat toiset kuin (A, P_1) -sys-

teemissä. Tämä tulee näkyviin tilayhtälöiden erilaaisuutena.

5.1.2. (P, P_1) -systemin tilayhtälöt

Noudattamalla jaksossa 4.1.2.1 sovittuja merkintöjä, konstruoimalla systemin tilojen säilymistä kuvaavat eteenpäin-differenssiyhtälöt ja siirtymällä näissä raja-arvotarkasteluihin saadaan ehdollisten tiheysfunktioiden määrittämiseksi seuraavat, alueessa T määritellyt osittaisdifferentiaaliyhtälöt:

$$(5.1) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \alpha(x) + \lambda \right] P_m(x, t) = 0 \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

$$(5.2) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \gamma(x) \right] P_w(x, t) = 0$$

$$(5.3) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \beta(x) \right] P_R(x, t) = 0$$

$$(5.4) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \eta_i(x) \right] P_{wmi}(x, t) = 0$$

$$(5.5) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \mu_i(x) \right] P_{rmi}(x, t) = 0$$

$(m=0, 1, \dots, M-1; i=1, 2, \dots, N)$

Verrattaessa (A, P_1) - ja (P, P_1) -systemien vastaavia yhtälöitä (4.19) - (4.23) ja (5.1) - (5.5) toisiinsa huomataan eroa ainoastaan ensimmäisten yhtälöiden välillä. Eron alkuperä on selvä: tilassa O_m ($m=0, 1, \dots, M-1$) toimivan (A, P_1) -systemin kunnossa olevista $(M-m)$:stä S_1 -komponentista voi mitä tahansa rikkoontua ja aiheuttaa systemin tilan muutoksen; (P, P_1) -systemissä on tilassa O_m käytössä vain yksi S_1 -komponentti, muut ovat reservissä eivät näin ole olttiina vioittumiselle.

Systemin siirtymistä tilasta toiseen kuvaavat reunan T_+ reunaehdot:

$$(5.6) \quad P_0(0, t) = \int_0^\infty P_R(x, t) \beta(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^\infty P_{roi}(x, t) \mu_i(x) dx$$

$$(5.7) \quad P_m(0, t) = \int_0^\infty P_{m-1}(x, t) \alpha(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^\infty P_{rmi}(x, t) \mu_i(x) dx$$

$(m=1, 2, \dots, M-1)$

$$(5.8) \quad P_w(0, t) = \int_0^\infty P_{w-1}(x, t) \alpha(x) dx$$

$$(5.9) \quad P_R(0, t) = \int_0^\infty P_w(x, t) \gamma(x) dx$$

$$(5.10) \quad P_{wmi}(0, t) = \lambda_i P_m(t)$$

$$(5.11) \quad P_{rmi}(0, t) = \int_0^\infty P_{wmi}(x, t) \eta_i(x) dx$$

$(m=0, 1, \dots, M-1; i=1, 2, \dots, N)$

Systemin alkutilan määrittelevät reunan T_x reunaehdot. Nämä ovat, kun alkutilana on O_0 , muotoa:

$$(5.12) \quad P_0(x, 0) = \delta(x)$$

$$(5.13) \quad P_m(x, 0) = 0 \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(5.14) \quad P_w(x, 0) = P_R(x, 0) = 0$$

$$(5.15) \quad P_{wmi}(x, 0) = P_{rmi}(x, 0) = 0 \quad (m=0, 1, \dots, M-1; i=1, 2, \dots, N)$$

(A, P_1) - ja (P, P_1) -systemien huomataan reunaehdoiltaanakin poikkeavan toisistaan vain yhtälöparien (4.28) ja (5.7) osalta. Ero on samanlainen ja samasta syystä johtuva kuin yhtälöparien (4.19) ja (5.1) kohdalla esitettiin.

5.1.3. Tilayhtälöiden ratkaisut

Tilayhtälöiden ratkaisujen etsiminen noudattaa aluksi jaksossa 4.1.3 esitettyjä vaihteita. Tilayhtälöistä siirrytään niitä vastaaviin Laplace-muunnos-yhtälöihin ja muunnosyhtälöistä ratkaistaan lausekkeet $P_w(s)$, $P_R(s)$, $P_{wmi}(s)$ ja $P_{rmi}(s)$, ($m=0, 1, \dots, M-1; i=1, 2, \dots, N$) muotoon, jossa ne on lausuttu lausekkeiden $P_m(s)$ ($m=0, 1, \dots, M-1$) avulla. Tuloksiksi saadaan tarkalleen muotoa (4.59) - (4.62) olevat yhtälöt.

Funktioiden $P_m(s)$ määrittämiseksi saadaan yhtälö

(joka vastaa (A, P_1) -systeemin tapauksessa yhtälöä (4.63)):

$$(5.16) \begin{cases} \left[\frac{s+\lambda}{1-a(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] P_m(s) \\ = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)}{1-a(s+\lambda)} P_{m-1}(s) \end{cases} \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

Yhtälöiden (4.63) ja (5.16) ulkonaisesta samanmuotoisuudesta huolimatta niillä on kuitenkin eräs varsin ratkaisera ero. Yhtälö (5.16) on liinteällä s :n arvoilla muuttujan m suhteen vakiokertominen, joten sen ratkaisu muodostuu yksintertaisemmaksi ja selväpiirteisemmäksi kuin vastaavan muuttuvakertoimisen yhtälön (4.63). Kertoimet yhtälössä (5.16) ovat kuitenkin vielä s :n funktioita, joten ratkaisu ei silti ole aivan triviaali. Tietyn analogian säilyttämiseksi (A, P_1) -systeemin tarkasteluihin verrattuna kirjoitetaan (5.16):n ratkaisu muotoon:

$$(5.17) \quad P_m(s) = \frac{D(s) [1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} Q(s, m+1), \quad (m=0, 1, \dots, M)$$

missä

$$(5.18) \quad Q(s, m) = \left\{ \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)}{s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)} \right\}^m \quad (m=1, 2, \dots, M)$$

Yhtälön (5.17) mukainen lauseke on todellakin ratkaisu, sillä sijoittamalla se (5.16) een saadaan:

$$\left\{ \left[\frac{s+\lambda}{1-a(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)}{s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)} \right\}$$

1. Ratkaisun yleinen muoto on: $P_m(s) = C(s) q(s)^m$, vrt. Spiegel II, luku 5. "Ratkaisu ehdotus" (5.17) on selvästikin tätä muotoa

$$\begin{aligned} & - \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)}{1-a(s+\lambda)} \left\{ \frac{D(s) [1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} Q(s, m) \right. \\ & = \frac{[s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)] [s+\lambda] a(s+\lambda)}{[s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)] a(s+\lambda)} \\ & \left. - \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)}{1-a(s+\lambda)} \right\} \frac{D(s) [1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} = 0. \end{aligned}$$

Toistaiseksi tuntemattoman lausekkeen $D(s)$ määrittäminen tapahtuu yhtälön (5.19) perusteella (yhtälö (5.19) on yhtälön (5.6) johdannainen, vrt. yhtälön (4.66) johto (A, P_1) -systeemin tapauksessa). Erisin on

$$\left[\frac{s+\lambda}{1-a(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] P_0(s) - \frac{a(s+\lambda) b(s) c(s) [s+\lambda]}{1-a(s+\lambda)} P_{M+1}(s) =$$

josta saadaan (5.17):n ja (5.18):n perusteella

$$\begin{aligned} & \left[\frac{s+\lambda}{1-a(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] \frac{D(s) [1-a(s+\lambda)]}{s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)} \\ & - \frac{a(s+\lambda) b(s) c(s) [s+\lambda]}{1-a(s+\lambda)} \frac{D(s) [1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} Q(s, M) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{eli } D(s) \{ 1 - b(s) c(s) Q(s, M) \} = 1$$

ja viimein

$$(5.19) \quad D(s) = \frac{1}{1 - b(s) c(s) Q(s, M)}$$

Tilatodennäköisyyksien Laplace-muunnosten lausekkeet voidaan esittää tämän jälkeen yhteen koottuna:

$$(5.20) \quad P_m(s) = \frac{1-a(s+\lambda)}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} \frac{Q(s, m+1)}{1-b(s) c(s) Q(s, M)} \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

(5.21)
$$P_W(s) = \frac{[1-c(s)] Q(s, M)}{s [1-b(s)c(s) Q(s, M)]}$$

(5.22)
$$P_R(s) = \frac{[1-b(s)] c(s) Q(s, M)}{s [1-b(s)c(s) Q(s, M)]}$$

(5.23)
$$P_{umi}(s) = \frac{\lambda_i [1-h_i(s)] [1-a(s+\lambda)]}{s [s+\lambda] a(s+\lambda)} \frac{Q(s, m+1)}{1-b(s)c(s) Q(s, M)}$$

(5.24)
$$P_{mi}(s) = \frac{\lambda_i h_i(s) [1-m_i(s)] [1-a(s+\lambda)]}{s [s+\lambda] a(s+\lambda)} \frac{Q(s, m+1)}{1-b(s)c(s) Q(s, M)}$$

($m=0, 1, \dots, M+1$; $i=1, 2, \dots, N$)

Tilastodennökäisyydet saadaan tämän jälkeen yllä esitettyjen lausekkeiden käänteismuunnoksina yhtälöiden (4.72) - (4.76) tapaan. Tätä varten on kuitenkin tiheysfunktioiden ja niiden Laplace-muunnosten lausekkeet tunnettava. Sen sijaan stationäärisen vaiheen ratkaisut ovat jälleen yleisessäkin muodossa, tiheysfunktioiden tyyppiä tarkemmin tuntematta, johdettavissa. Ratkaisujen etsimiseksi esitetään olkisi kolme oputulosta.

Lemma 5.1. $\lim_{s \rightarrow 0} Q(s, m) = 1, (m=1, 2, \dots, M).$

Todistus.
$$\lim_{s \rightarrow 0} Q(s, m) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)}{s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)} \right\}^m$$

$$= \left\{ \frac{\lambda a(\lambda)}{\lambda - [1-a(\lambda)] \sum_{i=1}^M \lambda_i} \right\}^m = \left\{ \frac{\lambda a(\lambda)}{\lambda - [1-a(\lambda)] \lambda} \right\}^m = 1.$$

Lemma 5.2. $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1-Q(s, 1)}{s} = \frac{1-a(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right\}.$

Todistus.
$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1-Q(s, 1)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)}{s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)} \right\}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s) - [s+\lambda] a(s+\lambda)}{s \{s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)\}} \right\}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ [1-a(s+\lambda)] \frac{s+\lambda - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s \{s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)\}} \right\}$$

$$= \frac{1-a(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ 1 + \frac{\lambda - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s} \right\}$$

$$= \frac{1-a(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} \left\{ 1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i [1-h_i(s) m_i(s)]}{s} \right\}$$

$$= \frac{1-a(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right\}$$

Lemma 5.3. Merkitsemällä

(5.25)
$$S_M(\lambda) = \frac{\lambda a(\lambda)}{M [1-a(\lambda)]}$$

on voimassa

(5.26)
$$\lim_{s \rightarrow 0} \{s D(s)\} = \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

Todistus. $\lim_{s \rightarrow 0} \{s D(s)\}^{-1}$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-b(s)c(s) Q(s, M)}{s} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-b(s)c(s)}{s} + b(s)c(s) \frac{1-Q(s,M)}{s} \right\} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-b(s)c(s)}{s} + b(s)c(s) \frac{1-Q(s,1)}{s} \left[1+Q(s,1)+\dots+Q(s,M-1) \right] \right\} \\
&= \bar{B} + \bar{C} + \frac{1-\alpha(\lambda)}{\lambda\alpha(\lambda)} \left[1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] M \\
&= \frac{M [1-\alpha(\lambda)]}{\lambda\alpha(\lambda)} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right\} + \frac{\lambda\alpha(\lambda)}{M [1-\alpha(\lambda)]} (\bar{B} + \bar{C}) \\
&= \frac{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}{S_M(\lambda)},
\end{aligned}$$

mitä tulos osoittaa lemmän väitteen oikeaksi.
Stationäärisen vaiheen tilatodennäköisyyksille saadaan tämän jälkeen arvot

$$\begin{aligned}
(5.27) \quad P_m &= \lim_{t \rightarrow \infty} P_m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s P_m(s) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-\alpha(s+\lambda)}{[s+\lambda]\alpha(s+\lambda)} Q(s, m+1) s D(s) \right\} \\
&= \frac{1-\alpha(\lambda)}{\lambda\alpha(\lambda)} \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \\
&= \frac{1/M}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \quad (m=0,1,\dots,M-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5.28) \quad P_W &= \lim_{t \rightarrow \infty} P_W(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s P_W(s) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-c(s)}{s} s D(s) Q(s, M) \right\} \\
&= \frac{\bar{C} S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5.29) \quad P_R &= \lim_{t \rightarrow \infty} P_R(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s P_R(s) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-b(s)}{s} c(s) s D(s) Q(s, M) \right\} \\
&= \frac{\bar{B} S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5.30) \quad P_{wmi} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P_{wmi}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s P_{wmi}(s) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\lambda_i [1-h_i(s)]}{s} \frac{1-\alpha(s+\lambda)}{[s+\lambda]\alpha(s+\lambda)} Q(s, m+1) s D(s) \right\} \\
&= \frac{\lambda_i \bar{H}_i / M}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \quad (m=0,1,\dots,M-1; i=1,2,\dots,N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5.31) \quad P_{rmi} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P_{rmi}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s P_{rmi}(s) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\lambda_i h_i(s) [1-m_i(s)]}{s} \frac{1-\alpha(s+\lambda)}{[s+\lambda]\alpha(s+\lambda)} Q(s, m+1) s D(s) \right\} \\
&= \frac{\lambda_i \bar{M}_i / M}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \quad (m=0,1,\dots,M-1; i=1,2,\dots,N)
\end{aligned}$$

Yllä esitettyjä tilatodennäköisyyksiä tarkasteltaessa kiinnittyy huomio erityisesti lausekkeeseen (5.27). Tilatodennäköisyydet P_m ($m=0,1,\dots,M-1$) ovat mistä riippumattomat, ts. tilat, joissa (P_1, P_2) -systemi on toimintakykyinen, ovat kaikki keskenään yhtä todennäköisiä. Saman tuloksen voidaan todeta pätevän vastaavien odotustilojen P_{wmi} ja P_{rmi} kohdalla. Muilta osin tilatodennäköisyydet (5.27)–(5.31) muistuttavat ulkonaisesti vastaavia (A, P_1) - ja (A, P_2) -systemien lausekkeita.

5.1.4. (P, P_1) -systemin luotettavuudesta

Systemin luotettavuuden mittariksi valitun todennäköisyyslausekkeen Laplace-muunnos on (P, P_1) -systemin tapauksessa

$$\begin{aligned}
 (5.32) \quad p(s) &= \sum_{m=0}^{M-1} P_m(s) = \frac{D(s)[1-\alpha(s+\lambda)]}{[s+\lambda]\alpha(s+\lambda)} \sum_{m=0}^{M-1} Q(s, m+1) \\
 &= \frac{D(s)[1-\alpha(s+\lambda)]}{[s+\lambda]\alpha(s+\lambda)} \frac{Q(s, 1)[1-Q(s, M)]}{1-Q(s, 1)} \\
 &= \frac{D(s)}{s+\lambda - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)} [1-Q(s, M)] \\
 &= \frac{1}{s+\lambda - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)} \frac{1-Q(s, M)}{1-b(s)c(s)Q(s, M)}
 \end{aligned}$$

Jtse todennäköisyyslauseke $P(t)$ voidaan tämän jälkeen määrittää, mikäli systemin jakautumat ovat tunnetut ja käänteismuunnos $P(t) = \mathcal{L}^{-1}\{p(s)\}$ kyetään löytämään. Stationäärisessä tapauksessa on luotettavuudella lauseke

$$(5.33) \quad P = \sum_{m=0}^{M-1} P_m = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

Odutus- ja korjaustilojen todennäköisyys saadaan yhtälöiden (4.88) ja (4.89) tapaan

$$(5.34) \quad W = \frac{\bar{C}S_M(\lambda) + \sum_{i=1}^M \lambda_i \bar{H}_i}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

$$(5.35) \quad R = \frac{\bar{B}S_M(\lambda) + \sum_{i=1}^M \lambda_i \bar{M}_i}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

5.2. Korjauspolitiikkona täystorjouspolitiikka P_2

5.2.1. (P, P_2) -systemin tilat

Kuten jo edellä on todettu, osasysteemissä S_1 vallitseva rinnankytkennän laatu määrittää systemin tilat. (P, P_2) -systemin tilajoukko on näin sellainen kuin (A, P_2) -systemin tapauksessa esitettiin (vrt. kuva 4.2). Siirtymätodennäköisyydet vastaavien (A, P_2) - ja (P, P_2) -systemien tilaparien kesken ovat kuitenkin tietyissä kohdissa toisistaan poikkeavat. Nämä erot täsmenevät systemin tilayhtälöissä, jotta esitellään seuraavaksi.

5.2.2. (P, P_2) -systemin tilayhtälöt

Systemin käyttäytymistä kuvaavat osittaisdifferentiaaliyhtälöt ovat nyt

$$(5.36) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \alpha(x) + \lambda \right] P_m(x, t) = 0 \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

$$(5.37) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \gamma(x) \right] P_w(x, t) = 0$$

$$(5.38) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \beta(x) \right] P_R(x, t) = 0$$

$$(5.39) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \eta_i(x) \right] P_{wi}(x, t) = 0$$

$$(5.40) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \mu_i(x) \right] P_{ri}(x, t) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

Yllä esitetyt yhtälöt on ratkaistava ottaen huomioon seuraavat reunaehdot:

$$(5.41) \quad P_0(0, t) = \int_0^\infty P_R(x, t) \beta(x) dx + \sum_{i=1}^M \int_0^\infty P_{ri}(x, t) \mu_i(x) dx$$

$$(5.42) \quad P_m(0, t) = \int_0^\infty P_{m-1}(x, t) \alpha(x) dx \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(5.43) \quad P_w(0, t) = \int_0^\infty P_{M-1}(x, t) \alpha(x) dx$$

$$(5.44) \quad P_R(0, t) = \int_0^{\infty} P_W(x, t) y(x) dx$$

$$(5.45) \quad P_{wi}(0, t) = \sum_{m=0}^{H-1} \lambda_i P_m(t)$$

$$(5.46) \quad P_{ri}(0, t) = \int_0^{\infty} P_{wi}(x, t) \eta_i(x) dx \quad \left. \vphantom{\int_0^{\infty}} \right\} (i=1, 2, \dots, M)$$

$$(5.47) \quad P_0(x, 0) = \delta(x)$$

$$(5.48) \quad P_m(x, 0) = 0 \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(5.49) \quad P_W(x, 0) = P_R(x, 0) = 0$$

$$(5.50) \quad P_{wi}(x, 0) = P_{ri}(x, 0) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

Reunaehdot (5.47) - (5.50) määrittelevät systeemin alkutilaksi hetkellä $t=0$ tilan D_0 .

5.2.3. Tilayhtälöiden ratkaisut

Tilatodennäköisyyksien Laplace-muunnoksille saadaan samojen vaiheiden jälkeen kuin kolmessa edeltävässäkin tapauksessa muodollisesti näitä hyvin paljon muistuttavat lausekkeet. Kun merkitään

$$(5.51) \quad Q(s, m) = [a(s+\lambda)]^m \quad (m=1, 2, \dots, M)$$

$$(5.52) \quad D(s) = \left\{ 1 - Q(s, M) b(s) c(s) - \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s+\lambda} [1 - Q(s, M)] \right\}^{-1}$$

voidaan nämä lausekkeet esittää muodossa

$$(5.53) \quad P_m(s) = \frac{D(s) [1 - a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} Q(s, m+1)$$

$$= D(s) \frac{[a(s+\lambda)]^m [1 - a(s+\lambda)]}{s+\lambda}$$

$(m=0, 1, \dots, M-1)$

$$(5.54) \quad P_W(s) = D(s) \frac{[1 - c(s)] Q(s, M)}{s}$$

$$= D(s) \frac{[1 - c(s)] [a(s+\lambda)]^M}{s}$$

$$(5.55) \quad P_R(s) = D(s) \frac{[1 - b(s)] c(s) Q(s, M)}{s}$$

$$= D(s) \frac{[1 - b(s)] c(s) [a(s+\lambda)]^M}{s}$$

$$(5.56) \quad P_{wi}(s) = D(s) \frac{\lambda_i [1 - h_i(s)] [1 - Q(s, M)]}{s [s+\lambda]}$$

$$= D(s) \frac{\lambda_i [1 - h_i(s)] \{1 - [a(s+\lambda)]^M\}}{s [s+\lambda]} \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

$$(5.57) \quad P_{ri}(s) = D(s) \frac{\lambda_i h_i(s) [1 - m_i(s)] [1 - Q(s, M)]}{s [s+\lambda]}$$

$$= D(s) \frac{\lambda_i h_i(s) [1 - m_i(s)] \{1 - [a(s+\lambda)]^M\}}{s [s+\lambda]} \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

Stationäärin vaiheen ratkaisujen johtamiseksi tarvitaan ensin yksi apulais, jota esitetään lemmassa 5.4.

Lemma 5.4. Kun merkitään

$$(5.58) \quad S_M(\lambda) = \frac{\lambda [a(\lambda)]^M}{1 - [a(\lambda)]^M}$$

on voimassa

$$\lim_{s \rightarrow 0} \{s D(s)\} = \frac{\lambda}{1 - [a(\lambda)]^M} \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

$$\text{Todistus. } \lim_{s \rightarrow 0} \{s D(s)\}^{-1}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - Q(s, M) b(s) c(s)}{s} + \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s[s+\lambda]} [1 - Q(s, M)] \right\}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - Q(s, M) b(s) c(s)}{s} + \frac{1 - Q(s, M)}{s+\lambda} \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i [1 - h_i(s) m_i(s)]}{s} - \frac{[1 - Q(s, M)] \lambda}{s[s+\lambda]} \right\}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - Q(s, M)}{s+\lambda} \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i [1 - h_i(s) m_i(s)]}{s} + \frac{s + \lambda - [s+\lambda] Q(s, M) b(s) c(s) - \lambda + \lambda Q(s, M)}{s[s+\lambda]} \right\}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - Q(s, M)}{s+\lambda} \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i [1 - h_i(s) m_i(s)]}{s} + \frac{1 - Q(s, M)}{s+\lambda} + Q(s, M) \frac{1 - b(s) c(s)}{s} \right\}$$

$$= \frac{1 - [a(\lambda)]^M}{\lambda} \left\{ \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + 1 \right\} + [a(\lambda)]^M (\bar{B} + \bar{C})$$

$$= \frac{1 - [a(\lambda)]^M}{\lambda} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + \frac{\lambda [a(\lambda)]^M}{1 - [a(\lambda)]^M} (\bar{B} + \bar{C}) \right\}$$

Merkintä (5.58) huomioon otamalla mahdollisen lemmän väite välittömästi oikeaksi.

Stationääriset ratkaisut ovat tämän jälkeen

$$(5.59) P_m = \lim_{s \rightarrow 0} s p_m(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s D(s) \frac{[a(s+\lambda)]^m [1 - a(s+\lambda)]}{s+\lambda} \right\}$$

$$= \frac{[a(\lambda)]^m [1 - a(\lambda)]}{1 - [a(\lambda)]^M} \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \quad (m=0, \dots, M)$$

$$(5.60) P_W = \lim_{s \rightarrow 0} s p_W(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s D(s) \frac{1 - c(s)}{s} [a(s+\lambda)]^M \right\} = \frac{\bar{C} S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

$$(5.61) P_R = \lim_{s \rightarrow 0} s p_R(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s D(s) \frac{1 - b(s)}{s} c(s) [a(s+\lambda)]^M \right\} = \frac{\bar{B} S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

$$(5.62) P_{w_i} = \lim_{s \rightarrow 0} s p_{w_i}(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s D(s) \lambda_i \frac{1 - h_i(s)}{s} \frac{1 - [a(s+\lambda)]^M}{s+\lambda} \right\} = \frac{\lambda_i \bar{H}_i}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

$$(5.63) P_{r_i} = \lim_{s \rightarrow 0} s p_{r_i}(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ s D(s) \lambda_i h_i(s) \frac{1 - m_i(s)}{s} \frac{1 - [a(s+\lambda)]^M}{s+\lambda} \right\} = \frac{\lambda_i \bar{M}_i}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

5.2.4. (P_1, P_2) -systemin luotettavuudesta

(P_1, P_2) -systemin luotettavuutta kuvaavan todennäköisyyslausekkeen Laplace-muunnos on yhtälöiden (5.51)–(5.53) perusteella

$$(5.64) \quad p(s) = \sum_{m=0}^{M-1} P_m(s) = \frac{D(s)[1 - \alpha(s+\lambda)]}{s+\lambda} \sum_{m=0}^{M-1} [\alpha(s+\lambda)]^m$$

$$= \frac{D(s) \{1 - [\alpha(s+\lambda)]^M\}}{s+\lambda}$$

$$= \frac{1 - [\alpha(s+\lambda)]^M}{[1 - [\alpha(s+\lambda)]^M b(s)c(s)] [s+\lambda] - [1 - [\alpha(s+\lambda)]^M] \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i}$$

Todennäköisyyslauseke $P(t)$ saadaan tämän jälkeen (5.64):n käänteismuunnoksena: $P(t) = \mathcal{L}^{-1}\{p(s)\}$. Tämä kuitenkin edellyttää jakautumien tiheysfunktioiden (ja niiden muunnosten) tuntemista.

Stationäärisen vaiheen luotettavuudella on arvo

$$(5.65) \quad P = \sum_{m=0}^{M-1} P_m = \frac{1 - \alpha(\lambda)}{1 - [\alpha(\lambda)]^M} \frac{\sum_{m=0}^{M-1} [\alpha(\lambda)]^m}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{M}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

$$= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{M}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

Odotus- ja korjaustilojen todennäköisyyksille W ja R saadaan jälleen (5.34):n ja (5.35):n muotoiset lausekkeet sillä luonnollisella erotuksella, että $S_M(\lambda)$ on nyt (P_1, P_2) -systemin mukainen, siis yhtälön (5.58) määrittelemä.

6. VARMISTUSMENETELMÄN JA KORJAUSPOLITIIKAN VAIKUTUS SYSTEEMIN LUOTETTAVUUTEEN

Edellä esitetyissä luvuissa on tarkasteltu perusrakenteeltaan kuvan 3.1 mukaista systeemiä, jonka toimintaan ja käyttäytymiseen ovat vaikuttamassa useat stokastiset tekijät: vian syntyminen, korjausaika, korjauksen odotus- ja valmistelu-aika. Osasysteemin S_1 tarkemman rakenteen ja systemin korjauksessa noudatettavan politiikan perusteella päädyttiin systeemin neljään erikoistapaukseen, joita kutsuttiin (A, P_1) -, (A, P_2) -, (P, P_1) - ja (P, P_2) -systemeiksi. Kunkin erityissysteemin kohdalla suoritettiin samat tarkastelut systeemin käyttäytymisestä ajan funktiona ja johdettiin systeemin luotettavuutta kuvaavat todennäköisyyslausekkeet.

Tässä luvussa suoritetaan luotettavuuslausekkeiden yksityiskohtaisempi analysointi. Erityisesti päästään vertaamaan eri systeemejä toisiinsa. Näin saadaan käsitys toisaalta osasysteemin S_1 rakenteen (eli tietyn komponentin varmistusmenetelmän), toisaalta harjoitettavan korjauspolitiikan vaikutuksesta systeemin luotettavuuteen. Edelleen voidaan tarkastella, mikä vaikutus osasysteemin S_1 komponenttien lukumäärällä on systeemin toimintaan.

Luotettavuusfunktiot on kunkin systeemin osalta yleisessä tapauksessa saatettu näiden funktioiden Laplace-muunnoksiin saatta, vrt. yhtälöt (4.86), (4.148), (5.32) ja (5.64). Siirtyminen näistä käänteismuunnosten kautta varsinaisiin luotettavuusfunktioihin vaatii jo systeemin jakautumatyyppien yksityiskohtaista tuntemista ja jää siten kussakin yksittäistapauksessa erikseen ratkaistavaksi. Sen sijaan stationäärisen vaiheen luotettavuuslausekkeet voidaan muodostaa jakautumatyyppejä tuntematta: yhtälöt (4.87), (4.149), (5.33) ja (5.65). Seuraavassa rajoitutaankin tämän johdosta pelkästään stationääriseen vaiheeseen. Tarkastelut voidaan suorittaa näin mahdollisimman yleisillä oletuksilla.

6.1. Merkintöjä ja eräitä aputuloksia

Stationäärisen vaiheen luotettavuuden on kussakin tapauksessa osoitettu olevan muotoa

$$(6.1) \quad P = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

missä

$\lambda_i = S_2$:n komponentin i vikataajuus

$\bar{H}_i = S_2$:n komponentin i korjauksen odotusajan odotusarvo

$\bar{M}_i = S_2$:n komponentin i korjausajan odotusarvo

$\bar{B} = S_1$:n korjausajan odotusarvo

$\bar{C} = S_1$:n korjauksen odotusajan odotusarvo

$S_M(\lambda) = S_1$:n komponenttien lukumäärästä M ja vikataajuuksista $\alpha(x)$ sekä S_2 :n komponenttien vikataajuuksien summasta λ riippuva lauseke; $S_M(\lambda)$:t on määritelty yhtälöissä (4.83), (4.141), (5.25) ja (5.58)

Luotettavuuslausekkeen ulkonainen muoto on siis kaikissa neljässä tapauksessa lausekkeen $S_M(\lambda)$ sopivalla määrittelyllä saatu täsmälleen samantyyppiseksi. Tällä lausekkeella $S_M(\lambda)$ on näin ollen jättössä varsin keskeinen asema. Sen vuoksi esitetäänkin aluksi eräitä sitä koskevia tuloksia.

Tähän asti on eri systemien vastaavia suureita merkitty samoilla symboleilla. Sekaannuksen vaaraa ei ole ollut, koska tarkastellut ovat olleet toisistaan erilliset. Päin vastoin analogia eri systemien kesken on säilynyt ja systemien toisaalta samantyyppiset, toisaalta erilaiset ominaisuudet ovat korostuneet. Nyt, kun tarkasteluita suoritetaan eri systemien kesken rinnakkain, on symbolit erotettava toisistaan. Otetaan käyttöön merkintätapa, jossa kyseessä oleva systemi ilmaistaan suureeseen liitettävällä

ylöindeksillä. Olkoon tämän indeksin arvo sama kuin systemien esiintymisjärjestys edellä, ts. (A, P_1) -systemiin liittyviä suureita merkittään 1:llä, (A, P_2) :een 2:llä jne. Lausekkeen $S_M(\lambda)$ osalta on tällöin erityisesti

$$(6.2) \quad S_M^{(1)}(\lambda) = \left\{ \sum_{k=1}^M \frac{1 - a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} \right\}^{-1}$$

$$(6.3) \quad S_M^{(2)}(\lambda) = \left\{ \sum_{k=1}^M \frac{1 - a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} Q^{(2)}(0, k-1) \right\}^{-1}$$

$$= \left\{ \frac{Q^{(2)}(0, M) - 1}{\lambda} \right\}^{-1}$$

$$= \frac{\lambda \prod_{k=1}^M a_k(\lambda)}{1 - \prod_{k=1}^M a_k(\lambda)}$$

$$(6.4) \quad S_M^{(3)}(\lambda) = \frac{\lambda a(\lambda)}{M[1 - a(\lambda)]}$$

$$(6.5) \quad S_M^{(4)}(\lambda) = \frac{\lambda [a(\lambda)]^M}{1 - [a(\lambda)]^M}$$

Aluksi tarkastellaan eräitä funktioiden $a_k(\lambda)$ ($k=1, 2, \dots, M$) ominaisuuksia.

Lemma 6.1. Kaikilla positiivisilla λ :n arvoilla on voimassa

$$(6.6) \quad 0 < a_k(\lambda) < 1 \quad (k=1, 2, \dots, M)$$

$$(6.7) \quad a_1(\lambda) < a_2(\lambda) < \dots < a_{M-1}(\lambda) < a_M(\lambda).$$

Todistus. Todistetaan ensin väite (6.6). Sovittujen merkintöjen mukaan on (vt. yhtälö (4.84)):

$$(6.8) \quad a_k(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} k \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} dx \quad (k=1, 2, \dots, M)$$

Olkoon nyt λ mielivollainen kiinnitetty positiiviluku. Yhtälöstä (6.8) saadaan määrättyjen integraalien väliarvolauseella soveltaen tulos

$$(6.9) \quad a_k(\lambda) = e^{-\lambda \xi_k} \int_0^{\infty} k \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} dx, \quad (k=1,2,\dots)$$

missä $0 < \xi_k < \infty$. Yhtälöstä (6.9) saadaan edelleen (2.11):n perusteella

$$(6.10) \quad a_k(\lambda) = e^{-\lambda \xi_k}, \quad (k=1,2,\dots,M)$$

jota suoraan osoittaa väitteen (6.6) oikeaksi.

Toiseksi osoitetaan, että kiinteällä λ in arvolla $a_k(\lambda)$ on k :n mukana kasvava. Vaikka lausekkeilla $a_k(\lambda)$ ei olekaan nyt käsillä olevien tarkastelujen kannalta mielekästä tulkintaa muilla kuin kokonaislukuarvoilla, ei määrittely-yhtälö (6.8) millään tavalla aseta k :lle tällaista vaatimusta. Oletetaankin siksi todistuksen ajaksi k :in voivan muuttua jatkuvasti. Väite (6.7) voidaan näin ollen osoittaa oikeaksi näyttämällä, että $\frac{d}{dk} \{a_k(\lambda)\} > 0$ kaikilla k :in positiiviarvoilla.

Yhtälön (2.11) perusteella on, kun $k > 0$

$$(6.11) \quad \int_0^{\infty} k \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} dx = 1.$$

Derivoimalla (6.11) k :in suhteen saadaan

$$\frac{d}{dk} \left\{ \int_0^{\infty} k \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} dx \right\} = 0,$$

eli

$$\int_0^{\infty} \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} dx + \int_0^{\infty} k \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} \left[-\int_0^x \alpha(u) du \right] dx = 0$$

ja edelleen

1. Lindelöf II, s. 302

$$(6.12) \quad \int_0^{\infty} \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du \right] dx = 0$$

Yhtälössä (6.12) on integroitavan alkuosa

$$(6.13) \quad \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du}$$

positiivinen kaikilla x :in arvoilla. Hobasuluissa oleva lauseke

$$(6.14) \quad 1 - k \int_0^x \alpha(u) du$$

on puolestaan monotoonisesti vähenevä x :in funktio.

Lauseke (6.14) on aluksi positiivinen. (=1, kun $x=0$), riittävän suurilla x :in arvoilla se on negatiivinen (vrt. yhtälö (2.10)). Lausekkeen (6.13) positiivisuudesta ja (6.14):in monotoonisuudesta sekä yllä esitettyistä seikoista seuraa nyt, että

$$(6.15) \quad \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du \right] \begin{cases} \geq 0, & \text{kun } x \leq x_k \\ \leq 0, & \text{kun } x \geq x_k \end{cases}$$

missä x_k on yhtälön

$$(6.16) \quad 1 - k \int_0^x \alpha(u) du = 0$$

ratkaisu. Yhtälö (6.12) voidaan kirjoittaa tämän jälkeen muotoon

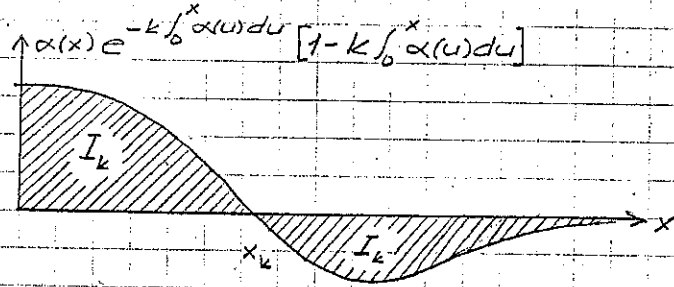
$$(6.17) \quad \begin{cases} \int_0^{x_k} \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du \right] dx \\ + \int_{x_k}^{\infty} \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du \right] dx = 0 \end{cases}$$

Yhtälön (6.17) ensimmäinen yhteenlaskettava on (6.15):n nojalla positiivinen, jälkimmäinen vastaavasti

negatiivinen. Koska summa on $= 0$, ovat yhtälöas-
tettavat itseisarvoltaan yhtäsuuret, eli voidaan mer-
kitä

$$(6.18) \begin{cases} \int_0^{x_k} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} [1 - k \int_0^x \alpha(u) du] dx = I_k \\ \int_{x_k}^{\infty} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} [1 - k \int_0^x \alpha(u) du] dx = -I_k \end{cases}$$

missä $I_k > 0$. Saatua tulosta havainnollistaa kuva 6.1.



Kuva 6.1. Yhtälön (6.17) pinta-alatulkinta

Saadun välituloksen (6.18) ja määrättyjen integraa-
lien väliarvolauseeseen nojalla voidaan $a_k(\lambda)$:n
derivaatalle viimein johtaa lauseke

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \{a_k(\lambda)\} &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} dx \\ &\quad + k \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[-\int_0^x \alpha(u) du\right] dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du\right] dx \\ &= \int_0^{x_k} e^{-\lambda x} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du\right] dx \\ &\quad + \int_{x_k}^{\infty} e^{-\lambda x} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du\right] dx \\ &= e^{-\lambda \int_0^{x_k} \alpha(u) du} \int_0^{x_k} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du\right] dx \\ &\quad + e^{-\lambda \int_0^{\infty} \alpha(u) du} \int_{x_k}^{\infty} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du\right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e^{-\lambda \int_0^{x_k} \alpha(u) du} I_k - e^{-\lambda \int_0^{\infty} \alpha(u) du} I_k \\ &= (e^{-\lambda \int_0^{x_k} \alpha(u) du} - e^{-\lambda \int_0^{\infty} \alpha(u) du}) I_k, \end{aligned}$$

missä $0 < \int_0^{x_k} \alpha(u) du < x_k < \int_0^{\infty} \alpha(u) du < \infty$. Näin on saatu tulos

$$(6.19) \quad \frac{d}{d\lambda} \{a_k(\lambda)\} = (e^{-\lambda \int_0^{x_k} \alpha(u) du} - e^{-\lambda \int_0^{\infty} \alpha(u) du}) I_k > 0,$$

mitä osoittaa väitteen (6.7) paikkansa pitäväksi. Lemma
6.1 on siten kokonaisuudessaan todistettu.

Lemma 6.2 Kaikilla positiivisilla λ :n arvoilla on
voimassa

$$(6.20) \quad S_M^{(1)}(\lambda) > S_M^{(2)}(\lambda) > S_M^{(4)}(\lambda)$$

$$(6.21) \quad S_M^{(1)}(\lambda) > S_M^{(3)}(\lambda) > S_M^{(4)}(\lambda)$$

Todistus. Olkoon λ mielivaltainen kiinnitetty posi-
tiiviluku. Oletaan lemmän 6.2 todistuksen ajaksi käyt-
töön lyhennetty merkintätapa, jossa funktioiden $a_k(\lambda)$
argumenttia ei merkittä näkyviin; siis seuraavassa on
 $a_k = a_k(\lambda)$ ($k=1,2,\dots,M$) ja $a = a(\lambda)$. Osoitetaan
ensin, että $S_M^{(1)}(\lambda) > S_M^{(2)}(\lambda)$. Yhtälöistä (6.2) ja (6.1) seuraa

$$\begin{aligned} S_M^{(1)}(\lambda) - S_M^{(2)}(\lambda) &= \frac{\lambda}{\sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{a_k}} - \frac{\lambda}{\sum_{k=1}^M \left[\frac{1-a_k}{a_k} \prod_{j=1}^k a_j \right]} \\ &> \frac{\lambda}{\sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{a_k}} - \frac{\lambda}{\sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{a_k}} = 0, \end{aligned}$$

sillä lemmän 6.1 mukaanhan on $a_k(\lambda) < 1$, eli
 $1 / (\prod_{j=1}^k a_j) > 1$. (Edellytyksenä aidolle epäyhtälölle on,
että $M \geq 2$. Tämä oletetaan kaikkialla seuraavassa, sillä
tapauksessa $M=1$ varmistusmenetelmän ja korjauspolitiikan

(99) vaikutukset häviävät ja kaikki neljä erityissysteemiä su-
pistuvat yhdeksi).

Väitteen (6.20) jälkimmäinen osa nähdään myös
helposti oikeaksi lemmän 6.1 perusteella:

$$S_H^{(2)}(\lambda) - S_H^{(4)}(\lambda) = \frac{\lambda \prod_{k=1}^M a_k}{1 - \prod_{k=1}^M a_k} - \frac{\lambda a^M}{1 - a^M}$$

$$= \lambda \frac{\prod_{k=1}^M a_k - a^M}{(1 - \prod_{k=1}^M a_k)(1 - a^M)} > 0.$$

Vastaavalla tavalla lemmän 6.1 tuloksia käyttäen
voidaan todistaa epäyhtälöiden (6.21) voimassaolo:

$$S_H^{(1)}(\lambda) - S_H^{(3)}(\lambda) = \frac{\lambda}{\sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{a_k}} \frac{\lambda}{M \frac{1-a}{a}}$$

$$= \lambda \left\{ \frac{1}{\sum_{k=1}^M \frac{1}{a_k} - M} - \frac{1}{\frac{M}{a} - M} \right\}$$

$$= \lambda \left\{ \frac{\frac{M}{a} - \sum_{k=1}^M \frac{1}{a_k}}{\left(\sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{a_k}\right) M \frac{1-a}{a}} \right\}$$

$$= \frac{\lambda \sum_{k=1}^M \frac{a_k - a}{a_k}}{\left(\sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{a_k}\right) M(1-a)} > 0$$

$$S_H^{(3)}(\lambda) - S_H^{(4)}(\lambda) = \frac{\lambda a}{M(1-a)} \frac{\lambda a^M}{1-a^M}$$

$$= \frac{\lambda a}{1-a^M} \left\{ \frac{1+a+\dots+a^{M-1}}{M} - a^{M-1} \right\}$$

$$> \frac{\lambda a}{1-a^M} \left\{ \frac{M a^{M-1}}{M} - a^{M-1} \right\} = 0.$$

Lausekkeiden $S_M^{(i)}(\lambda)$ ($i=1,2,3,4$) kestinaiset suu-
russuhteet on näin määritetty lukuunottamatta $S_M^{(2)}(\lambda)$ in
lauseke

(100) ja $S_M^{(3)}(\lambda)$:n välillä vallitsevaa relaatiota. Osoittautuu,
että näiden kahden lausekkeen välistä suuruusjärjes-
tystä ei yleisessä tapauksessa voidakaan määrittää.
Jakautumatyyppikään tunteminen ei tässä yhteydessä
vielä riitä, jakautumat on tunnettava parametreineen.
Tätä havainnollistaa seuraava yksintertainen eksponentiaal-
jakautumaan liittyvä esimerkki.

Olkoon

$$(6.22) \quad A(x) = \alpha e^{-\alpha x}$$

ja $M=2$. Tällöin on

$$(6.23) \quad a_k(\lambda) = k\alpha \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} e^{-k\alpha x} dx$$

$$= \frac{k\alpha}{\lambda + k\alpha} \quad (k=1,2)$$

Tarkasteltavat lausekkeet ovat tässä tapauksessa

$$(6.24) \quad S_2^{(2)}(\lambda) = \frac{\lambda}{Q^{(2)}(0,2) - 1} = \frac{\lambda}{\frac{\lambda+\alpha}{\alpha} \frac{\lambda+2\alpha}{2\alpha} - 1}$$

$$= \frac{\lambda}{(1+\delta)(1+\frac{\delta}{2}) - 1}$$

$$(6.25) \quad S_2^{(3)}(\lambda) = \frac{\lambda \frac{\alpha}{\lambda+\alpha}}{2 \frac{\lambda}{\lambda+\alpha}} = \frac{\lambda}{2\delta}$$

kun on merkitty $\lambda/\alpha = \delta$. Edelleen on

$$(6.26) \quad S_2^{(2)}(\lambda) - S_2^{(3)}(\lambda) = \lambda \frac{2\delta - (1+\delta)(1+\delta/2) + 1}{2\delta [(1+\delta)(1+\delta/2) - 1]}$$

$$= \frac{\lambda(1-\delta)}{4 [(1+\delta)(1+\delta/2) - 1]}$$

Erotuksen (6.26) etumerkki jää nyt riippumaan suureen δ arvosta, ts. viitataajuuksien λ ja α suhteesta. Esimerkitapauksessa on siis voimassa

$$(6.27) \begin{cases} S_2^{(2)}(\lambda) > S_2^{(3)}(\lambda), & \text{jos } \lambda < \alpha \\ S_2^{(2)}(\lambda) < S_2^{(3)}(\lambda), & \text{jos } \lambda > \alpha \end{cases}$$

Esimerkin valossa on selvää, että lemmän 6.2 tuloksia ei yleisessä tapauksessa voida $S_m^{(2)}(\lambda)$:n ja $S_m^{(3)}(\lambda)$:n osalla täydentää.

6.2. Luotettavuuden komponentit: tilatodennäköisyydet P_m .

Yhtälöissä (4.87), (4.149), (5.33) ja (5.65) on esitetty eri systemien stationääriseen vaiheeseen luotettavuudet. Niinkuin systemien tilojen määrittelyn yhteydessä ja myöhemmissäkin tarkasteluissa on käynyt ilmi, koostuu tulin näistä luotettavuuskausekista M stä eri komponentista, nimittäin tilatodennäköisyyksistä P_0, P_1, \dots, P_{M-1} . Näiden tilatodennäköisyyksien kestävyyden suuruussuhteisiin ja luotettavuuden muodostumiseen näistä komponenteista liittyy eräitä mielenkiintoisia ominaisuuksia, joita seuraavassa tarkastellaan.

Lause 6.1. Kaikilla positiivisilla λ :n arvoilla on voimassa

$$(6.28) \quad P_0^{(1)} < P_1^{(1)} < \dots < P_{M-1}^{(1)}$$

$$(6.29) \quad P_0^{(3)} = P_1^{(3)} = \dots = P_{M-1}^{(3)}$$

$$(6.30) \quad P_0^{(4)} > P_1^{(4)} > \dots > P_{M-1}^{(4)}$$

missä $P_m^{(1)}$:n lauseke on esitetty yhtälössä (4.78), $P_m^{(3)}$:n yhtälössä (5.27) ja $P_m^{(4)}$:n yhtälössä (5.59).

Todistus. Yhtälön (4.78) nojalla on $(m=0, 1, \dots, M-2)$

$$\frac{P_m^{(1)}}{P_{m+1}^{(1)}} = \frac{1 - a_{M-m}}{a_{M-m}} \frac{a_{M-m-1}}{1 - a_{M-m-1}} = \frac{a_{M-m-1} - a_{M-m} a_{M-m-1}}{a_{M-m} - a_{M-m} a_{M-m-1}} < 1,$$

sillä lemmän 6.1 mukaan on $a_{M-m-1} < a_{M-m}$. Näin on väite (6.28) osoitettu oikeaksi. Tulos (6.29) on itse asiassa todettu jo aiemmin, vrt. yhtälö (5.27) ja sen kommentti sinulla 84. Väitteen (6.30) todistamiseksi saadaan yhtälön (5.59) perusteella $(m=0, 1, \dots, M-2)$:

$$\frac{P_m^{(4)}}{P_{m+1}^{(4)}} = \frac{1}{a} > 1,$$

mitä osoittaa väitteen todetsi. Lause on näin kokonaisuudessaan todistettu.

Lauseesta 6.1 voidaan vielä todeta, että siinä ei ole mitään tilatodennäköisyyksiä $P_m^{(2)}$ koskevia tuloksia. Näitä koskevat tulokset vaatisivat jälleen tiheysfunktion $A(x)$ yksityiskohtaista tuntemista (parametrien arvoineen). Yleisessä muodossa on $(m=0, 1, \dots, M-2)$:

$$(6.31) \quad \frac{P_m^{(2)}}{P_{m+1}^{(2)}} = \frac{1 - a_{M-m}}{\prod_{k=1}^{M-m} a_k} \frac{\prod_{k=1}^{M-m-1} a_k}{1 - a_{M-m-1}} = \frac{1 - a_{M-m}}{(1 - a_{M-m-1}) a_{M-m}}$$

Eksponenciaalijakautuman tapauksessa suhde (6.31) saa arvon (vrt. yhtälö (6.23)):

$$(6.32) \quad \frac{P_m^{(2)}}{P_{m+1}^{(2)}} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda + (M-m)\alpha}}{\frac{\lambda}{\lambda + (M-m-1)\alpha}} \frac{(M-m)\alpha}{\lambda + (M-m)\alpha} = \frac{(M-m)\alpha + (\lambda - \alpha)}{(M-m)\alpha}$$

Yhtälöstä (6.32) nähdään suoraan, että $P_m^{(2)}$ on minimitana kasvava, vakio tai vähenevä sen mukaan onko $\lambda < \alpha$, $\lambda = \alpha$ vai $\lambda > \alpha$. Siis epäyhtälöiden (6.28) - (6.30) kaltaisia tuloksia ei (A, P_2) -systemin tapauksessa voida esittää.

Seuraavaksi tarkastellaan eri systemien luotettavuuksia rinnakkain ja suoritetaan systemien välisiä vertailuja.

Osasysteemiin S_1 liittyviä suureita \bar{B} ja \bar{C} voidaan pitää S_1 :n kytkennässä ja noudatettavasta korjauspolitiikasta riippumattomina; S_1 :n synnyttämän korjaustarpeen tapauksessa on kysymyksessä sen kaikkien komponenttien lunkoon saattaminen. Voidaan siis rajoituksesta olettaa ja merkitä

$$(6.33) \quad \bar{B}^{(1)} = \bar{B}^{(2)} = \bar{B}^{(3)} = \bar{B}^{(4)} = \bar{B}$$

$$(6.34) \quad \bar{C}^{(1)} = \bar{C}^{(2)} = \bar{C}^{(3)} = \bar{C}^{(4)} = \bar{C}$$

Sen sijaan suureiden \bar{H}_i ja \bar{M}_i ($i=1,2,\dots,M$) kohdalla tilanne on jossakin määrin toinen. Minimikorjauspolitiikkaa noudatettaessa suureet \bar{H}_i ja \bar{M}_i liittyvät S_2 :n komponenttien korjaus- ja odotusaitoihin sekä S_1 :n ennakkohuolto-ohjelman toteuttamiseen. Täyskorjauspolitiikan tapauksessa on tämän lisäksi otettava huomioon suoritettavat S_1 :n riiallisten komponenttien korjaukset. Seuraavia tarkasteluja varten oletetaan kuitenkin, että S_1 :n komponenttien korjaukset on mahdollista toteuttaa sen ajan puitteissa, jota kuluu S_2 :n komponenttien tunnostukseen. Tämä on yleensä saatavissa aikaan lisäkustannuksin (suurempi korjausmiehistö, tehokkaampi korjauspaja jne). Oletetaan ja merkitään siis

$$(6.35) \quad \bar{H}_i^{(1)} = \bar{H}_i^{(2)} = \bar{H}_i^{(3)} = \bar{H}_i^{(4)} = \bar{H}_i$$

$$(6.36) \quad \bar{M}_i^{(1)} = \bar{M}_i^{(2)} = \bar{M}_i^{(3)} = \bar{M}_i^{(4)} = \bar{M}_i \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (6.35) \\ (6.36) \end{matrix}} \right\} (i=1,2,\dots,M)$$

Eri systeemiä toisiinsa verrattaessa on kuitenkin pidettävä mielessä ne kuhunkin systeemiin liittyvät taloudelliset panokset, joilla (6.35):n ja (6.36):n mukainen tilanne on saatu aikaan.

Lause 6.2. Yleisesti on voimassa

$$(6.37) \quad P_0^{(1)} < P_0^{(2)} < P_0^{(4)}$$

$$(6.38) \quad P_0^{(1)} < P_0^{(3)} < P_0^{(4)}$$

$$(6.39) \quad P_{M-1}^{(1)} > P_{M-1}^{(2)} > P_{M-1}^{(4)}$$

$$(6.40) \quad P_{M-1}^{(1)} > P_{M-1}^{(3)} > P_{M-1}^{(4)}$$

Todistus. Todistus suoritetaan vain epäyhtälöiden (6.37) osalta. Käytetty menetelmä sopii hyvin myös muiden väitteiden (6.38) - (6.40) todistamiseen. Koska todistukset ovat kuitenkin paljolti nyt esitettävää muistuttavia, ne siivutetaan.

Yhtälöiden (4.78) ja (4.142) perusteella on

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_0^{(1)}} - \frac{1}{P_0^{(2)}} &= \frac{\lambda a_M}{1 - a_M} \left\{ \left[1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \left[\frac{1}{S_M^{(1)}(\lambda)} - \frac{1}{S_M^{(2)}(\lambda) Q^{(2)}(0, M-1)} \right] \right. \\ &\quad \left. + (\bar{B} + \bar{C}) \left[1 - \frac{1}{Q^{(2)}(0, M-1)} \right] \right\} \\ &> \frac{a_M}{1 - a_M} \left[1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \left\{ \sum_{k=1}^M \frac{1 - a_k}{a_k} \left[1 - \frac{Q^{(2)}(0, k-1)}{Q^{(2)}(0, M-1)} \right] \right\} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Yllä olevaan epäyhtälöketjuun on johtanut osittain lemma 6.1 suoraan, osittain sen seuraukset:

$$1 - \frac{1}{Q^{(2)}(0, M-1)} = 1 - \prod_{k=1}^{M-1} a_k > 1 - 1 = 0$$

$$1 - \frac{Q^{(2)}(0, k-1)}{Q^{(2)}(0, M-1)} = \begin{cases} 1 - \prod_{j=k}^{M-1} a_j > 0 & (k=1, 2, \dots, M-1) \\ 1 - 1 = 0 & (k=M) \end{cases}$$

Vastaavasti on (4.142):n ja (5.59):n perusteella

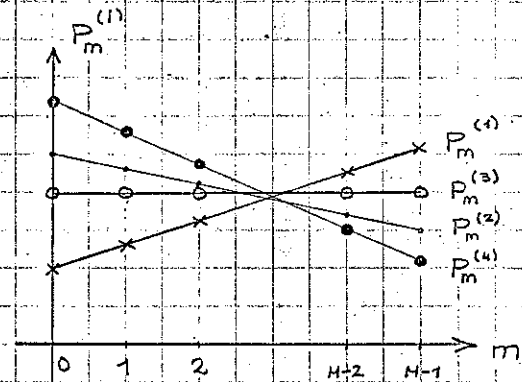
$$\begin{aligned} \frac{1}{P_0^{(2)}} - \frac{1}{P_0^{(M)}} &= \frac{\lambda a_M}{(1-a_M) Q^{(2)}(0, M-1)} \left\{ \frac{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i)}{S_M^{(2)}(\lambda)} + (\bar{B} + \bar{C}) \right\} \\ &\quad - \frac{1-a^M}{1-a} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + \frac{\lambda a^M}{1-a^M} (\bar{B} + \bar{C}) \right\} \\ &= \left[1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \left\{ \frac{\lambda a_M}{1-a_M} \sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{\lambda a_k} \frac{Q^{(2)}(0, k-1)}{Q^{(2)}(0, M-1)} - \frac{1-a^M}{1-a} \right. \\ &\quad \left. + (\bar{B} + \bar{C}) \left\{ \frac{\lambda a_M}{1-a_M} \frac{1}{Q^{(2)}(0, M-1)} + \frac{\lambda a^M}{1-a} \right\} \right\} \\ &= \left[1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \left\{ \sum_{k=1}^M \left[\frac{a_M}{a_k} \frac{1-a_k}{1-a_M} \frac{Q^{(2)}(0, k-1)}{Q^{(2)}(0, M-1)} - a^{M-k} \right] \right. \\ &\quad \left. + (\bar{B} + \bar{C}) \lambda \left\{ \frac{a_M}{1-a_M} \prod_{k=1}^{M-1} a_k - \frac{a}{1-a} a^{M-1} \right\} \right\} \\ &> \left[1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \left\{ \sum_{k=1}^M \left[\frac{Q^{(2)}(0, k-1)}{Q^{(2)}(0, M-1)} - a^{M-k} \right] \right. \\ &\quad \left. + (\bar{B} + \bar{C}) \lambda \left\{ \frac{a}{1-a} \left[\prod_{k=1}^{M-1} a_k - a^{M-1} \right] \right\} \right\} \\ &> \left[1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \left\{ \sum_{k=1}^{M-1} \left[\prod_{j=k}^{M-1} a_j - a^{M-k} \right] \right\} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Todistusketjussa esiintyvät yhtälöt on jälleen saatu lemmän 6.1 tuloksiin nojautuen. Siirtymällä nyt

tilatodennäköisyyksien käänteisarvoista itse tilatodennäköisyyksiin nähdään (6.37) välittömästi oikeaksi. Muiden epäyhtälöparien todistus on hyvin samantapainen.

Lauseessa 6.2 on jälleen "aukko" todennäköisyyksien $P_0^{(2)}$ ja $P_0^{(3)}$ sekä $P_{M-1}^{(2)}$ ja $P_{M-2}^{(3)}$ kestinäisessä vertailussa. Eksponentiaalijakautumaan liittyvän esimerkin avulla voitaisiin osoittaa, että tätä aukkoa ei yleisessä tapauksessa saadakaan poristetuksi (eksponentiaalijakautuman tapauksessa esim. suuruussuhteet jäävät riippumaan parametrien α ja λ kestinäisestä suuruusjärjestyksestä).

Lauseiden 6.1 ja 6.2 tulokset yhdistäen voidaan luotettavuuden muodostumista komponenteistaan havainnollistaa kuvalla 6.2.



Kuva 6.2. Luotettavuuden muodostuminen komponenteistaan

6.3. Luotettavuuden riippuvuus osasysteemin S_1 komponenttien lukumäärästä

Tarkastelut on tähän asti suoritettu kiinteällä M :n arvolla, ts. osasysteemin S_1 komponenttien lukumäärä on ollut ennalta määrätty. Koska nyt kuitenkin rinnankytkennän ensisijaisena tehtävänä on systeemin luotettavuuden parantaminen varmistamalla tietyn strategi-

sen komponentin toiminta toisilla samonlaisilla komponenteilla, on luonnollisesti mielenkiintoista tutkia, miten systeemin luotettavuus riippuu näiden komponenttien lukumäärästä.

Yhtälön (6.1) mukaisesti voidaan systeemin luotettavuus kussakin tapauksessa lausussa muodossa

$$P = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

missä lauseke $S_M(\lambda)$ on kyseessä olevasta erityis-
systeemistä riippuen jokin lausekkeista (6.2) - (6.5).

Todistetaan ensin seuraava lause, joka on intuitiivisesti selvä, mutta jota ei ole toistaiseksi formaalisesti esitetty.

Lause 6.3. Kunkin tarkasteltavan systeemin luotettavuus on S_i :n komponenttien lukumäärän mukana kasvava.

Todistus. Lauseen todistamiseksi riittää yhtälön (6.1) perusteella osoittaa, että $S_M(\lambda)$ on kaikilla positiivisilla λ :n arvoilla M :n suhteen vähenevä. Olkoon siksi λ mielivaltainen, kiinteä positiiviluku. Tällöin saadaan lemmän 6.1 perusteella seuraavat tulokset,

$$\frac{1}{S_{M+1}^{(1)}} = \frac{1}{S_M^{(1)}} = \frac{\sum_{k=1}^{M+1} \frac{1-a_k}{\lambda a_k}}{\sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{\lambda a_k}} = \frac{1-a_{M+1}}{\lambda a_{M+1}} > 0$$

$$\frac{S_{M+1}^{(2)}}{S_M^{(2)}} = \frac{\lambda \prod_{k=1}^{M+1} a_k}{1 - \prod_{k=1}^{M+1} a_k} \cdot \frac{1 - \prod_{k=1}^M a_k}{\lambda \prod_{k=1}^M a_k} = \frac{a_{M+1} - \prod_{k=1}^{M+1} a_k}{1 - \prod_{k=1}^M a_k} < 1$$

$$\frac{S_{M+1}^{(3)}}{S_M^{(3)}} = \frac{\lambda a}{(M+1)(1-a)} \cdot \frac{M(1-a)}{\lambda a} = \frac{M}{M+1} < 1$$

$$\frac{S_{M+1}^{(4)}}{S_M^{(4)}} = \frac{\lambda a^{M+1}}{1-a^{M+1}} \cdot \frac{1-a^M}{\lambda a^M} = \frac{a-a^{M+1}}{1-a^{M+1}} < 1$$

Yllä olevat tulokset ovat voimassa kaikilla positiivi-

silla M :n arvoilla, joten lause 6.3 on näin todistettu.

Lisättäessä S_i :n komponenttien lukumäärää systeemin luotettavuus siis kasvaa. Rajatapauksessa, kun komponenttien lukumäärä tulee hyvin suureksi, saadaan

$$(6.41) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} S_M^{(1)}(\lambda) = S^{(1)}(\lambda) = 0$$

$$(6.42) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} S_M^{(2)}(\lambda) = S^{(2)}(\lambda) = 0$$

$$(6.43) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} S_M^{(3)}(\lambda) = S^{(3)}(\lambda) = 0$$

$$(6.44) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} S_M^{(4)}(\lambda) = S^{(4)}(\lambda) = 0$$

Raja-arvojen (6.43) ja (6.44) olemassaolo nähdään suoraan lausekkeista (6.4) ja (6.5), kun otetaan huomioon, että $0 < a(\lambda) < 1$. Raja-arvot (6.41) ja (6.42) puolestaan ovat olemassa, koska lauseen 6.3 mukaan lukujonot $\{S_M^{(1)}(\lambda)\}$ ja $\{S_M^{(2)}(\lambda)\}$ ovat (kiinteällä λ :n arvolla) monotoonisesti väheneviä ja alaspäin rajoitettuja (positiivisia). Ovatko raja-arvot $S^{(1)}(\lambda)$ ja $S^{(2)}(\lambda)$ positiivisia vai $= 0$, jää riippumaan summan

$$(6.45) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-a_k}{a_k}$$

ja tulon

$$(6.46) \quad \prod_{k=1}^{\infty} a_k$$

suppenevuudesta tai hajaantumisesta. Mitäli (6.45) suppenee, on $S^{(1)}(\lambda) > 0$, muulloin $S^{(1)}(\lambda) = 0$. Samalla tavalla (6.46):n suppeneminen merkitsee $S^{(2)}(\lambda)$:n positiivisuutta ja hajaantuminen $S^{(2)}(\lambda)$:n häviömistä. Suppenevuuskysymykset jäävät kussakin yksittäistapauksessa

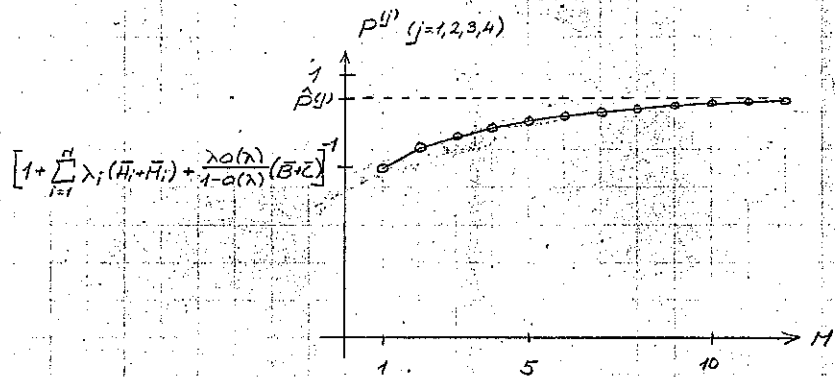
1. Monotoonisen, rajoitetun lukujonon suppenevuudesta ks. Lindelöf I, s. 199

erikseen ratkaistavaksi.

Raja-arvojen (6.41) - (6.44) olemassaolo merkitsee, että myöskin systeemin luotettavuudella on raja-arvo, joka samalla on luotettavuuden yläraja. Voidaan näin merkitä

$$(6.47) \quad \hat{P}^{(j)} = \lim_{M \rightarrow \infty} P^{(j)} = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{\mu}_i + \bar{M}_i) + S^{(j)}(\lambda) (\bar{B} + \bar{C}) \right\}^{-1} \quad (j=1, 2, 3, 4)$$

Systeemillä, joka todella viottuu ($\lambda > 0$), tämä raja-arvo on aina yksiköstä pienempi, sillä onhan tällöin $\sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{\mu}_i + \bar{M}_i) > 0$ ja osittosuissa oleva lauseke > 1 . S_j :n komponenttien lukumäärän lisäyksen myötä syntyvä systeemin luotettavuuden kasvu on kussakin tapauksessa ($j=1, 2, 3, 4$) samantyyppinen ja on esitetty kaavamaisesti kuviossa 6.3.



Kuva 6.3. Systeemin luotettavuus osasysteemin S_j komponenttien lukumäärän funktiona

Kuvaa 6.3 tarkasteltaessa on muistettava, että siinä esitetty luotettavuuden kasvu on saavutettavissa vain tietyin taloudellisin pinoiksi (lisäkomponenttien hankinta-, käyttö- ja kunnossapitokustannukset jne.). Täs-

sä yhteydessä tarjoutuisikin nyt tilaisuus optimointiin komponenttien lukumäärän suhteen: toisaalta komponenttien lisäys aikaansaa luotettavuuden kasvun ja sitä kautta tuotannon tehostumisen, häiriöiden vähenemisen jne, toisaalta tämä aiheuttaa edellä mainitut lisäkustannukset. Suurimpana vaikeutena tämän tyyppisessä optimoinnissa on luotettavuuden kasvun kautta syntyvän hyödyn ja aiheutettujen kustannusten saattaminen yhteismitalliseksi ts. sopivan optimoitavan kohdefunktion löytäminen. Yllä esitetyn kaltaiset optimointikysymykset eivät kuitenkaan kuulu tämän tutkimuksen tavoitteisiin, joten niihin ei tätä laajemmalti puututa. Optimointikysymykset vaatisivat verraten yksityiskohtaisia oletuksia mm. kustannusfunktioiden ja luotettavuuden puutteen ja syntyvien tappioiden välisiä riippuvuuksia kuvaavien funktioiden luonteesta ja näin jouduttaisiin poikkeamaan tähän asti mm. jatkautumien suhteen noudatetusta verraten yleisestä linjasta.

6.4. Luotettavuus ja varmistusmenetelmä

Yhtälön (6.1) ja lemmän 6.2 tulosten perusteella nähdään suoraan, että komponenteiltaan, korjauspolitiikaltaan ja muilta relevanteilta tekijöiltään samantaisista systeemeistä passiivisesti rinnankytketyn osajärjestelmän S_1 omaava systeemi on luotettavampi kuin systeemi, jossa S_1 on aktiivisesti rinnankytketty. Voidaan siis todeta

Lause 6.4. Yhdenmutaisissa olosuhteissa on

$$(6.48) \quad P^{(3)} > P^{(1)}$$

$$(6.49) \quad P^{(4)} > P^{(2)}$$

Todennäköisyysvertailuja (6.48) ja (6.49) suoritetessa on jälleen huomattava ne reaalijärjestelmien ominaisuudet, jotka vaikuttavat eri rinnankytkentämuotojen konstruointiin. Passiivinen rinnankytkentä mm. edellyttää ylimääräistä ohjauksilaitetta (tai -henkilöä), joka komponentin vioittuessa kytkee sen tilalle toimivan komponentin. Aktiivisen ja passiivisen rinnankytkennän toteuttamis- ja kunnossapitokustannukset poikkeavat myös muilta osin toisistaan (esim. S_1 :n ennakko-huolto-ohjelman osalta). Lopullisia vertailuja tehtäessä kaikki tällöin tyyppiset näkökohdat on luonnollisesti pidettävä mielessä.

Lause 6.4 koski tiettyä, olosuhteiltaan täysin spesifioitua tilannetta. Tarkastelut voidaan kuitenkin ulottaa myös laajemmalle. Erityisesti voidaan tällöin tarkastella passiivisen rinnankytkennän tuomaa lisäystä luotettavuuteen (aktiiviseen kytkentään verrattuna) S_1 :n komponenttien lukumäärän funktiona. Merkitään

$$(6.50) \quad \Delta_H^{31} = P^{(3)} - P^{(1)}$$

$$(6.51) \quad \Delta_H^{42} = P^{(4)} - P^{(2)}$$

kun S_1 :ssä on M rinnakkaista komponenttia. En-

siksikin on yhtälöiden (6.1) - (6.5) perusteella

$$(6.52) \quad \Delta_H^{31} = \Delta_H^{42} = 0.$$

Yhtälöiden (6.48) ja (6.49) perusteella on

$$(6.53) \quad \begin{cases} \Delta_H^{31} > 0 \\ \Delta_H^{42} > 0 \end{cases} \quad \text{kun } M \geq 2.$$

Merkitä (6.47) huomioon ottaen saadaan vielä

$$(6.54) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \Delta_H^{31} = \hat{P}^{(3)} - \hat{P}^{(1)} = \frac{S^{(1)}(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}{\left\{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S^{(1)}(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})\right\} \left\{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i)\right\}}$$

$$(6.55) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \Delta_H^{42} = \hat{P}^{(4)} - \hat{P}^{(2)} = \frac{S^{(2)}(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}{\left\{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S^{(2)}(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})\right\} \left\{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i)\right\}}$$

Tulokset (6.52) - (6.55) yhdistäen voidaan lopuksi todeta, että S_1 :n komponenttien lukumäärän kasvaessa erot passiivisen ja aktiivisen rinnankytkennän luotettavuudessa aluksi kasvavat, kunnes ne vakiintuvat tietylle tasolle (tasolle (6.54) minimikorjauspolitiikan tapauksessa ja tasolle (6.55) täyskorjauspolitiikan tapauksessa ollessa). Mikäli erityisesti raja-arvot $S^{(1)}(\lambda)$ ja $S^{(2)}(\lambda)$ ovat $= 0$, häviävät erot kytkentämuotojen välillä riittävän suurilla M :n arvoilla (näin on laita mm. silloin, kun S_1 :n komponenttien vikataajuus on ratiolla d häiriöttömän käynnistajan jalautuma on eksponentiaalinen). Näissä tapauksissa on olemassa tietty äärellinen M :n arvo, jolla erot luotettavuudessa ovat suurimmillaan.

6.5. Luotettavuus ja korjauspolitiikka

Tässä kappaleessa tarkastellaan rinnakkain systeemejä, jotka poikkeavat toisistaan vain noudatettavan korjauspolitiikan osalta. Niinkuin intuitiivisestikin on selvää, johtaa täyskorjauspolitiikka suurempaan luotettavuuteen kuin vastaavissa olosuhteissa toteutettu minimikorjauspolitiikka. Formaalisesti tämä nähdään yhtälöstä (6.1) soveltaen siihen lemmän 6.2 tuloksia. Voidaan todeta

Lause 6.5. Yhdenmukaisissa olosuhteissa on

$$(6.56) \quad p^{(2)} > p^{(1)}$$

$$(6.57) \quad p^{(4)} > p^{(3)}$$

Täyskorjauspolitiikalla saavutettu suurempi luotettavuus minimikorjauspolitiikkaan verrattuna on luonnollisesti tulosta korjaustoimintaan sijoitetuista suuremmista panoksista. Näiden panoksien ja luotettavuuden kasvuun kautta saavutettavan hyödyn kestävästä suhteesta jää siten viime kädessä riippumaan korjauspolitiikkojen lopullinen edullisuus toisiinsa verrattuna.

Edellisen kappaleen 6.4 tapaan voidaan nytkin tarkastella korjauspolitiikan vaikutusta luotettavuuteen eri S_i :n komponenttien lukumäärillä. Merkittään (komponenttien lukumäärää M vastaavasti)

$$(6.58) \quad \Delta_H^{21} = p^{(2)} - p^{(1)}$$

$$(6.59) \quad \Delta_H^{43} = p^{(4)} - p^{(3)}$$

Yhtälöiden (6.1) - (6.5) perusteella on

$$(6.60) \quad \Delta_1^{21} = \Delta_1^{43} = 0$$

ja (epäyhtälöiden (6.48) - (6.49) perusteella

$$(6.61) \quad \begin{cases} \Delta_H^{21} > 0 \\ \Delta_H^{43} > 0 \end{cases} \quad \text{kun } M \geq 2$$

Raja-arvotuloksina saadaan vielä

$$(6.62) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \Delta_H^{21} = \hat{p}^{(2)} - \hat{p}^{(1)} = \frac{[S^{(1)}(\lambda) - S^{(2)}(\lambda)](\bar{B} + \bar{C})}{\left\{1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{F}_i) + S^{(1)}(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})\right\} \left\{1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{F}_i) + S^{(2)}(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})\right\}}$$

$$(6.63) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \Delta_H^{43} = \hat{p}^{(4)} - \hat{p}^{(3)} = 0.$$

Luotettavuuden kasvu siirryttäessä minimikorjauspolitiikasta täyskorjauspolitiikkaan on siis eri M :n arvoilla yhtälöiden (6.60) - (6.63) mukainen. Passiivisen rinnankytkennän tapauksessa (suure Δ_H^{43}) tilanne on täysin yksiselitteinen. Suureen Δ_H^{43} positiivisuudesta ykköslä suuremmilla M :n arvoilla ja sen häviöimisestä, kun $M=1$ tai kun $M \rightarrow \infty$, seuraa, että on olemassa tietty M :n arvo ($M \geq 2$), jolla erotus Δ_H^{43} on suurimmillaan, ts. jolla täyskorjauspolitiikan aikaansaama luotettavuuden absoluuttinen lisäys on maksimissaan. Aktiivisen rinnankytkennän tapauksessa (suure Δ_H^{21}) tilanne jää riippumaan raja-arvoista $S^{(1)}(\lambda)$ ja $S^{(2)}(\lambda)$, lausekkeiden (6.45) ja (6.46) hajaantuessa ($S^{(1)}(\lambda)$:n ja $S^{(2)}(\lambda)$:n hävitessä) tai $S^{(1)}(\lambda)$:n ja $S^{(2)}(\lambda)$:n ollessa muuten yhtä suuria toistuu yllä kuvattu tilanne: Δ_H^{21} :llä on maksimikohta äärellisellä M :n arvolla. Lausekkeiden $S^{(1)}(\lambda)$ ja $S^{(2)}(\lambda)$ ollessa erisuuria lähestyy Δ_H^{21} M :n kasvaessa asymptoottisesti arvoa (6.62) joko koko ajan kasvaen tai maksimikohdan omien (ainakin aluksi) tapahtuva kasvu on seurausta ehdoista (6.60) ja (6.61)). Pelkästään luotettavuutta kriteerinä pitäen on näin erällä edellytyksillä olemassa M :n arvo, jolla täyskorjauspolitiikan tuoma luotettavuuden kasvu on suurimmillaan.

7. YHTEENVETO TUTKIMUKSEN KESKEISISTÄ TULOKSISTA

Tutkimuksen alussa, luvussa 2, luodaan katsaus kirjallisuudessa esiintyvään, ongelman asetteluun ja myöhempien tarkastelujen kannalta keskeiseen matemaattisen luotettavuusteorian peruskäsitteistöön. Erityisesti paneudutaan käsitteeseen luotettavuus ja sen määrittelyyn. Luotettavuuden yleiseksi määritelmäksi valitaan matemaattisen täsmällinen systeemin tiloja kuvaavien stokastisten prosessien avaruudessa määritellyn funktionaalien odotusarvo. Tämän erikoistapauksena saadaan systeemin luotettavuudeksi hetkellä t todennäköisyys, että systeemi tuolla hetkellä on toimintakunnossa. Valitun todennäköisyyslausekkeen osoitetaan mielekkäällä tavalla kuvaavan systeemin toimintakykyä; erityisesti näin on tutkimuksessa tarkasteltavien stationäärisen vaiheen omaavien systeemin tapauksessa.

Peruskäsitteiden yhteydessä tarkastellaan vielä vikojen esiintymiseen liittyvien satunnaissuureiden kuvauksessa käytettäviä funktioita ja näiden välisiä yleisiä riippuvuuksia. Keskeiseksi funktioksi myöhempien tarkastelujen kannalta osoittautuu vikataajuusfunktio (tai odotusajan päättymisintensiteettifunktio tai korjauksen valmistamisintensiteettifunktio kyseessä olevasta satunnaissuureesta riippuen); jakoutumien identifiointi suoritetaan tutkimuksessa pääasiassa tämän funktion perusteella.

Luvun lopuksi esitellään tavallisimmat luotettavuusteoriassa esiintyvät jakoutumatyypit ja niille luonkenomaiset niin teoreettisesti johdetut kuin empiirisesti todetut erityispiirteet. Yksityisten jakoutumien kautta päädytään jaksossa 2.3.9 viimein yleiseen jakoutumaan. Tällä jakoutumalla suoritettavat tarkastelut osoitetaan huomattavan yleispäteviksi, ne kattavat erikoistapauksenaan mm. kaikki mainitut keskeiset jakoutumatyypit ja niiden yhdistelmät.

Luvussa 3 suoritetaan tutkimuksen varsinainen

rajaus ja täsmennys. Peruslähtökohdiana olleita kulshresthan esittämiä systeemimalleja on kehitetty useaan suuntaan. Tutkimuksen yleisyyttä rajoittavia lähtöoletuksia on ensinnäkin karsittu. Merkittävimpänä kohteena on tässä yhteydessä pidettävä osasysteemin S_1 (päämielenkiinnon omaavan systeemin osan) komponenttien vikataajuutta; tälle on sallittu yleinen aikariippuvuus entisen vakion sijasta (samalla häiriöttömän käyntiajan jakautumalle on sallittu mikä tahansa jatkuva jakautuma eksponentiaalijakoutuman asemesta). Edelleen malleihin on otettu mukaan uusia stokastisia aineksia. Komponentin normaalin toiminnan ja korjauksen kuluva ajan lisäksi on otettu huomioon korjauksen odotukseen ja valmisteluun kuluva aika. Tälle stokastiseksi oletetulle suureelle ei aseteta rajoituksia jakoutumatyyppiin suhteen.

Näillä kulshresthan alunperin esittämiin malleihin tehdyillä yleistyksillä voidaan todeta olevan merkitystä ainakin kolmella taholla. Ensiksikin sovellutuksia ajatellen nyt esitetyt yleisemmät mallit vastaavat entistä paremmin kuvattavia reaalisysteemejä. Samalla tarkastelun kohteena mahdollisten reaalisysteemien joukko laajenee. Toiseksi saaduissa tuloksissa nousee keskeiselle sijalle ns. stationäärinen vaihe, jonka merkitys esim. jakoutumien estimointikysymyksiä ajatellen on huomattava. Kolmantena merkittävänä alueena on perussysteemin neljän erikoistapauksen, systeemien (A, P_1) , (A, P_2) , (P, P_1) ja (P, P_2) , tarkastu yhdenmukaisten olettamusten vallitessa. Ainoastaan näin voidaan saada merkittäviä tuloksia mielenkiinnon kohteena olevien korjauspolitiikkojen ja komponenttien varmistusmenetelmien vaikutuksista systeemin luotettavuuteen.

Luvuissa 4 ja 5 suoritetaan mainittujen neljän korjauspolitiikkaitaan ja varmistusmenetelmältään spesifioidun systeemin yksityiskohtainen tarkastelu. Näissä luvuissa onkin nähtävä tutkimuksen keskeisimmät tulokset: tilatodennäköisyyksien ja näiden perusteella

170
systemin luotettavuuden lausekkeel on rakkaistu kulshresthan tapaan, nyt vain edellä kuvatuissa yleisemmissä puitteissa. Tarkasteluissa on noudatettu kulshresthan viitoittamia perustinjaja, mutta yleisyttö rajoittavien lähtöoletusten karsinta ja mallin laajennukset ovat paljolti muuttaneet eri käsittelyvaiheita, useissa yksityiskohtissa on jouduttu täysin uusien kysymysten eteen (vrt. esim. sivulla 46 esitetty systemin tilayhtälöiden luonteen ratkaiseva muuttuminen). Tarkoituksenmukaisella muuttujien ja apufunktioiden valinnalla ratkaisut on koitissa tapauksissa saatettu suljetussa muodossa loppuun asti.

Merkittävänä tuloksena on edelleen pidettävä osoitusta siitä, että systemi näissä yleisemmissä puitteissa saavuttaa stationäärisen vaiheen. Tämän vaiheen ratkaisuihin osoitetaan edelleen korjauksen ja odotusajan jakautumatyypin vaikutuksen häviävän, ratkaisuihin esiintyvät ainoastaan näiden suureiden odotusarvot. Ratkaisujen riippuvuus S_i :n yksityisen komponentin häiriöttömän toiminta-ajan jakautumatyypistä on sekä vain välillistä, integraalilausekkeen (4.84) kautta ilmevä. Tuloksella on sekä puhtaasti teoreettista mielenkiintoa että erityisesti sovellutuksia ajatellen tärkeä merkitys: muuttuvat esimerkiksi estimointiongelmat jakautumatyypin ja sen yksityisen jakautuman selvittämisestä pelkätään tunnustukua koskeviksi estimoinniksi.

Vielä on mainittava tässä tutkimuksessa käyttöön oletettu systemin tila-käsite. Tällä on erityistä merkitystä systemien yksityiskohtaisen kuvauksen yhteydessä. Systemin havainnollistaminen tilojensa ja näiden välisten siirtymismahdollisuuksien avulla muodostaa samalla vankan perustan systemin käyttäytymistä kuvaavien yhtälöiden laadinnassa.

Luvun 6 vertailutarkasteluihin ryhtyessä huomataan luvuissa 4 ja 5 käyttöön oletettujen merkintöjen tarkoituksenmukaisuus. Eri systemien luot-

171
tettavuuslausekkeet voidaan näin esittää yhdenmu-
kaisessa muodossa, josta ilmenee niiden riippuvuus
samoista systemin suureista ja jossa systemien
väliset erot on kätelytetty yhteen, kullekin systeemille ominaiseen lausekkeeseen $S_M(\lambda)$. Pääasiassa tätä lauseketta tarkastelemalla saadaan esiin useita tuloksia, jotka koskevat S_i :n komponenttien lukumäärän, noudatettavan korjauksipolitiikan sekä S_i :n komponentin varmistusmenetelmän vaikutuksia systemin luotettavuuteen.

Edellä esitetyssä tutkimuksessa on kokonaisvaltaista lähestymistapaa noudattaen pyritty valittamaan perusominaisuuksiltaan automaattisen, laajan ja runsaasti sisäisiä riippuvuuksuhteita sisältävän tuotanto- tms. laitesystemin luotettavuuteen liittyvää probleemkentää. Tarkastelut ovat olleet puhtaasti teoreettisia, jostin eräitä viittauksia sovellutusten suuntaan on tehty. Riittävän yleisessä muodossa ja täsmällisesti suoritettut teoreettiset tarkastelut luovat kuitenkin aina sen perustan, jolle menestyksellisten ja luottamusta herättävien sovellutusten on rakennuttava.

VIITATTU LÄHDEKIRJALLISUUS

Barlow, R.E., Proschan, F.: *Mathematical Theory of Reliability*, New York 1965

Forsström, M.-A.: Keskitettyyn luotettavuusparametrien valvontaan perustuva huolto-organisaatio elektronisessa järjestelmässä, Jnsinöörijärjestöjen koulutuskeskuksen julkaisu 19-66: Luotettavuus, Helsinki 1966

Gnedenko, B.V., Belyayev, Y.K., Solovyer, A.D.: *Mathematical Methods of Reliability Theory*, New York 1969

Jorgenson, D.W., McCall, J.J., Radner, R.: *Optimal Replacement Policy*, Amsterdam 1967

Keilson, J., Kooharian, A.: On Time Dependent Queuing Processes, *Annals of Mathematical Statistics* 31, 1960, ss. 104-112

Kulshrestha, D.K. (I): Analytical Study of a Stand-by Redundant Complex System with General Repair Time Distribution, *Opsearch* 13, 1966, ss. 139-150

Kulshrestha, D.K. (II): Reliability of a Parallel Redundant Complex System, *Operations Research* Vol. 16, No 1, 1967, ss. 28-35

Kulshrestha, D.K. (III): Operational Behaviour of a Multicomponent System having Stand-by Redundancy with Opportunistic Repairs, *Unternehmensforschung*, Band 12, Heft 3, 1968, ss. 159-172

Kulshrestha, D.K. (IV): Operational Behavior of a Complex System, *Unternehmensforschung*, Band 12, Heft 4, 1968, ss. 232-241

Kulshrestha, D.K. (V): Reliability of a Repairable Multicomponent System with Redundancy in Parallel, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-19, No 2, May 1970, ss. 50-52

Lindelöf, E. (I): *Johdatus korkeampaan analyysiin*, Porvoo 1961

Lindelöf, E. (II): *Differentiaali- ja integraalilaskenta ja sen sovellutukset 1*, Porvoo 1965

Lloyd, D.K., Lipow, M.: *Reliability: Management, Methods and Mathematics*, Englewood Cliffs 1962

Lokki, O.: Uusiutumisprosessi luotettavuuden käsittelyssä, Jnsinöörijärjestöjen koulutuskeskuksen julkaisu 19-66: Luotettavuus, Helsinki 1966

Pieruschka, E.: *Principles of Reliability*, Englewood Cliffs, 1963

Polovko, A.M.: *Fundamentals of Reliability Theory*, New York 1968

Prabhu, N.U.: *Stochastic Processes, Basic Theory and Its Applications*, New York 1965

Rau, J.G.: *Optimization and Probability in Systems Engineering*, New York 1970

Singpurwalla, N.D.: Statistical Fatigue Models: A Survey, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-20, No 3, August 1971, ss. 185-189

Spiegel, M.R.: (I) *Theory and Problems of Laplace Transforms*, New York 1965

Spiegel, M.R. (II): Theory and Problems of
Calculus of Finite Differences and Difference
Equations, New York 1971.

Turunen, O.: Elektronikkokomponenttien luotettavuus,
Insinöörijärjestöjen koulutustestien julkaisu 19-66:
Luotettavuus, Helsinki 1966

Zadeh, L.A., Desoer, C.A.: Linear System
Theory, the State Space Approach, New York/
San Francisco 1963

Zelen, M. (ed.): Statistical Theory of Reliability,
St. Paul, Minnesota, 1963

Venho, J.: Virtauskaaviomenetelmä luotettavuuden tutki-
misessa, Diplomityö, Helsingin Teknillinen Korkea-
koulu, Teknillisen fysiikan osasto, 1971 (julkaise-
maton)