

MAX MIN - TEORIA

Sisällysluettelo

	sivu
1. Johdanto	1
2. Gibbs'in lemma	3
3. Suunnattu derivaatta	7
4. Lagrangen kerroin - periaate	22
5. Esimerkkejä	27
Liite. FORTRAN - ohjelma esimerkkitehtävä 2:n ratkai- semiseksi	40
Kirjallisuusluettelo	46

Pro gradu - tutkielma

Ilkka Virtanen

1968

Päätösfunktiosta $F(\bar{x}, \bar{y})$ oletetaan, että se on ainakin jatkuva (usein oletetaan myös derivaattojen olemassaolo). Strategiat \bar{x} ja \bar{y} oletetaan n - ulotteisen Euklidisen avaruuden R^n reaaliarvoisiksi vektoreiksi. Useimmiten pelaajat joutuvat valitsemaan strategiansa tietystä rajoitetusta joukosta, sillä käytettävissä olevat miesvahvuudet, taloudelliset seikat ym. asettavat rajoituksia tehtävälle valinnalle.

Kun pelaaja P_1 , joka haluaa maksimoida päätösfunktion $F(\bar{x}, \bar{y})$ arvon, valitsee hänelle mahdollisista strategioista tietyn strategian \bar{x} , on hänen varauduttava siihen, että P_2 saa tietoonsa tämän valinnan ja toimii sen mukaan, ts. valitsee hänelle avoinna olevista strategioista sen strategian \bar{y} , jolla saavutetaan $\min F(\bar{x}, \bar{y})$. Tuloksena on P_1 :n valinnasta \bar{x} riippuva funktio

$$(1) \quad \varphi(\bar{x}) = \min_{\bar{y}} F(\bar{x}, \bar{y}).$$

Pelaajan P_1 on siis alussa valittava \bar{x} siten, että $\varphi(\bar{x})$ saavuttaa suurimman mahdollisen arvonsa. Hän siis valitsee sellaisen strategian \bar{x} , jolla

$$(2) \quad \max_{\bar{x}} \varphi(\bar{x}) = \max_{\bar{x}} \min_{\bar{y}} F(\bar{x}, \bar{y})$$

saavutetaan. Tehtävänä on siis etsiä yhtälön (2) oikean puolen ilmoittamaa funktion arvoa ja niitä strategioita \bar{x} ja \bar{y} , jotka tähän johtavat. Tästä tilanteesta on koko esitys saanut nimensä.

Jos funktio $F(\bar{x}, \bar{y})$ on luonteeltaan sellainen, että

$$(3) \quad \max_{\bar{x}} \min_{\bar{y}} F(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{\bar{y}} \max_{\bar{x}} F(\bar{x}, \bar{y}),$$

eli että pelaajien P_1 ja P_2 siirtojärjestys ei vaikuta lopputulokseen, on kysymyksessä tavallinen peliteoreettinen tehtävä, jolla on puhdasstrategia - ratkaisu. Jos kuitenkin tilanne on sellainen, että

$$(4) \quad \max_{\bar{x}} \min_{\bar{y}} F(\bar{x}, \bar{y}) < \min_{\bar{y}} \max_{\bar{x}} F(\bar{x}, \bar{y}),$$

1. Johdanto

Nyt kohteena olevassa työssä tarkastellaan seuraavanlaista käytännössä usein esille tulevaa tilannetta. On kaksi osapuolta, pelaajaa, joiden edut joutuvat tietyissä tilanteissa keskenään ristiriitaan. Pelaajat joutuvat tekemään kumpikin ratkaisun, siirron, ja tehtävänä on tutkia, millaisia ratkaisujen tulisi olla, jotta kumpikin osapuoli pääsisi mahdollisimman hyvään lopputulokseen.

Tässä työssä oletetaan tilanne erikoisesti seuraavanlaiseksi. On olemassa tietty kohde, johon liittyy pelaajien ratkaisuihin riippuva funktio, ns. päätösfunktio. Ensimmäinen pelaaja P_1 yrittää saada päätösfunktion arvon mahdollisimman suureksi, pelaaja P_2 taas mahdollisimman pieneksi. Oletetaan edelleen, että P_1 joutuu tekemään siirtonsa ensin ja että pelaajalla P_2 on ratkaisua tehdessään pelaajan P_1 siirto tiedossaan.

Käytetään päätösfunktiosta merkintää $F(\bar{x}, \bar{y})$, missä $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ovat pelaajien P_1 ja P_2 valitsemia menettelytapoja eli strategioita. Kummankin pelaajan strategia koostuu siis n :stä eri komponentista. Valitsemalla nämä eri komponentit sopivaan keskinäiseen suhteeseen pelaajat pyrkivät parhaaseen mahdolliseen tulokseen. Strategioiden komponentit voivat olla sotilaallisissa sovellutuksissa esim. eri asetyyppejä, kohteita puolustavien tai kohteeseen hyökkäävien joukkojen miesvahvuuksia; yrityksen tuotantoprosessissa ne voivat olla esim. valmistettavia tavaramääriä. Päätösfunktio voi edellä mainituissa tapauksissa kuvata kohteelle aiheutuvaa vahinkoa tai tuotantoprosessin tuottamaa hyötyä.

jolloin lopputulos riippuu ratkaisevasti pelaajien siirtojärjestyksestä, eivät tavallisen peliteorian avulla saadut ratkaisut päde. Nämä ratkaisut ovat sekastrategiaratkaisuja. Tällä tarkoitetaan sitä, että pelaajat soveltavat puhtaita strategioitaan tietyillä todennäköisyyksillä. Tällainen menettely ei nyt kuitenkaan tule kysymykseen, sillä P_1 tietää P_2 :n seuraavan, minkä valinnan hän tekee. Pelaajalla P_2 on siis valintaa tehdessään P_1 :n siirto \bar{x} tiedossaan ja hänen tarvitsee vain valita \bar{y} siten, että se minimoi funktion $F(\bar{x}, \bar{y})$. Seuraavissa pykälissä esitetään joukko lemmoja ja lauseita, joiden perusteella on monessa tapauksessa mahdollista ratkaista tyyppiä (4) oleva tehtävä.

2. Gibbs'in lemma

Ennen varsinaista max min - teoriaa esitetään eräitä usein sängen käyttökelpoisiksi osoittautuvia lemmoja. Näistä ensimmäinen käsittelee funktion maksimiarvon etsimistä. Se tunnetaan keksijänsä J. W. GIBBS'in mukaan Gibbs'in lemmä.

Lemma 1 (Gibbs'in lemma). Oletetaan, että funktiot $f_i(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ovat differentioituvia. Oletetaan edelleen, että funktio $\sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ saavuttaa suurimman arvonsa pisteessä $\bar{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, kun reunaehdot

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n x_i = X \text{ ja } x_i \geq 0 \text{ (} i = 1, \dots, n \text{)}$$

ovat voimassa. Tällöin on olemassa sellainen reaali-luku λ , että

$$(6) \quad \begin{cases} f_i'(x_i^0) = \lambda, \text{ jos } x_i^0 > 0, \\ f_i'(x_i^0) \leq \lambda, \text{ jos } x_i^0 = 0. \end{cases}$$

Todistus. Olkoon $x_i^0 > 0$. Olkoon edelleen j ($1 \leq j \leq n$) mielivaltainen indeksi kuitenkin siten, että $j \neq i$. Toteutakoon luku ε ehdon $0 \leq \varepsilon < x_i^0$. Merkitään

$$(7) \quad h(\varepsilon) = f_i(x_i^0 - \varepsilon) + f_j(x_j^0 + \varepsilon) + \sum_{k \neq i, j} f_k(x_k^0).$$

Selvästikin näin muutettu argumenttijoukko edelleen toteuttaa lemmän edellyttämät reunaehdot (5). Funktio $h(\varepsilon)$ on ε :n differentioituva funktio. Koska $h(\varepsilon)$ oletuksen mukaan saavuttaa suurimman arvonsa pisteessä $\varepsilon = 0$, on oltava $h'(0) \leq 0$. Yhtälöstä (7) saadaan derivoimalla ja sijoittamalla $\varepsilon = 0$:

$$(8) \quad h'(0) = -f_i'(x_i^0) + f_j'(x_j^0).$$

Koska $h'(0) \leq 0$, on voimassa

$$(9) \quad f_j'(x_j^0) \leq f_i'(x_i^0).$$

Tulos (9) saatiin oletuksesta $x_i^0 > 0$ lähtien. Jos myös $x_j^0 > 0$, saadaan samalla tavalla

$$(10) \quad f_i'(x_i^0) \leq f_j'(x_j^0).$$

Kun (9) ja (10) yhdistetään, saadaan

$$(11) \quad f_i'(x_i^0) = f_j'(x_j^0).$$

Yhtälön (11) perusteella voidaan nyt päätellä, että kaikilla niillä derivaatan arvoilla $f_i'(x_i^0)$, joita vastaavat argumentin arvot $x_i^0 > 0$, on yhteinen arvo, jota voidaan merkitä luvulla λ . Ehdosta (9) taas nähdään, että $f_j'(x_j^0) \leq \lambda$, jos $x_j^0 = 0$. Lemma 1 on näin todistettu oikeaksi.

Seuraavat kaksi lemmaa koskevat sellaisia valintatehtäviä, joilla päätösfunktion $F(\bar{x}, \bar{y})$ luonteesta johtuen on puhdasstrategiaratkaisu, ts. on olemassa sellaiset optimi-strategiat \bar{x}^0 ja \bar{y}^0 , että

$$(12) \begin{cases} F(\bar{x}^0, \bar{y}) \geq F(\bar{x}^0, \bar{y}^0) \text{ kaikilla } P_2\text{:n strategioilla } \bar{y}, \\ F(\bar{x}^0, \bar{y}^0) \geq F(\bar{x}, \bar{y}^0) \text{ kaikilla } P_1\text{:n strategioilla } \bar{x}. \end{cases}$$

Ensinnä esitettävän lemmän 2 on todistanut S. KAKUTANI [4], teoreemat 2 ja 3 ss. 458 - 459).

Lemma 2. Oletetaan, että funktio $F(\bar{x}, \bar{y})$ on jatkuva avaruudessa $K \times L$, missä K ja L ovat kompakteja ja konvekseja. Merkitään symbolilla $X(\bar{y})$ niiden \bar{x} - pisteiden joukkoa, joissa funktio $F(\bar{x}, \bar{y})$ saavuttaa suurimman arvonsa, kun piste \bar{y} on kiinnitetty. Vastaavasti $Y(\bar{x})$ on niiden pisteiden \bar{y} muodostama joukko, joissa $F(\bar{x}, \bar{y})$ saavuttaa pienimmän arvonsa, kun \bar{x} :llä on jokin kiinteä arvo. Jos nyt $X(\bar{y})$ on konvekksi kaikilla kysymykseen tulevilla \bar{y} - arvoilla ja $Y(\bar{x})$ konvekksi kaikilla \bar{x} - arvoilla, on tehtävällä muotoa (12) oleva puhdasstrategiaratkaisu.

Seuraavana esitettävä lemma 3 on erikoistapaus yllä olevasta lemmasta 2.

Lemma 3. Jos funktio $F(\bar{x}, \bar{y})$ on kupera (engl. concave) muuttujan \bar{x} suhteen ja konvekksi muuttujan \bar{y} suhteen, on valintatehtävällä, jonka päätösfunktiona on $F(\bar{x}, \bar{y})$, muotoa (12) oleva puhdasstrategiaratkaisu.

Todistus. Lemman 2 perusteella on riittävää osoittaa, että joukot $X(\bar{y})$ ja $Y(\bar{x})$ ovat konvekseja. Osoitetaan ensin, että $X(\bar{y})$ on konvekksi. Olkoon muuttujalla \bar{y} mielivaltainen kiinteä arvo ja olkoot \bar{x}^1 ja \bar{x}^2 mielivaltaisia joukon $X(\bar{y})$ alkioita. Merkitään $\bar{x}^r = r \cdot \bar{x}^1 + (1-r) \cdot \bar{x}^2$, missä $0 \leq r \leq 1$. Nyt on

$$(13) \quad F(\bar{x}^r, \bar{y}) = F(r \cdot \bar{x}^1 + (1-r) \cdot \bar{x}^2, \bar{y}).$$

Koska $F(\bar{x}, \bar{y})$ on kupera \bar{x} :n suhteen, on

$$(14) \quad F(r \cdot \bar{x}^1 + (1-r) \cdot \bar{x}^2, \bar{y}) \geq r \cdot F(\bar{x}^1, \bar{y}) + (1-r) \cdot F(\bar{x}^2, \bar{y}).$$

Merkitään $g(\bar{y}) = \max_{\bar{x}} F(\bar{x}, \bar{y})$. Koska pisteet \bar{x}^1 ja \bar{x}^2 olivat joukon $X(\bar{y})$ alkioita, on $F(\bar{x}^1, \bar{y}) = F(\bar{x}^2, \bar{y}) = g(\bar{y})$. Kun otetaan huomioon tämä tulos sekä kaavat (13) ja (14), saadaan

$$(15) \quad F(\bar{x}^r, \bar{y}) \geq r \cdot g(\bar{y}) + (1-r) \cdot g(\bar{y}) = g(\bar{y}).$$

Koska $g(\bar{y})$ oli $F(\bar{x}, \bar{y})$:n maksimiarvo, ei (15):ssä voi tulla erisuuruusmerkki kysymykseen, joten on oltava

$$(16) \quad F(\bar{x}^r, \bar{y}) = g(\bar{y}) = \max_{\bar{x}} F(\bar{x}, \bar{y}).$$

Näin ollen myös piste \bar{x}^r kuuluu joukkoon $X(\bar{y})$. Näin on joukon $X(\bar{y})$ konveksisuus todistettu.

Joukon $Y(\bar{x})$ konveksisuus osoitetaan hyvin samantapaisesti. Olkoon \bar{x} :llä mielivaltainen kiinteä arvo ja olkoot \bar{y}^1 ja \bar{y}^2 mielivaltaisia $Y(\bar{x})$:n alkioita. Merkitään $\bar{y}^s = s \cdot \bar{y}^1 + (1-s) \cdot \bar{y}^2$, missä $0 \leq s \leq 1$. Merkitään edelleen $h(\bar{x}) = \min_{\bar{y}} F(\bar{x}, \bar{y})$. Koska $F(\bar{x}, \bar{y})$ on konvekksi \bar{y} :n suhteen, on

$$(17) \quad \begin{cases} F(\bar{x}, \bar{y}^s) = F(\bar{x}, s \cdot \bar{y}^1 + (1-s) \cdot \bar{y}^2) \\ \leq s \cdot F(\bar{x}, \bar{y}^1) + (1-s) \cdot F(\bar{x}, \bar{y}^2) \\ = s \cdot h(\bar{x}) + (1-s) \cdot h(\bar{x}) = h(\bar{x}). \end{cases}$$

Funktion $h(\bar{x})$ määritelmän nojalla ei epäyhtälö voi olla voimassa, joten

$$(18) \quad F(\bar{x}, \bar{y}^s) = h(\bar{x}) = \min_{\bar{y}} F(\bar{x}, \bar{y}).$$

Näin on myös joukon $Y(\bar{x})$ konveksisuus todistettu. Samalla on lemma 3 kokonaisuudessaan osoitettu oikeaksi.

3. Suunnattu derivaatta

Tässä pykälässä tarkastellaan muuttujien \bar{x} ja \bar{y} funktiota $F(\bar{x}, \bar{y})$. Oletetaan, että \bar{x} on Euklidisen avaruuden R^n piste, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ja että $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ on avaruuden R^n suljetun ja rajoitetun osajoukon \mathcal{Y} piste. Funktion $F(\bar{x}, \bar{y})$ oletetaan olevan jatkuvan kummankin muuttujan \bar{x} ja \bar{y} suhteen. Edelleen oletetaan, että osittaisderivaatat

$$(19) \quad F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial}{\partial x_i} F(\bar{x}, \bar{y}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ovat jatkuvina olemassa.

Max min - tehtävien tarkasteluissa on funktiolla

$$(20) \quad \varphi(\bar{x}) = \min_{\bar{y} \in \mathcal{Y}} F(\bar{x}, \bar{y})$$

hyvin keskeinen asema. Osoittautuu usein, vaikka $F(\bar{x}, \bar{y})$ olisi hyvinkin säännöllinen funktio, että $\varphi(\bar{x})$ ei ole differentioituva. Tarkastellaan esimerkiksi funktiota

$$(21) \quad F(\bar{x}, \bar{y}) = F(x, y) = y \sin x,$$

missä y on rajoitettu välille $-1 \leq y \leq +1$, ts. joukon \mathcal{Y} muodostaa suljettu väli $[-1, 1]$. Nyt on selvästikin $\varphi(x) = -|\sin x|$. Huomataan, että $\varphi(x)$ ei ole differentioituva pisteissä $n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Sillä on kuitenkin vasemman- ja oikeanpuoleiset derivaatat näissä pisteissä. Seuraavassa osoitetaan, että tällainen suunnattu derivaatta on yleisestikin olemassa, kunhan funktio $F(\bar{x}, \bar{y})$ vain toteuttaa edellä mainitut jatkuvuus- ja derivoituvuusehdot.

Jotta funktio $\varphi(\bar{x})$ saavuttaisi suurimman arvonsa tietyssä pisteessä \bar{x}^0 , on ilmeisestikin välttämätöntä, että kaikilla \bar{x} :n arvoilla on voimassa ehto

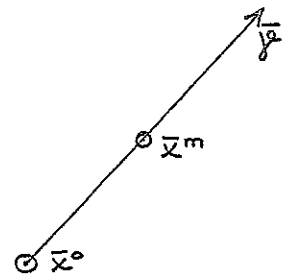
$$(22) \quad \varphi(\bar{x}) \leq \varphi(\bar{x}^0).$$

Niin muodoin erotusosamäärien

$$(23) \quad \frac{\varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}^0)}{|\bar{x} - \bar{x}^0|},$$

kun $\bar{x} \rightarrow \bar{x}^0$ mielivaltaisesta suunnasta, täytyy olla ei-positiivisia. Tarkastellaankin seuraavaksi, mikä yhteys näiden osamäärien ja alkuperäisen funktion $F(\bar{x}, \bar{y})$ välillä vallitsee.

Olkoon $\{\bar{x}^m\}$ pistejono, jossa $\bar{x}^m \rightarrow \bar{x}^0$ suunnasta \bar{y} , kun



Kuva 1.

$m \rightarrow \infty$. Suunnalla \bar{y} tarkoitetaan yksikkövektoria, joka lähtee pisteestä \bar{x}^0 ja jonka suuntakosinit ovat $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$, ts. vektoria $(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$. Komponentit toteuttavat siis ehdon $\sum_{i=1}^n y_i^0{}^2 = 1$. Jos $\bar{x}^m \rightarrow \bar{x}^0$ suunnasta \bar{y} , niin tällöin on kaikilla i :n ($i = 1, 2, \dots, n$) ja m :n arvoilla voimassa

$$(24) \quad \frac{x_i^m - x_i^0}{d^m} = y_i^0,$$

missä d^m on pisteiden \bar{x}^m ja \bar{x}^0 välinen n -dimensionaalinen etäisyys. Tämä etäisyys d^m on

$$(25) \quad d^m = |\bar{x}^m - \bar{x}^0| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^m - x_i^0)^2}.$$

Olkoon $Y(\bar{x})$ niiden pisteiden $\bar{y} \in \mathcal{Y}$ joukko, joissa $F(\bar{x}, \bar{y})$ kiinteällä \bar{x} :n arvolla saavuttaa pienimmän arvonsa. Ensimmäkin on todettava, että joukko \mathcal{Y} ei ole tyhjä. Näin on, koska oletuksen mukaan funktio $F(\bar{x}, \bar{y})$ on jatkuva sekä joukko \mathcal{Y} on suljettu ja rajoitettu, ja niin muodoin $F(\bar{x}, \bar{y})$:llä on joukossa \mathcal{Y} tietty pienin arvo.

Ryhdytään nyt tarkastelemaan erotusosamäärää

$$(26) \quad \frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{|\bar{x}^m - \bar{x}^0|} = \frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m}.$$

Oletetaan, että $\bar{x}^m \rightarrow \bar{x}^0$, kun $m \rightarrow \infty$, ja että $\bar{y}^0 \in Y(\bar{x}^0)$ ja $\bar{y}^m \in Y(\bar{x}^m)$ ($m \geq 1$). Yhtälö (26) voidaan näin kirjoittaa muotoon

$$(27) \left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} &= \frac{F(\bar{x}^m, \bar{y}^m) - F(\bar{x}^0, \bar{y}^0)}{d^m} \\ &= \frac{F(\bar{x}^m, \bar{y}^m) - F(\bar{x}^m, \bar{y}^0)}{d^m} + \frac{F(\bar{x}^m, \bar{y}^0) - F(\bar{x}^0, \bar{y}^0)}{d^m} \end{aligned} \right.$$

Koska $\bar{y}^m \in Y(\bar{x}^m)$, on lauseke $F(\bar{x}^m, \bar{y}^m) - F(\bar{x}^m, \bar{y}^0)$ ei-positiivinen. Saadaan siis

$$(28) \quad \frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \leq \frac{F(\bar{x}^m, \bar{y}^0) - F(\bar{x}^0, \bar{y}^0)}{d^m}.$$

Kaavan (28) oikeaan puoleen sovelletaan nyt n :n muuttujan funktion väliarvolauseetta. Sen mukaan on

$$(29) \quad \frac{F(\bar{x}^m, \bar{y}^0) - F(\bar{x}^0, \bar{y}^0)}{d^m} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^m - x_i^0}{d^m} F_{x_i}(\bar{x}^m(\theta), \bar{y}^0),$$

missä $\bar{x}^m(\theta) = (1-\theta)\bar{x}^0 + \theta\bar{x}^m$. Luvulla θ on jokin (m :stä riippuva) arvo väliltä $0 < \theta < 1$. Havainnollisesti $\bar{x}^m(\theta)$ on jokin pisteitä \bar{x}^m ja \bar{x}^0 yhdistävän janan piste. Kun yhdistetään tulokset (24), (28) ja (29), saadaan

$$(30) \quad \frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^m(\theta), \bar{y}^0).$$

Kuten jo edellä todettiin, $\bar{x}^m(\theta)$ on pisteitä \bar{x}^m ja \bar{x}^0 yhdistävällä janalla, joten $\bar{x}^m(\theta) \rightarrow \bar{x}^0$, kun $m \rightarrow \infty$. Koska edelleen $F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y})$ on oletuksen mukaan jatkuva, on voimassa

$$(31) \quad F_{x_i}(\bar{x}^m(\theta), \bar{y}^0) \rightarrow F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^0), \text{ kun } m \rightarrow \infty.$$

Kaavan (30) oikea puoli lähenee näin ollen raja-arvoa

$$(32) \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^0).$$

Vasemman puolen osamäärillä on tämä raja-arvo (32) ylärajan janaan kaikilla m :n arvoilla. Siten on

$$(33) \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \right] \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^0).$$

$$(38) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \right] = \lim_{\bar{x}^m \rightarrow \bar{x}^0} \inf \left[\frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \right].$$

Olkoon $\bar{y}^m \in Y(\bar{x}^m)$ alkio. Valitaan nyt sellainen jonon $\{\bar{x}^m\}$ alijono $\{\bar{x}^{m'}\}$, että alkio \bar{y}^m konvergoivat kohti tiettyä raja-arvoa, jota merkitään \bar{y}^0 . Lemman 4 nojalla $\bar{y}^0 \in Y(\bar{x}^0)$, ts. $F(\bar{x}^0, \bar{y}^0)$ saavuttaa pienimmän arvonsa pisteessä \bar{y}^0 . Näin saadaan

$$(39) \quad \begin{aligned} \frac{\varphi(\bar{x}^{m'}) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^{m'}} &= \frac{F(\bar{x}^{m'}, \bar{y}^{m'}) - F(\bar{x}^0, \bar{y}^0)}{d^{m'}} \\ &= \frac{F(\bar{x}^{m'}, \bar{y}^{m'}) - F(\bar{x}^0, \bar{y}^{m'})}{d^{m'}} + \frac{F(\bar{x}^0, \bar{y}^{m'}) - F(\bar{x}^0, \bar{y}^0)}{d^{m'}} \\ &\geq \frac{F(\bar{x}^{m'}, \bar{y}^{m'}) - F(\bar{x}^0, \bar{y}^{m'})}{d^{m'}} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^{m'}(\omega), \bar{y}^{m'}),$$

missä $\bar{x}^{m'}(\omega) = (1-\omega)\bar{x}^0 + \omega\bar{x}^{m'}$. Luvulla ω on jokin (m' :stä riippuva) arvo väliltä $0 < \omega < 1$. Viimeinen yhtälö (39):ssä saadaan väliarvolauseeseen perusteella samoin kuin (29):ssä. Pisteellä $\bar{x}^{m'}(\omega)$ on vastaava merkitys kuin $\bar{x}^m(\theta)$:lla yhtälössä (29), ts. se sijaitsee pisteitä \bar{x}^0 ja $\bar{x}^{m'}$ yhdistävällä janalla. Siis $\bar{x}^{m'}(\omega) \rightarrow \bar{x}^0$, kun $m' \rightarrow \infty$, joten rajalle siirryttäessä saadaan

$$(40) \quad \lim_{m' \rightarrow \infty} \left[\frac{\varphi(\bar{x}^{m'}) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^{m'}} \right] \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^0).$$

Kun otetaan huomioon, että $\{\bar{x}^{m'}\}$ on jonon $\{\bar{x}^m\}$ alijono, saadaan (38):n ja (40):n perusteella viimein

$$(41) \quad \lim_{\bar{x}^m \rightarrow \bar{x}^0} \inf \left[\frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \right] \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^0).$$

Yllä olevassa kaavassa alkio $\bar{y}^0 \in Y(\bar{x}^0)$ on niiden pisteiden $\bar{y}^m \in Y(\bar{x}^m)$ raja-arvo, jotka saadaan, kun $\bar{x}^m \rightarrow \bar{x}^0$ suunnasta \bar{y} . Yhdistetään tulokset (34) ja (41), jolloin voidaan todeta, että

$$\begin{aligned}
 & \limsup_{\bar{x}^m \rightarrow \bar{x}^0} \left[\frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \right] \\
 (42) \quad & = \liminf_{\bar{x}^m \rightarrow \bar{x}^0} \left[\frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \right] \\
 & = \lim_{\bar{x}^m \rightarrow \bar{x}^0} \left[\frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \right] \\
 & = \min_{\bar{y} \in Y(\bar{x}^0)} \sum_{i=1}^n \gamma_i^m F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^i).
 \end{aligned}$$

Näin on saatettu loppuun seuraavan lauseen, max min - teorian eräänlaisen peruslauseen, todistus:

Lause 1. Olkoon $\bar{y} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ jokin suunta. Silloin funktion $\varphi(\bar{x})$ suuntaan \bar{y} laskettu suunnattu derivaatta $D_{\bar{y}} \varphi(\bar{x})$ on olemassa jokaisessa pisteessä \bar{x} ja sen arvon ilmoittaa lauseke

$$(43) \quad D_{\bar{y}} \varphi(\bar{x}) = \min_{\bar{y} \in Y(\bar{x})} \sum_{i=1}^n \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y}),$$

missä $Y(\bar{x})$ merkitsee niiden pisteiden $\bar{y} \in \mathcal{Y}$ muodostamaa joukkoa, joissa funktio $F(\bar{x}, \bar{y})$ saavuttaa pienimmän arvonsa. Olkoon $\{\bar{x}^m\}$ mielivaltainen pistejono, joka lähestyy pistettä \bar{x} suunnasta \bar{y} (siten, että $\bar{x}^m \neq \bar{x}$), ja olkoon \bar{y}^m joukon $Y(\bar{x}^m)$ alkio. Silloin on olemassa jonon $\{m\}$ alijono $\{m'\}$ siten, että jono $\{\bar{y}^{m'}\}$ konvergoi kohti pistettä $\bar{y}^i \in Y(\bar{x})$, missä pisteessä saavutetaan derivaatan $D_{\bar{y}} \varphi(\bar{x})$ lausekkeessa (43) esiintyvä minimiarvo.

Huomautus. Lausessa 1 pistejono $\{\bar{x}^m\}$ läheni pistettä \bar{x}^0 suunnasta \bar{y} , ts. pitkin tiettyä suoraa. Tulosta voidaan nyt hieman yleistää. Olkoon C jokin pisteestä \bar{x}^0 lähtevä säännöllinen käyrän kaari. Olkoon $\{\bar{x}^m\}$ sellainen kaarelta C valittu pistejono, että $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{x}^m = \bar{x}^0$ ja $\bar{x}^m \neq \bar{x}^0$ ($m = 1, 2, \dots$). Merkitään

$$(44) \quad \gamma_i^m = \frac{x_i^m - x_i^0}{d^m},$$

missä d^m on pisteiden \bar{x}^m ja \bar{x}^0 välinen etäisyys. Mikäli jokin edellä kuvatun kaltainen kaaren C pistejono $\{\bar{x}^m\}$ toteuttaa ehdon

$$(45) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_i^m = \gamma_i,$$

sanotaan kaaren C lähtevän pisteestä \bar{x}^0 suuntaan \bar{y} . Lause 1 on nyt voimassa, vaikka siinä esiintyvä suunta \bar{y} korvataan edellä esitetyllä, kaavojen (44) ja (45) mukaisella yleistetyllä suunnan käsitteellä.

Todistus. Todistus noudattaa melkein täysin lauseen 1 todistuksessa käytettyjä menetelmiä. Eroja on havaittavissa vain muutamissa kohdissa. Yhtälön (30) sijaan saadaan

$$(30)' \quad \frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i^m F_{x_i}(\bar{x}^m(\theta'), \bar{y}^0).$$

Koska $\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_i^m = \gamma_i$, saadaan samoin kuin lauseen 1 todistuksessa

$$(34)' \quad \limsup_{\bar{x}^m \rightarrow \bar{x}^0} \left[\frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \right] \leq \min_{\bar{y} \in Y(\bar{x}^0)} \sum_{i=1}^n \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}),$$

missä lähestymisen $\bar{x}^m \rightarrow \bar{x}^0$ on tapahduttava pitkin kaarta C . Samoin saadaan myös tulos

$$(41)' \quad \liminf_{\bar{x}^m \rightarrow \bar{x}^0} \left[\frac{\varphi(\bar{x}^m) - \varphi(\bar{x}^0)}{d^m} \right] \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^i).$$

Kaavoista (34)' ja (41)' seuraa väite.

Voidaan havaita, että lause 1 on klassillisen matemaatiikan erään tunnetun kaavan yleistys. Olkoon funktio $f(x, y)$ kaikkine toisen kertaluvun osittaisderivaattoineen jatkuva yksikköneliössä $N = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. Oletetaan, että $f_{yy}(x, y) > 0$ kaikkialla neliössä N . Oletetaan edelleen, että funktio $f(x, y)$ saavuttaa kullakin x :n arvolla minimiarvonsa jossakin välin $-1 \leq y \leq 1$ sisäpisteessä. Tällä y :n arvolla on $f_y(x, y) = 0$ ja koska $f_{yy}(x, y) > 0$, on mainittu y yksikäsitteisesti määrätty. Ratkaise-

mattomien funktioiden teorian erään lauseen perusteella ([2], s. 138) on mahdollista ratkaista ko. minimin antava y :n arvo x :n funktiona. Saadaan funktio $y = y(x)$, joka on jatkuvasti derivoituva. Näin ollen on

$$(46) \quad \varphi(x) = \min_{-1 \leq y \leq 1} f(x, y) = f(x, y(x)).$$

Edellä olevan perusteella myös $\varphi(x)$ on jatkuvasti derivoituva. Sen derivaataksi saadaan

$$(47) \quad \varphi'(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) y'(x) = f_x(x, y(x)),$$

koska $f_y(x, y(x)) = 0$. On helppo huomata, että (47) on erikoistapaus kaavasta (43).

Mikäli funktio $F(\bar{x}, \bar{y})$ on luonteeltaan sellainen, että kutakin pistettä \bar{x} kohti on olemassa vain yksi $\bar{y} \in Y(\bar{x})$, saa yhtälö (43) yksinkertaisemman muodon

$$(48) \quad D_{\bar{y}} \varphi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n y_i^e F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Erikoisesti, jos merkitään symbolilla $D_{i+} \varphi(\bar{x})$ funktion $\varphi(\bar{x})$ positiivisen x_i - akselin suuntaan laskettua derivaattaa ja symbolilla $D_{i-} \varphi(\bar{x})$ vastaavaa negatiiviseen suuntaan laskettua derivaattaa, seuraa (48):sta

$$(49) \quad D_{i+} \varphi(\bar{x}) = F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$(50) \quad D_{i-} \varphi(\bar{x}) = - F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Yhtälö (49) ilmoittaa nyt funktion $\varphi(\bar{x})$ muuttujan x_i suhteen lasketun oikeanpuoleisen osittaisderivaatan arvon ja (50) $\varphi(\bar{x})$:n muuttujan x_i suhteen lasketun vasemmanpuoleisen osittaisderivaatan vastaluvun. Funktion $\varphi(\bar{x})$ x_i :n suhteen lasketut vasemman- ja oikeanpuoleiset osittaisderivaatat ovat siis olemassa ja molemmat arvoltaan $F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y})$. Tästä seuraa, että $\varphi(\bar{x})$:n muuttujan x_i suhteen laskettu tavallinen osittaisderivaatta $(\partial/\partial x_i) \varphi(\bar{x})$ on olemassa ja sen ilmoittaa lauseke $F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y})$. Merkintää $(\partial/\partial x_i) \varphi(\bar{x}) = \varphi_{x_i}(\bar{x})$ käyttäen voidaan (48) esittää muodossa

$$(51) \quad D_{\bar{y}} \varphi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n y_i^e \varphi_{x_i}(\bar{x}).$$

Suunnatun derivaatan laskeminen on näin palautettu akselien suuntaisten derivaattojen määräämiseksi.

Mikäli ratkaisu \bar{y} on yksikäsitteinen kaikkialla eräässä \bar{x} :n ympäristössä, on funktiolla $\varphi(\bar{x})$ edellä esitetyn nojalla kaikki ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat tässä pisteen \bar{x} ympäristössä. Funktio $\varphi(\bar{x})$ on näin ollen jatkuva tässä samassa ympäristössä. Osoitetaan seuraavaksi, että tällainen yksikäsitteinen ratkaisu $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$ on \bar{x} :n jatkuva funktio. Olkoot \bar{x}^1 ja \bar{x}^2 kaksi mainitun ympäristön pistettä ja \bar{y}^1 ja \bar{y}^2 näitä vastaavat \bar{y} - pisteet, ts.

$$(52) \quad \min_{\bar{y} \in \mathcal{Y}} F(\bar{x}^1, \bar{y}) = F(\bar{x}^1, \bar{y}^1) = \varphi(\bar{x}^1),$$

$$(53) \quad \min_{\bar{y} \in \mathcal{Y}} F(\bar{x}^2, \bar{y}) = F(\bar{x}^2, \bar{y}^2) = \varphi(\bar{x}^2).$$

Koska $\varphi(\bar{x})$ on jatkuva, on

$$(54) \quad |\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^2)| < \epsilon/2,$$

kun $|\bar{x}^1 - \bar{x}^2| \leq \delta_{\epsilon}^I$. Samoin funktion $F(\bar{x}, \bar{y})$ jatkuvuudesta seuraa, että

$$(55) \quad |F(\bar{x}^1, \bar{y}) - F(\bar{x}^2, \bar{y})| < \epsilon/2,$$

kun $|\bar{x}^1 - \bar{x}^2| \leq \delta_{\epsilon}^{II}$ ja $\bar{y} \in \mathcal{Y}$. Olkoot \bar{x}^1 ja \bar{x}^2 valitut nyt siten, että

$$(56) \quad |\bar{x}^1 - \bar{x}^2| \leq \delta_{\epsilon} = \min(\delta_{\epsilon}^I, \delta_{\epsilon}^{II}).$$

Tällöin on

$$(57) \quad \begin{aligned} |\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^2)| &= |F(\bar{x}^1, \bar{y}^1) - F(\bar{x}^2, \bar{y}^2)| \\ &= |F(\bar{x}^1, \bar{y}^1) - F(\bar{x}^1, \bar{y}^2) + F(\bar{x}^1, \bar{y}^2) - F(\bar{x}^2, \bar{y}^2)| \\ &\leq |F(\bar{x}^1, \bar{y}^1) - F(\bar{x}^1, \bar{y}^2)| + |F(\bar{x}^1, \bar{y}^2) - F(\bar{x}^2, \bar{y}^2)|. \end{aligned}$$

Tästä edelleen

$$(58) \quad \begin{aligned} |F(\bar{x}^1, \bar{y}^1) - F(\bar{x}^1, \bar{y}^2)| &\leq |\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^2)| + \\ |F(\bar{x}^1, \bar{y}^2) - F(\bar{x}^2, \bar{y}^2)| &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Koska ε on mielivaltaisen pieni luku ja $F(\bar{x}^1, \bar{y})$ saavuttaa minimiarvonsa vain pisteessä \bar{y}^1 , voi (58) olla voimassa vain, kun $|\bar{y}^1 - \bar{y}^2| < \rho_\varepsilon$. Siis siitä, että $|\bar{x}^1 - \bar{x}^2| \leq \sigma_\varepsilon$, seuraa, että $|\bar{y}^1 - \bar{y}^2| = |\bar{y}(\bar{x}^1) - \bar{y}(\bar{x}^2)| < \rho_\varepsilon$. Funktio $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$ on näin ollen jatkuva.

Edellä olevia merkintöjä käyttäen on

$$(59) \quad \varphi_i(\bar{x}) = F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x})).$$

Koska \bar{y} ja F_{x_i} ovat jatkuvia \bar{x} :n funktioita, on myös φ_i jatkuva. Kun \bar{x}_1 kootaan edellä esitetyt tulokset yhteen, voidaan kirjoittaa seuraava lause:

Lause 2. Oletetaan, että jotakin pistettä \bar{x} vastaavan minimoivien pisteiden joukon $Y(\bar{x})$ muodostaa vain yksi piste $\bar{y}(\bar{x})$. Silloin funktion $\varphi(\bar{x})$ osittaisderivaatat $(\partial/\partial x_i)\varphi(\bar{x}) = \varphi_i(\bar{x})$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ovat olemassa tässä pisteessä \bar{x} ja suunnatun derivaatan $D_y\varphi(\bar{x})$ lauseke saadaan klassillisen matematiikan "yhdistämissäännöstä" (51). Jos $\bar{y}(\bar{x})$ on yksikäsitteinen kaikkialla tletyssä \bar{x} :n ympäristössä, ovat funktio $\varphi(\bar{x})$ ja sen ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat $\varphi_i(\bar{x})$ jatkuvia tässä ympäristössä.

Lauseen 2 oletukset eivät kuitenkaan ole mitenkään yleisesti voimassa, kuten tämän pykälän alussa esitetty esimerkki (21) osoitti. On siis todettava seuraava tosiasia: suunnatun derivaatan laskemista ei yleisesti voida palauttaa koordinaattiakselien suuntaisiksi derivoimisiksi. Tämä onkin ratkaisevin ero klassillisen matematiikan ja max min -teorian välillä. Kun edellisessä riittää R^n :n säännöllisiä funktioita tutkittaessa n :n osittaisderivaatan laskeminen, on jälkimmäisessä otettava huomioon äärettömän moneen suun-

taan lasketut derivaatat. Seuraavassa esitettävät lauseet yksinkertaistavat kuitenkin tätä tilannetta.

Ensimmäinen lause on osittainen vastine klassillisen matematiikan yhdistämissäännölle. Se sisältää ns. superadditiivisuusehdon.

Lause 3. Olkoot $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ ja $\bar{\gamma}$ suuntia sekä a ja b positiivisia reaalitylukuja. Mikäli suunnat toteuttavat ehdon $\bar{\gamma} = a\bar{\alpha} + b\bar{\beta}$, on

$$(60) \quad D_{\bar{\gamma}}\varphi(\bar{x}) \geq a D_{\bar{\alpha}}\varphi(\bar{x}) + b D_{\bar{\beta}}\varphi(\bar{x}).$$

Todistus. Lauseen todistus on helposti suoritettavissa suoraan suunnatun derivaatan kaavan (43) perusteella. Sen mukaan saadaan

$$(61) \quad \begin{aligned} D_{\bar{\gamma}}\varphi(\bar{x}) &= \min_{\bar{y} \in Y(\bar{x})} \sum_{i=1}^n \gamma_i F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \\ &= \min_{\bar{y} \in Y(\bar{x})} \left[a \sum_{i=1}^n \alpha_i F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y}) + b \sum_{i=1}^n \beta_i F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \right] \\ &\geq a \min_{\bar{y} \in Y(\bar{x})} \sum_{i=1}^n \alpha_i F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y}) + b \min_{\bar{y} \in Y(\bar{x})} \sum_{i=1}^n \beta_i F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y}) \\ &= a D_{\bar{\alpha}}\varphi(\bar{x}) + b D_{\bar{\beta}}\varphi(\bar{x}). \end{aligned}$$

Edellä on jo todettu, että suunnattu derivaatta $D_y\varphi(\bar{x})$ ei välttämättä ole jatkuva \bar{x} :n funktio. Seuraavien osittaisten tulosten voidaan kuitenkin osoittaa olevan voimassa.

Lause 4. Suunnattu derivaatta $D_y\varphi(\bar{x})$ on alhaalta päin puolijatkuva muuttujien \bar{y} ja \bar{x} suhteen.

Todistus. Olkoot $\{\bar{x}^m\}$ ja $\{\bar{y}^m\}$ sellaiset jonot, että $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{x}^m = \bar{x}^0$ ja $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{y}^m = \bar{y}^0$. On osoitettava oikeaksi kaava

$$(62) \quad \liminf_{m \rightarrow \infty} D_{\bar{y}^m}\varphi(\bar{x}^m) = D_{\bar{y}^0}\varphi(\bar{x}^0).$$

Käsitteen $\liminf_{m \rightarrow \infty}$ määritelmän perusteella on nyt riittävä osoittaa, että ento

$$(63) \quad \liminf_{m \rightarrow \infty} D_{\rho, m} \mathcal{C}(\bar{x}^m) \geq D_{\rho, 0} \mathcal{C}(\bar{x}^0).$$

on voimassa. Olkoon $\{m'\}$ sellainen jonon $\{m\}$ alijono, että

$$(64) \quad \lim_{m' \rightarrow \infty} D_{\rho, m'} \mathcal{C}(\bar{x}^{m'}) = \liminf_{m \rightarrow \infty} D_{\rho, m} \mathcal{C}(\bar{x}^m).$$

Suunnatun derivaatan määritelmän nojalla on nyt olemassa sellainen $\bar{y}^m \in Y(\bar{x}^m)$, että

$$(65) \quad D_{\rho, m'} \mathcal{C}(\bar{x}^{m'}) = \sum_{i=1}^n \gamma_i^{m'} F_{x_i}(\bar{x}^{m'}, \bar{y}^{m'}).$$

Valitaan edelleen sellainen jonon $\{m'\}$ alijono $\{m^{\#}\}$, että jono $\{\bar{y}^{m^{\#}}\}$ suppenee kohti pistettä $\bar{y}^{\#}$. Lemman 4 perusteella $\bar{y}^{\#} \in Y(\bar{x}^0)$. Koska $F_{x_i}(\bar{x}, \bar{y})$ on jatkuva \bar{x} :n ja \bar{y} :n funktiona, lähestyy (65):n oikea puoli äärellistä raja-arvoa, kun $m^{\#} \rightarrow \infty$. Tämä raja-arvo on

$$(66) \quad \lim_{m^{\#} \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \gamma_i^{m^{\#}} F_{x_i}(\bar{x}^{m^{\#}}, \bar{y}^{m^{\#}}) = \sum_{i=1}^n \gamma_i^0 F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^{\#}).$$

Yhtälöistä (64) - (66) seuraa nyt

$$(67) \quad \liminf_{m \rightarrow \infty} D_{\rho, m} \mathcal{C}(\bar{x}^m) = \sum_{i=1}^n \gamma_i^0 F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^{\#}).$$

Mutta koska piste $\bar{y}^{\#} \in Y(\bar{x}^0)$, on

$$(68) \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i^0 F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^{\#}) \geq \min_{\bar{y} \in Y(\bar{x}^0)} \sum_{i=1}^n \gamma_i^0 F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}) = D_{\rho, 0} \mathcal{C}(\bar{x}^0).$$

Kun yhdistetään kaavat (67) ja (68), on väite (63) osoitettu oikeaksi. Lause 4 on näin todistettu.

Lause 5. Suunnattu derivaatta $D_{\rho} \mathcal{C}(\bar{x})$ on suunnan \bar{y} jatkuva funktio.

Todistus. Lauseen 4 perusteella on riittävää, että todistetaan ylhäältä päin puolijatkuvuus. Oletetaan, että pisteessä \bar{y}^0 saavutetaan suunnatun derivaatan $D_{\rho, 0} \mathcal{C}(\bar{x}^0)$ lausekkeessa esiintyvä minimiarvo. Siis $\bar{y}^0 \in Y(\bar{x}^0)$. Olkoon

$\{\bar{y}^m\}$ sellainen jono, että $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{y}^m = \bar{y}^0$. Ylhäältä päin puolijatkuvuuden todistamiseksi riittää käsitteen $\lim_{m \rightarrow \infty} \sup$ ominaisuuksien perusteella osoittaa, että

$$(69) \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} D_{\rho, m} \mathcal{C}(\bar{x}^0) \leq D_{\rho, 0} \mathcal{C}(\bar{x}^0)$$

on voimassa. Nyt on

$$(70) \quad D_{\rho, m} \mathcal{C}(\bar{x}^0) = \min_{\bar{y} \in Y(\bar{x}^0)} \sum_{i=1}^n \gamma_i^m F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}) \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i^m F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^0).$$

Tästä saadaan edelleen

$$(71) \quad \begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} D_{\rho, m} \mathcal{C}(\bar{x}^0) &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \gamma_i^m F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^0) \\ &= \sum_{i=1}^n \limsup_{m \rightarrow \infty} \gamma_i^m F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^0) \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma_i^0 F_{x_i}(\bar{x}^0, \bar{y}^0) = D_{\rho, 0} \mathcal{C}(\bar{x}^0), \end{aligned}$$

mistä nähdään väite oikeaksi.

Seuraavana esitettävä lause on analoginen klassillisen matematiikan väliarvolauseeseen kanssa. Sitä varten tarvitaan kuitenkin eräs välillä $[0, 1]$ määriteltyjä yhden muuttujan funktioita koskeva lemma.

Lemma 5. Olkoon funktio $f(x)$ jatkuva suljetulla välillä $[0, 1]$ ja olkoon $f(0) = 0$. Oletetaan, että funktiolla $f(x)$ on positiivinen oikeanpuoleinen derivaatta $f'_+(x)$ jokaisessa välin $[0, 1)$ pisteessä. Tällöin on $f(1) > 0$.

Todistus. Lemman todistamiseksi tehdään vasta oletus, että

$$(72) \quad f(1) = -a \leq 0.$$

Merkitään $g(x) = f(x) + ax$. Tällöin on $g'_+(x) = f'_+(x) + a > a \geq 0$ koko välillä $[0, 1)$. Saavuttakoon $g(x)$ välillä $[0, 1]$ suurimman arvonsa pisteessä \hat{x} . Koska $g'_+(x) > 0$, ei $g(x)$ ole vakio. Näin ollen on $g(\hat{x}) > 0$. Oletetaan, että

olisi $\hat{x} > 1$. Tällöin olisi $g'_+(\hat{x}) > 0$, joten olisi olemassa sellaisia pisteitä $x > \hat{x}$, joissa $g(x) > g(\hat{x})$. Tämä on \hat{x} :n määritelmän mukaan kuitenkin mahdotonta, joten $\hat{x} = 1$. Näin ollen on $g(1) > 0$. Tästä seuraa, että $f(1) = g(1) - a > -a$. Näin saatu tulos on kuitenkin ristiriidassa vastaoletuksen kanssa, joten vastaoletuksen on oltava väärä. Näin on osoitettu väite $f(1) > 0$ oikeaksi.

Lause 6 (Max min - teorian väliarvolause). Olkoon \bar{y} pisteestä \bar{x}^0 pisteeseen \bar{x}^1 kulkevan janan suunta. Tällä janelalla on silloin sellainen piste $\bar{x} \neq \bar{x}^1$, että

$$(73) \quad D_y \varphi(\bar{x}) \leq \frac{\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^0)}{|\bar{x}^1 - \bar{x}^0|}$$

ja sellainen piste $\bar{x}' \neq \bar{x}^1$, että

$$(74) \quad D_y \varphi(\bar{x}') \geq \frac{\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^0)}{|\bar{x}^1 - \bar{x}^0|}.$$

Todistus. Merkitään $\bar{x}^\theta = (1 - \theta)\bar{x}^0 + \theta\bar{x}^1$, missä $0 \leq \theta \leq 1$. Määritellään funktio $\psi(\theta)$ seuraavasti:

$$(75) \quad \psi(\theta) = \varphi(\bar{x}^\theta) - \varphi(\bar{x}^0) - \theta[\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^0)].$$

Näin määritelty funktio toteuttaa reunaehdot

$$(76) \quad \psi(0) = \psi(1) = 0.$$

Muodostetaan seuraavaksi funktion $\psi(\theta)$ oikeanpuoleinen derivaatta $\psi'_+(\theta)$. Tätä varten on ensin laskettava funktion $\varphi(\bar{x}^\theta)$ oikeanpuoleinen derivaatta θ :n suhteen. Käytetään siitä merkintää $\varphi'_+(\bar{x}^\theta)$. Tarkastellaan erotusosamäärää

$$(77) \quad \frac{\varphi(\bar{x}^{\theta'}) - \varphi(\bar{x}^\theta)}{\theta' - \theta} = \frac{|\bar{x}^{\theta'} - \bar{x}^\theta| \varphi'_+(\bar{x}^{\theta'}) - \varphi(\bar{x}^\theta)}{\theta' - \theta} \\ = \frac{[(\theta'\bar{x}^1 + (1 - \theta')\bar{x}^0) - (\theta\bar{x}^1 + (1 - \theta)\bar{x}^0)] \varphi'_+(\bar{x}^{\theta'}) - \varphi(\bar{x}^\theta)}{\theta' - \theta} \\ = \frac{\varphi(\bar{x}^{\theta'}) - \varphi(\bar{x}^\theta)}{|\bar{x}^{\theta'} - \bar{x}^\theta|}$$

$$(77) \quad = \frac{|(\theta' - \theta)\bar{x}^1 - (\theta' - \theta)\bar{x}^0| \varphi'_+(\bar{x}^{\theta'}) - \varphi(\bar{x}^\theta)}{\theta' - \theta} \\ = |\bar{x}^1 - \bar{x}^0| \frac{\varphi'_+(\bar{x}^{\theta'}) - \varphi(\bar{x}^\theta)}{|\bar{x}^{\theta'} - \bar{x}^\theta|},$$

kun $0 \leq \theta < \theta' \leq 1$. Nyt on

$$(78) \quad \varphi'_+(\bar{x}^\theta) = \lim_{\substack{\theta' \rightarrow \theta \\ \theta' > \theta}} \frac{\varphi(\bar{x}^{\theta'}) - \varphi(\bar{x}^\theta)}{\theta' - \theta} \\ = |\bar{x}^1 - \bar{x}^0| \lim_{\substack{\theta' \rightarrow \theta \\ \theta' > \theta}} \frac{\varphi'_+(\bar{x}^{\theta'}) - \varphi(\bar{x}^\theta)}{|\bar{x}^{\theta'} - \bar{x}^\theta|} \\ = |\bar{x}^1 - \bar{x}^0| D_y \varphi(\bar{x}^\theta).$$

Myös derivaatta $\psi'_+(\theta)$ on näin ollen olemassa välillä $0 \leq \theta < 1$ ja sen ilmoittaa lauseke

$$(79) \quad \psi'_+(\theta) = |\bar{x}^1 - \bar{x}^0| D_y \varphi(\bar{x}^\theta) - (\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^0)).$$

Mikäli nyt olisi $\psi'_+(\theta) > 0$ koko välillä $[0, 1)$, olisi lemmän 5 perusteella $\psi(1) > \psi(0)$, mikä on kuitenkin vastoin reunaehto (76). On siis oltava ainakin yhdessä pisteessä θ voimassa $\psi'_+(\theta) \leq 0$. Kun merkitään $\bar{x} = \bar{x}^\theta$, saadaan

$$(80) \quad |\bar{x}^1 - \bar{x}^0| D_y \varphi(\bar{x}) - (\varphi(\bar{x}^1) - \varphi(\bar{x}^0)) \leq 0.$$

Huomataan, että (80) on kaava (73) vain toiseen muotoon kirjoitettuna. Väitteen (74) todistus on analoginen.

4. Lagrangen kerroin - periaate

Tässä pykälässä esitetään Lagrangen kertoimen periaate, joka antaa välttämättömän ehdon sille, että annettu funktio saavuttaisi suurimman arvonsa tietyssä pisteessä. Useimmat klassillisen Lagrangen kerroin - teoreeman todistukset käyttävät hyväksi akselien suuntaan tapahtuvaa derivointia. Osoittautuu kuitenkin, että vastaavanlainen tulos voidaan johtaa käyttämällä edellä esitettyä yleistettyä suunnattua derivaattaa.

Tarkastellaan aluksi hieman Lagrangen kerroin - menetelmän yleistä periaatetta. Jos tiedetään, että annettu funktio saavuttaa tietyn reunaehdon voimassa ollessa sidotun ääriarvon jossakin pisteessä, niin Lagrangen kertoimen avulla voidaan määritellä uusi funktio, jolla on tavallinen ääriarvo tässä samassa pisteessä, nyt siis rajoittamattomassa avaruudessa.

Sovelletaan edellä esitettyä periaatetta ratkaistaessa tehtävää, jossa on tarkoituksena etsiä funktion $\varphi(\bar{x})$ maksimiarvoa, kun seuraavan reunaehdon on toteuduttava:

$$(81) \quad \sum_{i=1}^n x_i = X, x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Oletetaan, että $\varphi(\bar{x})$ saavuttaa maksimiarvonsa, kun (81) on voimassa, pisteessä \bar{x}^0 . Asetetaan kaksi määritelmää, jotka koskevat pisteestä \bar{x}^0 lähteviä suuntia \bar{y} .

Määritelmä 1. Suunnan $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sanotaan olevan mahdollinen, jos $y_i \geq 0$ aina, kun $x_i^0 = 0$. Suunta \bar{y} on sallittu, jos se on mahdollinen ja täyttää lisäksi ehdon $\sum_{i=1}^n y_i = 0$.

Yllä määriteltyjen käsitteiden merkitys on seuraava. Pisteestä \bar{x}^0 lähtevä suunta \bar{y} on mahdollinen, jos se ei osoita pois ei-negatiivisesta ortantista $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)\}$. Suunta \bar{y} on sallittu, jos se lisäksi on tasossa \mathcal{U} : $\sum_{i=1}^n x_i = X$. Sillä jos lähdetään pisteestä \bar{x}^0 ja kuljetaan lyhyt matka h pitkin sallittua vektoria \bar{y} , saavutaan pisteeseen $\bar{x}^1 = (x_1^0 + hy_1, \dots, x_n^0 + hy_n)$,

joka on tasossa \mathcal{U} :

$$(82) \quad \sum_{i=1}^n (x_i^0 + hy_i) = \sum_{i=1}^n x_i^0 + h \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n x_i^0 = X.$$

Jos siis funktio $\varphi(\bar{x})$ saavuttaa maksimiarvonsa, kun reunaehto (81) toteutuu, pisteessä \bar{x}^0 , on ehdon

$$(83) \quad D_{\bar{y}} \varphi(\bar{x}^0) \leq 0$$

oltava voimassa, olipa \bar{y} mikä sallittu suunta hyvänsä. Tehtävän edelleen kehittelyä varten tarvitaan vielä eräitä määritelmiä.

Määritelmä 2. Mahdollinen suunta \bar{y} on positiivinen, jos $\sum_{i=1}^n y_i > 0$, ja negatiivinen, jos $\sum_{i=1}^n y_i < 0$.

Seuraavassa osoitetaan, että jos on annettuna positiivinen suunta \bar{y} ja negatiivinen suunta \bar{y}' , niin nämä sopivasti yhdistämällä saadaan sallittu suunta. Oletetaan, että $\sum_{i=1}^n y_i = a > 0$ ja $\sum_{i=1}^n y'_i = -b < 0$. Oletetaan myös lisäksi, että $\bar{y} + \bar{y}' \neq 0$. Suunnista \bar{y} ja \bar{y}' saadaan sallittu suunta \bar{y}'' seuraavasti:

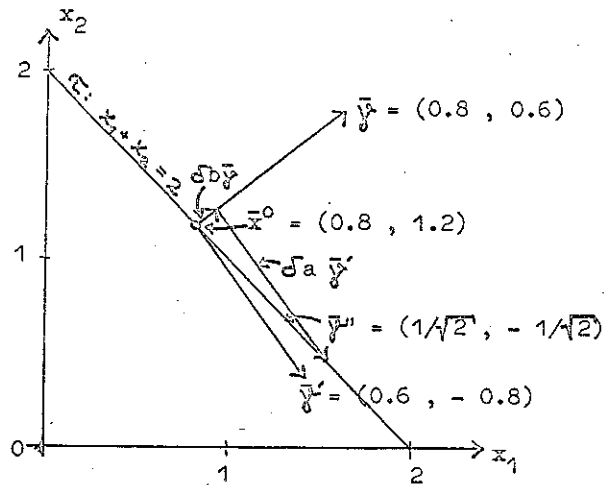
$$(84) \quad \bar{y}'' = \sigma(b\bar{y} + a\bar{y}').$$

Tässä $\sigma > 0$ on valittava siten, että \bar{y}'' täyttää suunnalle asetetut vaatimukset, ts. että \bar{y}'' on yksikkövektori. Tämä valinta on mahdollista tehdä, koska $\bar{y}'' \neq 0$. Sillä jos olisi $\bar{y}'' = 0$, olisi kaikilla i :n arvoilla ($i = 1, 2, \dots, n$) $b y_i + a y'_i = 0$, mistä $y'_i = -(b/a)y_i$. Koska \bar{y} ja \bar{y}' ovat yksikkövektoreita, olisi $b = a$ eli $y'_i = -y_i$. Tämä tapaus suljettiin kuitenkin edellä pois. Suunta \bar{y}'' on sallittu, sillä

$$(85) \quad \sum_{i=1}^n y''_i = \sigma b \sum_{i=1}^n y_i + \sigma a \sum_{i=1}^n y'_i = \sigma(b \cdot a - a \cdot b) = 0.$$

Yllä esitetty sallitun vektorin muodostaminen on havainnollisesti esitetty seuraavalla sivulla olevassa kuviossa 2.

Olkoon esimerkiksi $\vec{y} = (0.8, 0.6)$ ja $\vec{y}' = (0.6, -0.8)$.
Tällöin on $a = 1.4$ ja $b = 0.2$. Saadaan $\vec{y}'' = \mathcal{E}(1, -1)$, mis-
tä $\mathcal{E} = 1/\sqrt{2}$. Siis viimein $\vec{y}'' = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.



Kuva 2.

Ehdon (83) mukaan on $D_{y''} \varphi(\bar{x}^0) \leq 0$. Lauseen 3 nojalla taas on

$$(86) \quad D_{y''} \varphi(\bar{x}^0) \geq \mathcal{E} \cdot b \cdot D_y \varphi(\bar{x}^0) + \mathcal{E} \cdot a \cdot D_{y'} \varphi(\bar{x}^0).$$

Kun nämä kaksi tulosta yhdistetään, saadaan

$$(87) \quad b D_y \varphi(\bar{x}^0) + a D_{y'} \varphi(\bar{x}^0) \leq 0.$$

Otetaan edelleen lukujen a ja b määritelmät huomioon, jolloin (87) voidaan kirjoittaa muotoon

$$(88) \quad \frac{D_y \varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n y_i} \leq \frac{D_{y'} \varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n y'_i}$$

Siirrytään nyt tarkastelemaan tapausta, jolloin $\vec{y} + \vec{y}' = 0$. Valitaan tällöin jono $\{\vec{y}^m\}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot: $\lim_{m \rightarrow \infty} \vec{y}^m = \vec{y}$, $\vec{y}^m \neq \vec{y}$ ($m = 1, 2, \dots$), suunnat \vec{y}^m ovat positiivisia suuntia kaikilla m :n arvoilla. Tällöin on

$\vec{y}^m + \vec{y}' \neq 0$, joten kaavaa (88) voidaan soveltaa:

$$(89) \quad \frac{D_{y^m} \varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n y_i^m} \leq \frac{D_{y'} \varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n y'_i}.$$

Lauseen 4 mukaan suunnattu derivaatta $D_{y^m} \varphi(\bar{x}^0)$ on suunnan \vec{y}^m jatkuva funktio. Koska suunnat \vec{y}^m ovat kaikilla m :n arvoilla positiivisia suuntia, ovat summat $\sum_{i=1}^n y_i^m$ äärellisiä ja nollasta eroavia. Kaava (89) on näin ollen voimassa myös, kun $m \rightarrow \infty$. Raja-arvona saadaan

$$(90) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{D_{y^m} \varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n y_i^m} = \frac{D_y \varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n y_i} \leq \frac{D_{y'} \varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n y'_i}.$$

Näin on osoitettu, että (88) on voimassa myös silloin, kun $\vec{y} + \vec{y}' = 0$.

Kaikkia positiivisia suuntia \vec{y} vastaten saadaan nyt joukko lukuja

$$(91) \quad \frac{D_y \varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n y_i}.$$

Merkitään tätä joukkoa kirjaimella L . Samoin saadaan negatiivisia suuntia vastaavien lukujen

$$(92) \quad \frac{D_{y'} \varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n y'_i}.$$

muodostama joukko R . Mikäli $l \in L$ ja $r \in R$, niin epäyhtälön (88) mukaan on $l \leq r$. Mutta näin on päädytty Dedekindin leikkauksen ([2], ss. 28 - 29) mukaiseen tilanteeseen: kun on annettuna kaksi joukkoa L ja R , joilla on yllä kuvatun kaltaiset ominaisuudet, niin on olemassa sellainen nämä joukot erottava luku λ , että jokainen joukon L alkio l täyttää ehdon $l \leq \lambda$ ja jokainen joukon R alkio r toteuttaa ehdon $r \geq \lambda$. Siis, mikäli \vec{y} on positiivinen suunta, on

$$(93) \quad \frac{D_y \varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n y_i} \leq \lambda,$$

mistä summalausekkeella $\sum_{i=1}^n y_i$ kertomalla

$$(94) \quad D_y \varphi(\bar{x}^0) \leq \lambda \sum_{i=1}^n y_i.$$

Negatiivisen suunnan \bar{y} kyseessä ollessa saadaan vastaavasti

$$(95) \quad \frac{D_y \varphi(\bar{x}^0)}{\sum_{i=1}^n y_i} \geq \lambda.$$

Tästä saadaan, kun otetaan huomioon summalausekkeen $\sum_{i=1}^n y_i$ negatiivisuus, kaava

$$(96) \quad D_y \cdot \varphi(\bar{x}^0) \leq \lambda \sum_{i=1}^n y_i.$$

Kaavan (94) havaitaan nyt olevan voimassa, olipa \bar{y} mikä tahansa positiivinen tai negatiivinen suunta. Se on voimassa myös, vaikka \bar{y} olisi sallittukin suunta. Sillä tällöin on $\sum_{i=1}^n y_i = 0$, joten (94) palautuu muotoon $D_y \varphi(\bar{x}^0) \leq 0$. Tämä tulos taas on (83):n nojalla voimassa. Näin on osoitettu oikeaksi seuraava lause:

Lause 7. Jos funktio $\varphi(\bar{x})$ saavuttaa sidotun maksimiarvon reunaehdon (81) toteuttavassa pisteessä \bar{x}^0 , niin silloin on olemassa sellainen luku λ , että

$$(97) \quad D_y \varphi(\bar{x}^0) \leq \lambda \sum_{i=1}^n y_i,$$

olipa \bar{y} mikä tahansa ehdon $y_i \geq 0$, kun $x_i^0 = 0$ täyttävä suunta.

Lauseen 7 sisältämä asia voidaan esittää myös toisessa muodossa. Jos funktiolla $\varphi(\bar{x})$ on sidottu maksimiarvo pisteessä \bar{x}^0 , niin funktiolla

$$(98) \quad \psi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

on tässä pisteessä ei-positiivinen derivaatta, ts.

$$(99) \quad D_y \psi(\bar{x}^0) \leq 0,$$

olipa \bar{y} mikä tahansa mahdollinen suunta. Jos verrataan tätä tulosta (83):een, niin havaitaan, että tällöin oli olittava $D_y \varphi(\bar{x}^0) \leq 0$ kaikkien sallittuihin suuntiin \bar{y} . Lagrangen kerroin - menettely on siis uuden funktion $\psi(\bar{x})$ määrittelyn avulla johtanut (81):n määräämästä rajoitetusta avaruuden osasta rajoittamattomaan avaruuteen. On kuitenkin osoittautunut, että tällä uudella Lagrangen funktiolla $\psi(\bar{x})$ ei ole max min - teoriassa niin suurta merkitystä kuin tavallisella Lagrangen funktiolla klassillisessa matematiikassa.

5. Esimerkkejä

Tarkastellaan lopuksi kahta max min - esimerkkiä. Nämä molemmat liittyvät tiettyyn sotilaallisten kohteiden hyökkäys - puolustus tilanteeseen. Näistä ensimmäinen tehtävä voidaan mukavasti ratkaista edellä esitettyjen tulosten perusteella, toiseen tehtävään taas on päätösfunktion luonteen johdosta sovellettava muita ratkaisumenetelmiä.

Esimerkki 1. Oletetaan tilanne seuraavanlaiseksi. Pelaajalla P_1 on n eri kohdetta, joita hän yrittää suojella. Pelaaja P_2 edustaa hyökkääjää, jonka tarkoituksena on aiheuttaa näille kohteille mahdollisimman suuri vahinko. Hyökkääjä P_2 tietää valitessaan hyökkäävien yksiköiden lukumäärät (y_1, y_2, \dots, y_n) näitä kohteita puolustavien yksiköiden lukumäärät (x_1, x_2, \dots, x_n) . Pelaajalla P_1 on käytettävissään puolustajia kaikkiaan määrä X ja P_2 :lla hyökkääjiä kaikkiaan määrä Y.

Jos \hat{y}_i hyökkääjää läpäisee kohteen i ($i = 1, 2, \dots, n$) puolustuksen, on tästä kohteelle i aiheutuva vahinko $\hat{v}_i(\hat{y}_i)$. Jos kohteeseen i tulevien hyökkääjien luku on y_i ja kohteessa on x_i puolustajaa, läpäisee $g_i(x_i, y_i)$ hyökkääjää puolustuksen. Kohteen i kärsimä vahinko tällöin ilmeisesti $\hat{v}_i(g_i(x_i, y_i)) = v_i(x_i, y_i)$. Pelaajalle P_1 aiheutuu täten ko-

kokonaisvahinko

$$(100) \quad V(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n \hat{v}_i(g_i(x_i, y_i)) = \sum_{i=1}^n v_i(x_i, y_i),$$

kun eri kohteiden vahingot oletetaan additiivisiksi.

Kun P_1 on tehnyt valintansa \bar{x} , valitsee P_2 \bar{y} :n siten, että $V(\bar{x}, \bar{y})$ saavuttaa suurimman arvonsa, ts. arvon $\max_{\bar{y}} V(\bar{x}, \bar{y})$. Koska P_1 haluaa kokonaisvahingon mahdollisimman pieneksi, on hänen tehtävä sellainen valinta \bar{x} , että

$$(101) \quad \min_{\bar{x}} \max_{\bar{y}} V(\bar{x}, \bar{y})$$

saavutetaan. Pelaajien on strategioita valitessaan otettava huomioon rajoitukset

$$(102) \quad \sum_{i=1}^n x_i = X, \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(103) \quad \sum_{i=1}^n y_i = Y, \quad y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Tarkastellaan nyt edellä esitetystä tehtävästä seuraavaa erikoistapausta. Oletetaan, että vahinkofunktiot ovat muotoa

$$(104) \quad \hat{v}_i(y) = 1 - \exp(-k_i y) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

missä $k_i > 0$. Lukua k_i voidaan kutsua kohteen i vahingoittumisalttiudeksi, sillä mitä suurempi se on, sitä suurempi vahinko syntyy samalla hyökkäysvoimalla. Oletetaan edelleen, että kunkin puolustajan on mahdollista estää vain yhden hyökkääjän pääsy puolustettavaan kohteeseen. Toisaalta oletetaan, että puolustaja myös pystyy tämän tekemään. Funktiot $g_i(x_i, y_i)$ ovat siten muotoa

$$(105) \quad g_i(x, y) = \begin{cases} y - x, & \text{kun } y > x, \\ 0, & \text{kun } y \leq x. \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Kokonaisvahinko saadaan tällöin yhtälöstä

$$(106) \quad V(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n (1 - \exp(-k_i g_i(x_i, y_i))) = \sum_{i=1}^n v_i(x_i, y_i),$$

missä siis

$$(107) \quad v_i(x_i, y_i) = \begin{cases} 1 - \exp(-k_i \overbrace{g_i(x_i, y_i)}^{y_i - x_i}), & \text{kun } y_i > x_i, \\ 0, & \text{kun } y_i \leq x_i. \end{cases}$$

Jotta päästäisiin yhdenmukaiseen esitykseen edellisissä pykälissä esitetyn teorian kanssa, otetaan käyttöön eräitä merkintöjä. Olkoon

$$(108) \quad f_i(x_i, y_i) = -v_i(x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(109) \quad F(\bar{x}, \bar{y}) = -V(\bar{x}, \bar{y}),$$

jolloin on voimassa

$$(110) \quad F(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i, y_i).$$

Edelleen voidaan kirjoittaa

$$(111) \quad \begin{aligned} \min_{\bar{x}} \max_{\bar{y}} V(\bar{x}, \bar{y}) &= \min_{\bar{x}} \left\{ - \min_{\bar{y}} [-V(\bar{x}, \bar{y})] \right\} \\ &= - \max_{\bar{x}} \min_{\bar{y}} [-V(\bar{x}, \bar{y})] = - \max_{\bar{x}} \min_{\bar{y}} F(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

Tehtävänä on siis viimein etsiä

$$(112) \quad v = \max_{\bar{x}} \min_{\bar{y}} F(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{\bar{x}} \min_{\bar{y}} \sum_{i=1}^n f_i(x_i, y_i),$$

kun rajoitukset (102) ja (103) ovat voimassa. Optimiratkaisun mukainen kokonaisvahinko on $-v$.

Ryhdyttäessä ratkaisemaan tehtävää (112), voidaan tehdä aluksi muutamia yleisiä huomioita. Vaikka tehtävän luontees-ta johtuen muuttujat x_i ja y_i voisivat oikeastaan saada vain kokonaislukuarvoja, oletetaan seuraavassa x_i - ja y_i -lukujen voivan muuttua jatkuvasti, jotta max min - teorian edellyttämät oletukset olisivat voimassa. Käytännön optimiratkaisu saadaan tällöin, kun teoreettisesta optimirat-

kaisusta siirrytään johonkin lähimmästä kokonaislukuratkaisuista. Mikäli halutaan tutkia pelkästään kokonaislukuratkaisuja, voidaan käyttää mm. esimerkin 2 ratkaisumenetelmää. Oletetaan siis seuraavassa, että strategiat \bar{x} ja \bar{y} voivat muuttua jatkuvasti.

Tarkasteluista voidaan sulkea pois tapaus, jolloin puolustaja on täysin ylivoimainen hyökkääjään nähden. Tällainen tilanne vallitsee, kun $X \geq n Y$. Ratkaisu on tässä tilanteessa ilmeinen. Pelaaja P_1 valitsee nyt strategian \bar{x} siten, että $x_i \geq Y$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ja $\sum_{i=1}^n x_i = X$. Valitsipa P_2 strategiansa \bar{y} miten hyvänsä, on kukin $f_i(x_i, y_i) = 0$. Näin ollen $v = 0$ ja samalla kokonaisvahinko $-v = 0$. Tämä johtuu siitä, että yksikään hyökkääjä ei pysty läpäisemään puolustusta.

Koska P_2 tekee valintansa P_1 :n jälkeen ja tietää tämän menettelyn, on selvää, että $y_i > 0$ silloin ja vain silloin, kun $y_i > x_i$. Sillä oletetaan, että P_2 valitsisi jollakin indeksin arvolla k $0 < \hat{y}_k \leq x_k$. Tällöin olisi $f_k(x_k, \hat{y}_k) = 0$. Nyt P_2 saavuttaisi kuitenkin myös valinnalla $y_k = 0$ tuloksen $f_k(x_k, 0) = 0$. Hän voisi näin ollen käyttää määrän \hat{y}_k muiden kohteiden hyväksi ilman, että se vaikuttaisi mitenkään $f_k(x_k, y_k)$:n arvoon. Valinta \hat{y}_k ei siis voi olla optimaalinen.

Tehtävän (112) ratkaisut jakaantuvat P_2 :n menettelyn mukaan ilmeisesti kahteen luonteeltaan erilaiseen tyyppiin. Pelaaja P_2 voi joko keskittää voimansa vain yhteen kohteeseen, ts. on tietty kohde k , jolloin $y_k = Y$ ja $y_i = 0$ muulloin, tai sitten P_2 jakaa voimansa useamman eri kohteen kesken. Jälkimmäisessä tapauksessa hyökkäys voi kohdistua joko kaikkiin kohteisiin tai mahdollisesti vain osaan niistä. Tarkastellaan nyt seuraavaksi mikä tapaus kulloinkin tulee kysymykseen ja millaisiksi strategiat tällöin muodostuvat.

Otetaan ensiksi se tapaus, jolloin P_2 jakaa voimansa useaan eri kohteen kesken. Edellä esitetyn perusteella on niillä indeksin i arvoilla, joilla $y_i > 0$, myös $y_i > x_i$. Näillä indeksin arvoilla ovat vahinkofunktiot muotoa

$$(113) \quad f_i(x_i, y_i) = \exp(-k_i(y_i - x_i)) - 1.$$

Nämä funktiot f_i ovat derivoituvia sekä x_i :n että y_i :n suhteen. Tehtävän asettelun perusteella myös muut Gibbs'in lemman vaatimat ehdot ovat voimassa. Näin ollen, mikäli strategia \bar{y}^0 antaa funktion $F(\bar{x}, \bar{y})$ minimiarvon, on oltava

$$(114) \quad \frac{d}{dy_i} \left[-f_i(x_i, y_i) \right]_{y_i=y_i^0} = k_i \exp(-k_i(y_i^0 - x_i)) = \mu,$$

kun $y_i^0 > 0$. Derivoitavana funktiona on $f_i(x_i, y_i)$:n tilalla $-f_i(x_i, y_i)$, koska nyt on kysymyksessä minimin haku. Vastaavasti, mikäli strategia \bar{x}^0 antaa lausekkeen $F(\bar{x}, \bar{y}^0) = \min_{\bar{y}} F(\bar{x}, \bar{y})$ maksimiarvon, on oltava

$$(115) \quad \frac{d}{dx_i} \left[f_i(x_i, y_i^0) \right]_{x_i=x_i^0} = k_i \exp(-k_i(y_i^0 - x_i^0)) = \begin{cases} = \lambda, & \text{kun } x_i^0 > 0, \\ \leq \lambda, & \text{kun } x_i^0 = 0. \end{cases}$$

Ehto (114) on voimassa kaikilla \bar{x} :n arvoilla, siis myös kun $\bar{x} = \bar{x}^0$. Näin ollen on

$$(116) \quad k_i \exp(-k_i(y_i^0 - x_i^0)) = \mu, \text{ kun } y_i^0 > 0.$$

Yhtälön (116) ja (115):n ylemmän rivin perusteella nähdään, että $\lambda = \mu$. Koska (116) on voimassa myös, kun $x_i^0 = 0$, on (115):n alemmassakin rivissä oltava voimassa vain yhtäsuuruusmerkki. Ehdot (115) ja (116) supistuvat siten seuraavaan muotoon: välttämätön ehto sille, että strategiapari (\bar{x}^0, \bar{y}^0) olisi tehtävän ratkaisu, on seuraavan yhtälön voimassaolo

$$(117) \quad k_i \exp(-k_i(y_i^0 - x_i^0)) = \lambda, \text{ kun } y_i^0 > 0 \text{ (samalla } y_i^0 > x_i^0).$$

Yhtälön (117) ratkaisuksi saadaan

$$(118) \quad y_i^0 - x_i^0 = (1/k_i) \log(k_i/\lambda).$$

Luku λ on toistaiseksi tuntematon. Entä milloin $y_i^0 > 0$? Komponentti $y_i^0 > 0$ silloin ja vain silloin, kun $y_i^0 > x_i^0$

eli kun $\exp(-k_i(y_i^0 - x_i^0)) \approx 1$ eli viimein kun $k_i > \lambda$. Pelaaja P_2 tekee siis valintansa lukujen k_i perusteella. Nyt on selvää, että myös P_1 valitsee $x_i^0 = 0$, kun $k_i \leq \lambda$. Sillä jos $k_i \leq \lambda$, ei P_1 :n kannata valita $x_i^0 > 0$, koska P_2 tulee kuitenkin valitsemaan $y_i^0 = 0$. Luku λ voidaanakin jo määrätä. Saadaan

$$(119) \quad Y - X = \sum_{i=1}^n (y_i^0 - x_i^0) = \sum_{y_i^0 > 0} (y_i^0 - x_i^0) = \sum_{k_i > \lambda} \frac{1}{k_i} \log \frac{k_i}{\lambda}.$$

Yhtälöllä (119) on yksikäsitteinen ratkaisu λ . Merkitään $h(\lambda)$:lla (119):n oikeanpuoleista lauseketta. Olkoon $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} k_i$ ja $\beta = \min_{1 \leq i \leq n} k_i$. Kun $\lambda < \beta$, esiintyvät kaikki termit $(1/k_i) \log(k_i/\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) summassa, joten kun λ on kyllin pieni, saa $h(\lambda)$ mielivaltaisen suuria arvoja, erikoisesti suurempia kuin $Y - X$. Toisaalta, kun $\lambda \geq \alpha$, on $h(\lambda) = 0$. Edelleen $h(\lambda)$ on λ :n vähenevä funktio, kun $0 < \lambda \leq \alpha$, sillä summan yhteenlaskettavat ovat väheneviä funktioita ja niiden lukumäärässä voi tapahtua vain vähenemistä. Funktio $h(\lambda)$ on myös jatkuva λ :n positiivisilla arvoilla, sillä yhteenlaskettavat ovat jatkuvia ja kun jokin termi jää pois summasta (λ saavuttaa jonkin arvon k_i), niin sillä on juuri sillä hetkellä arvo 0. Edellä olevan perusteella voidaan päätellä, että $h(\lambda)$ saa arvon $Y - X$ tarkalleen yhdessä pisteessä λ . Tämä λ on (119):n yksikäsitteinen ratkaisu.

Mikäli tehtävällä (112) on ratkaisu, jossa $y_i^0 > 0$ useammalla kuin yhdellä i :n arvolla, saadaan se siis selville seuraavasti. Määrätään ensin λ yhtälöstä (119). Sen jälkeen on P_1 :n strategia \bar{x}^0 valittava siten, että

$$(120) \quad \begin{cases} x_i^0 = 0, & \text{kun } k_i \leq \lambda, \\ x_i^0 \geq 0, & \text{kun } k_i > \lambda, \quad \sum_{k_i > \lambda} x_i^0 = X. \end{cases}$$

Pelaajan P_2 strategiaksi \bar{y}^0 muodostuu tällöin

$$(121) \quad \begin{cases} y_i^0 = 0, & \text{kun } k_i \leq \lambda, \\ y_i^0 = x_i^0 + (1/k_i) \log(k_i/\lambda), & \text{kun } k_i > \lambda. \end{cases}$$

"Pelin arvoksi" v saadaan

$$(122) \quad \begin{aligned} v = F(\bar{x}^0, \bar{y}^0) &= \sum_{i=1}^n f_i(x_i^0, y_i^0) \\ &= \sum_{k_i > \lambda} \left\{ \exp(-k_i(y_i^0 - x_i^0)) - 1 \right\} \\ &= \sum_{k_i > \lambda} \left(\frac{\lambda}{k_i} - 1 \right) = \lambda \sum_{k_i > \lambda} (1/k_i) - m, \end{aligned}$$

missä m on niiden lukujen k_i lukumäärä, jotka ovat $> \lambda$. Pelaaja P_2 aiheuttaa hyökkäyksellään P_1 :lle vahingon

$$(123) \quad m - \lambda \sum_{k_i > \lambda} 1/k_i.$$

Tarkastellaan toiseksi sitä tilannetta, jolloin P_2 keskittää koko voimansa yhteen kohteeseen ($1 \leq r \leq n$). Pelaajan P_1 on nyt valittava strategia \bar{x}^0 siten, että

$$(124) \quad \max_{\bar{x}} \min_{\bar{y}} \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(x_i, y_i) \right\} = \max_{\bar{x}} \left\{ \exp(-k_r(Y - x_r)) - 1 \right\}$$

saavutetaan, kun $\bar{x} = \bar{x}^0$. Kyseinen maksimiarvo ilmeisesti saavutetaan, kun

$$(125) \quad k_r(Y - x_r^0) = k_i(Y - x_i^0) \quad (i = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, n).$$

Yhtälöstä (125) saadaan ratkaisemalla

$$(126) \quad x_i^0 = \frac{k_r}{k_i} x_r^0 + \left(1 - \frac{k_r}{k_i}\right) Y \quad (i \neq r).$$

Koska pelaajan P_1 on tehtävä valintansa siten, että (102) toteutuu, on oltava

$$(127) \quad \sum_{i=1}^n x_i^0 = \sum_{i \neq r}^n \left\{ \frac{k_r}{k_i} x_r^0 + \left(1 - \frac{k_r}{k_i}\right) Y \right\} + x_r^0 = X,$$

mistä ratkaisemalla

$$(128) \quad x_r^0 = Y - \frac{nY - X}{k_r \sum_{j=1}^n (1/k_j)}.$$

Yhtälöiden (126) ja (128) perusteella saadaan muiden kom-

ponenttien arvoiksi ($i \neq r$)

$$(129) \quad x_i^0 = Y - \frac{nY - X}{k_i \sum_{j=1}^n (1/k_j)}$$

Huomataan, että (128) ja (129) ovat aivan samaa muotoa. Näin ollen yhtälö (129) on voimassa kaikilla i :n arvoilla ($1 \leq i \leq n$). Pelin arvo v on

$$(130) \quad v = \sum_{i=1}^n f_i(x_i^0, y_i^0) = \exp \left\{ -k_r \left[Y - \left(Y - \frac{nY - X}{k_r \sum_{j=1}^n (1/k_j)} \right) \right] \right\} - 1 = \exp \left(- \frac{nY - X}{\sum_{j=1}^n (1/k_j)} \right) - 1.$$

Pelaajalle P_1 aiheutuva kokonaisvahinko on siten

$$(131) \quad 1 - \exp \left(- \frac{nY - X}{\sum_{j=1}^n (1/k_j)} \right).$$

Ratkaisu muodostui siis tässä toisessa tapauksessa seuraavanlaiseksi. Pelaaja P_1 valitsee strategiansa yhtälön (129) mukaisesti, P_2 puolestaan hyökkää vain yhteen kohteeseen r , joka voi olla mikä tahansa kohteista $1, 2, \dots, n$. Syntyvän kokonaisvahingon ilmoittaa lauseke (131).

Vielä on ratkaisematta, kumpi edellä esitetyistä vaihtoehdoista kulloinkin tulee kysymykseen. Ensinnäkin on selvää, että tyyppiä (120) - (122) oleva ratkaisu voi olla mahdollinen vain, kun $Y > X$. Tämä seikka kävi selville johdettaessa kyseistä ratkaisua. Siis mikäli $Y \leq X$, on P_1 :n optimistrategia (129):n mukainen ja P_2 valitsee yhden kohteista $1, 2, \dots, n$. Tapauksessa $Y > X$ on tilanne jonkin verran monimutkaisempi. Tällöin määrätään ensin strategiat \bar{x}^0 ja \bar{y}^0 yhtälöiden (120) - (121) mukaisesti (λ on laskettu kaavasta (119)). Luku v saadaan (122):n avulla. Onko näin muodostettu ratkaisu optimaalinen? Vastaus saadaan seuraavasti. Määrätään luvut v_i' , missä v_i' on funktion $F(\bar{x}, \bar{y})$ arvo, kun P_1 noudattaa yllä mainittua strategiaa ja P_2 kes-

kittää koko voimansa kohteeseen i . Mikäli jokin luvuista v_i' on $< v$, ei yhtälöiden (120) - (122) mukainen ratkaisu voi olla optimaalinen, sillä P_2 saavuttaisi paremman tuloksen poikkeamalla (121):n mukaisesta menettelystä (valitsemalla ainoastaan yhden tietyn kohteen i). Ratkaisun on oltava tässä tapauksessa sellainen, että P_1 toimii (129):n mukaan ja P_2 valitsee minkä tahansa kohteista $1, 2, \dots, n$.

Esimerkki 2. Tarkastellaan toisena esimerkkinä edellä käsiteltyä hyökkäys - puolustus tilannetta hieman muunneltuna. Oletetaan nyt, että puolustaja osuu korkeintaan yhteen hyökkääjään osumisen todennäköisyyden ollessa p . Muilta osin tehtävä on esimerkissä 1 esitetyn kaltainen. Koska tehtävään tuli nyt todennäköisyyden p mukana tietty sattumanvaraisuus, ei syntyvää kokonaisvahinkoa voida ennalta laskea. Sen sijaan voidaan kokonaisvahingon odotusarvo määrätä. Tämä odotusarvo edustaa nyt päätösfunktiota, ja pelaajien optimointitoimenpiteet kohdistuvat sen suuruuteen. Käytetään myös tästä odotusarvosta merkintää $V(\bar{x}, \bar{y})$. Vektorit \bar{x} ja \bar{y} ovat pelaajien valitsemia strategioita.

Oletetaan nyt, että P_1 ja P_2 ovat tehneet tietyt valinnat $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Todennäköisyys, että puolustaja tuhoaa 1 hyökkääjää kohteessa i ($i = 1, 2, \dots, n$), on

$$(132) \quad P_{x_i}(1) = \binom{x_i}{1} p^1 (1-p)^{x_i-1}.$$

Tässä yhtälössä on tietysti $0 \leq 1 \leq x_i$. Toisaalta on myös $1 \leq y_i$. On siis oltava $0 \leq 1 \leq \min(x_i, y_i) = m_i$. Kohde i kärsii siis keskimäärin vahingon

$$(133) \quad v_i(x_i, y_i) = \sum_{l=1}^{m_i} P_{x_i}(l) \left\{ 1 - \exp(-k_i(y_i - l)) \right\}.$$

Syntyvän kokonaisvahingon odotusarvo saadaan näin ollen yhtälöstä

$$(134) \quad V(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=0}^{m_i} P_{x_i}(l) \left\{ 1 - \exp(-k_i(\bar{y}_i - l)) \right\}.$$

Pelaaja P_1 yrittää saada funktion $V(\bar{x}, \bar{y})$ arvon mahdollisimman pieneksi, P_2 taas mahdollisimman suureksi. Etsitään siis strategioita \bar{x}^0 ja \bar{y}^0 , jotka toteuttavat ehdon

$$(135) \quad V(\bar{x}^0, \bar{y}^0) = \min_{\bar{x}} \max_{\bar{y}} V(\bar{x}, \bar{y}).$$

Yllä olevassa yhtälössä olevat maksimin ja minimin haut suoritetaan vain niiden strategioiden \bar{x} ja \bar{y} joukosta, jotka toteuttavat ehdot (102) ja (103). Otetaan taas käyttöön merkinnät

$$(136) \quad f_i(x_i, y_i) = -v_i(x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(137) \quad F(\bar{x}, \bar{y}) = -V(\bar{x}, \bar{y}).$$

Tällöin on

$$(138) \quad F(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i, y_i).$$

Tehtävänä on nyt siis etsiä sellaiset strategiat \bar{x}^0 ja \bar{y}^0 sekä sellainen luku v , että

$$(139) \quad v = F(\bar{x}^0, \bar{y}^0) = \sum_{i=1}^n \max_{\substack{x_i=X \\ x_i \geq 0}} \sum_{i=1}^n \min_{\substack{y_i=Y \\ y_i \geq 0}} F(\bar{x}, \bar{y}).$$

Kokonaisvahingon odotusarvon ilmoittaa luku $-v$.

Huomataan, että päädyttiin tehtävään, jossa tulevat kysymykseen vain kokonaislukuratkaisut, sillä todennäköisyyden ilmoittava lauseke $P_{x_i}(l)$ on määritelty vain, kun x_i on kokonaisluku. Edellisissä pykälissä esitetystä max min-teoriasta ei siis ole apua tämän tehtävän ratkaisua etsittäessä. Mutta kokonaislukustrategioista johtuu, että tehtävä sopii hyvin ratkaistavaksi dynaamisen ohjelmoinnin menetelmin. Dynaamisen ohjelmoinnin keinoin tehtäviä ratkaistaessa syntyy aina tiettyjä taulukoita, jotka kokonaislukuoptimoinnin kyseessä ollessa saadaan täydellisiksi. Näin välttytään mm. interpolaatiovirheilä.

Noudatetaan ratkaisun etsinnässä dynaamisen ohjelmoinnin yleisiä menettelytapoja. Määrätään ensin kummankin pelaajan optimimenettely, kun kohteita on vain yksi. Tämän jälkeen lisätään kohteiden luku kahdeksi ja määrätään taas optimistrategiat käyttäen hyväksi edellisen vaiheen tuloksia. Näin jatketaan, kunnes kaikki kohteet ovat mukana strategioita valittaessa. On samantekevää, missä järjestyksessä kohteet otetaan mukaan. Selvyyden vuoksi kuitenkin oletetaan, että aloitetaan kohteesta $n:0$ 1 ja edetään numerojärjestyksessä.

Merkitään

$$(140) \quad f_k^{\bar{x}}(x, y) = \sum_{i=1}^k \max_{x_i=x} \sum_{i=1}^k \min_{y_i=y} \left\{ \sum_{j=1}^n f_j(x_j, y_j) \right\},$$

missä lisäksi on oltava $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Määritelmän (140) mukaan $f_k^{\bar{x}}(x, y)$ on päätösfunktion optimiarvo, kun kohteita on k kpl ja P_1 :llä on käytettävissään puolustajia määrä x ja P_2 :lla hyökkääjiä määrä y . Tämän mukaan on ilmeisesti

$$(141) \quad v = f_n^{\bar{x}}(X, Y).$$

Funktion arvon $f_n^{\bar{x}}(X, Y)$ laskemiseksi on tunnettava funktion $f_{n-1}^{\bar{x}}$ arvot; näiden laskeminen taas edellyttää funktion $f_{n-2}^{\bar{x}}$ arvojen tuntemista jne. Lähdetään tämän johdosta liikkeelle funktiosta $f_1^{\bar{x}}$. Tällöin on

$$(142) \quad f_1^{\bar{x}}(x, y) = \max_{x_1=x} \min_{y_1=y} f_1(x_1, y_1) = f_1(x, y) \\ = \sum_{l=0}^{\min(x, y)} P_x(l) \left\{ \exp(-k_1(y - l)) - 1 \right\}.$$

Taulukoidaan funktion $f_1^{\bar{x}}(x, y)$ arvot, kun $0 \leq x \leq X$ ja $0 \leq y \leq Y$. Taulukkoon tulee siis kaikkiaan $(X+1)(Y+1)$ lukuja. Merkitään symboleilla $\hat{x}_1(x, y)$ ja $\hat{y}_1(x, y)$ niitä x_1 - ja y_1 -lukuja, joilla kaavassa (142) esiintyvät minimiarvojen maksimiarvo saavutetaan. Nähdään, että

$$(143) \quad \hat{x}_1(x, y) = x,$$

$$(144) \quad \hat{y}_1(x, y) = y.$$

Taulukoidaan myös \hat{x}_1 - ja \hat{y}_1 -luvut samoilla argumentin arvoilla kuin funktio $f_1^{\bar{x}}(x, y)$.

Toisessa vaiheessa, kun kohteita on kaksi, saadaan

$$\begin{aligned} f_2^{\bar{x}}(x, y) &= \max_{x_1+x_2=x} \min_{y_1+y_2=y} \{f_1(x_1, y_1) + f_2(x_2, y_2)\} \\ (145) &= \max_{0 \leq x_2 \leq x} \min_{0 \leq y_2 \leq y} \{f_2(x_2, y_2) + f_1(x-x_2, y-y_2)\} \\ &= \max_{0 \leq x_2 \leq x} \min_{0 \leq y_2 \leq y} \{f_2(x_2, y_2) + f_1^{\bar{x}}(x-x_2, y-y_2)\}. \end{aligned}$$

Funktion $f_2^{\bar{x}}(x, y)$ arvot voidaan näin laskea, koska funktion $f_1^{\bar{x}}(x, y)$ arvot tunnetaan. Tehdään taas taulukko $f_2^{\bar{x}}(x, y)$ -arvoista, kun $0 \leq x \leq X$ ja $0 \leq y \leq Y$. Samalla taulukoidaan luvut $\hat{x}_2(x, y)$ ja $\hat{y}_2(x, y)$ eli ne x_2 - ja y_2 -arvot, jotka antavat (145):n mukaisen optimituloksen. Näin jatketaan edelleen. Yleisesti on $(k = 2, 3, \dots, n)$

$$\begin{aligned} f_k^{\bar{x}}(x, y) &= \sum_{i=1}^k \max_{x_i=x} \min_{y_i=y} \left\{ \sum_{j=1}^k f_j(x_j, y_j) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^k \max_{x_i=x} \min_{y_i=y} \left\{ f_k(x_k, y_k) + \sum_{j=1}^{k-1} f_j(x_j, y_j) \right\} \\ (146) &= \max_{0 \leq x_k \leq x} \min_{0 \leq y_k \leq y} \left\{ f_k(x_k, y_k) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{k-1} \max_{x_i=x-x_k} \min_{y_i=y-y_k} \left[\sum_{j=1}^{k-1} f_j(x_j, y_j) \right] \right\} \\ &= \max_{0 \leq x_k \leq x} \min_{0 \leq y_k \leq y} \left\{ f_k(x_k, y_k) + f_{k-1}^{\bar{x}}(x-x_k, y-y_k) \right\}. \end{aligned}$$

Funktion $f_k^{\bar{x}}(x, y)$ arvot voidaan siis laskea funktion $f_{k-1}^{\bar{x}}(x, y)$ arvojen perusteella. Taulukoidaan siksi kaikkien funktioiden $f_k^{\bar{x}}(x, y)$ arvot, kun $0 \leq x \leq X$ ja $0 \leq y \leq Y$. Samalla taulukoidaan $\hat{x}_k(x, y)$ - ja $\hat{y}_k(x, y)$ -luvut, jotka määritellään samoin kuin tapauksessa $k = 2$. Näin jatketaan, kunnes tullaan vai-

heeseen $k = n$. Tällöin ei tarvita enää taulukointia. Laskeetaan vain arvo $f_n^{\bar{x}}(X, Y)$. Tämä arvo on (141):n mukaan $= v$. Lopuksi on vielä määrättävä P_1 :n ja P_2 :n optimistrategiat \bar{x}^0 ja \bar{y}^0 . Ensinnäkin on ilmeisesti

$$(147) \quad x_n^0 = \hat{x}_n(X, Y),$$

$$(148) \quad y_n^0 = \hat{y}_n(X, Y).$$

Tämä seuraa suoraan lukujen \hat{x}_n ja \hat{y}_n määritelmistä. Kohteeseen n :o n tulevat joukot on siis määrätty. Kohteita $1, 2, \dots, n-1$ varten on jäljellä seuraavat miesvahvuudet: P_1 :llä $X - x_n^0$ puolustajaa ja P_2 :lla $Y - y_n^0$ hyökkääjää. Kohteeseen n :o $n-1$ tulee tämän mukaan joukkoja määrät

$$(149) \quad x_{n-1}^0 = \hat{x}_{n-1}(X-x_n^0, Y-y_n^0),$$

$$(150) \quad y_{n-1}^0 = \hat{y}_{n-1}(X-x_n^0, Y-y_n^0).$$

Samalla tavalla jatketaan vaihe kerrallaan. Yleisesti kohteeseen n :o $n-k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) tulevien joukkojen määrät saadaan yhtälöistä

$$(151) \quad x_{n-k}^0 = \hat{x}_{n-k}(X - \sum_{i=0}^{k-1} x_{n-i}^0, Y - \sum_{i=0}^{k-1} y_{n-i}^0),$$

$$(152) \quad y_{n-k}^0 = \hat{y}_{n-k}(X - \sum_{i=0}^{k-1} x_{n-i}^0, Y - \sum_{i=0}^{k-1} y_{n-i}^0).$$

Tehtävä on näin kokonaisuudessaan ratkaistu. Pelaaja P_1 menettelee yhtälöiden (147) ja (151) mukaisella tavalla, P_2 puolestaan yhtälöiden (148) ja (152) mukaan. "Pelin arvo" v saadaan yhtälöstä (141). Syntyvän kokonaisvahingon odotusarvo on $= -v$.

Tehtävän käytännöllisestä ratkaisemisesta on mainittava, että siihen tarvitaan tietokoneiden apua, mikäli kiistanalaisten kohteiden lukumäärä n on vähänkin suuri, yleensä jo, kun $n > 2$. Tämän esityksen loppuun onkin liitetty FORTRAN - ohjelma ko. tehtävän ratkaisemiseksi sekä eräitä ratkaisuja, jotka on laskettu Turun Yliopiston Sovelletun matematiikan IBM 1130 - tietokonetta hyväksi käyttäen.

```

PAGE 1
// JOB T
LOG DRIVE 0000 CART SPEC 0001 CART AVAIL 0001 PHY DRIVE 0000

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
FUNCTION G0162(X)
IF(X) 1,1,2
1 G0162 A 1.
RETURN
2 FX A 1.
N X X + 0.1
DO 3 I A 1,N
3 FX X FX * I
G0162 A FX
RETURN
END

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR G0162
COMMON 0 VARIABLES 6 PROGRAM 64

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA G0162
D 06 ENTRY POINT NAME ALREADY IN LET/FLET

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
FUNCTION F0162(I,J,P,V)
F0162 A 0.
IF (I - J) 1,2,2
1 MIN A I
GO TO 3
2 MIN A J
3 MINIM A MIN + 1
DO 4 LL A 1,MINIM
L A LL - 1
XI A I
YI A J
RL A L
BIN A G0162(XI)/(G0162(XI-RL)*G0162(RL))
BIN A BIN*P**L*(1.-P)**(I-L)
X A V*(YI-RL)
TERMI A BIN*(EXP(-X)-1.)
4 F0162 A F0162 + TERMI
RETURN
END

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR F0162
COMMON 0 VARIABLES 26 PROGRAM 168

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA F0162
D 06 ENTRY POINT NAME ALREADY IN LET/FLET

// FOR
*IOCS(1132 PRINTER)
*IOCS(CARD)

```

```

*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
DIMENSION IY00(5,11,11),IXOPT(5),IYOPT(5)
DIMENSION V(5),F(5,11,11),FOPT(5,11,11),IX00(5,11,11)
1 READ (2,71) N,IXTOT,IYTOT,P,(V(I),IA1,N)
IF (N) 11,11,2
2 IX1 A IXTOT + 1
IY1 A IYTOT + 1
VI A V(1)
DO 3 I A 1,IX1
DO 3 J A 1,IY1
F(1,I,J) A F0162(I-1,J-1,P,VI)
FOPT(1,I,J) A F(1,I,J)
IX00(1,I,J) A I - 1
3 IY00(1,I,J) A J - 1
DO 4 I A 2,N
VI A V(I)
DO 4 IX A 1,IX1
DO 4 IY A 1,IY1
4 F(I,IX,IY) A F0162(IX-1,IY-1,P,VI)
DO 9 I A 2,N
DO 9 IXX A 1,IX1
DO 9 IYY A 1,IY1
FMAX A -2.
DO 8 IX A 1,IXX
FMIN A 1.
IXERO A IXX - IX + 1
DO 6 IY A 1,IYY
IYFRO A IYY - IY + 1
FUN A F(I,IX,IY) + FOPT(I-1,IXERO,IYERO)
IF (FMIN - FUN) 6,6,5
5 FMIN A FUN
IYO A IY - 1
6 CONTINUE
IF (FMAX - FMIN) 7,8,8
7 FMAX A FMIN
IX00(I,IXX,IYY) A IX - 1
IY00(I,IXX,IYY) A IYO
8 CONTINUE
9 FOPT(I,IXX,IYY) A FMAX
FOO A FOPT(N,IX1,IY1)
IXSUM A 0
IYSUM A 0
DO 10 J A 1,N
I A J - 1
NI A N - I
IXERO A IX1 - IXSUM
IYERO A IY1 - IYSUM
IXOPT(NI) A IX00(NI,IXERO,IYERO)
IYOPT(NI) A IY00(NI,IXERO,IYERO)
IXSUM A IXSUM + IXOPT(NI)
IYSUM A IYSUM + IYOPT(NI)
10 FOO A -FOO
WRITE (3,70)
WRITE (3,80) N
WRITE (3,72)
WRITE (3,73) IXTOT,IYTOT
WRITE (3,74) P
WRITE (3,75)
WRITE (3,76) (I,V(I),IA1,N)
WRITE (3,77) (I,IXOPT(I),I,IYOPT(I),IA1,N)
WRITE (3,79) FOO
GO TO 1
11 STOP
70 FORMAT (1H1,7X,0KOHEIDEN LUKUMÄÄRÄ0)
71 FORMAT (3I2,F2.2,5F2.1)
72 FORMAT (00KÄYTTÄVISSÄ OLEVAT MIESVAHVUODET0/)
73 FORMAT (9X,1HP,14,8X,1HP,14/10X,1H1,12X,1H2//)
74 FORMAT (0 PUOLUSTAJAN OSUMISTODENNÄKÖ0:SYYS0//16X,F5.2//)
75 FORMAT (0 KOHEIDEN VAHINGOITTUMISALTTIUEDE0/)
76 FORMAT (10X,0KOHDE0,I3,F9.2)
77 FORMAT (2H0 /5X,0PELAAJEN OPTIMISTRATEGIAT0/)
78 FORMAT (9X,1HX,12,14,4X,1HY,12,14)
79 FORMAT (2H0 /0 PUOLUSTAJAN KÄRSIMÄ KOKONAISVAHINKO0//14X,F7.4)
80 FORMAT (1H0,16X,I2/)
END

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
COMMON 0 VARIABLES 3686 PROGRAM 810

END OF COMPILATION

```

KOhteiden LUKUMAARA

5

KAYTETTAVISSA OLEVAT MIESVAHVUUDET

P 8 P 8
1 2

PUOLUSTAJAN OSUMISTODENNAKOISYYS

0.75

KOhteiden VAHINGOITTUMISALTTIUEDT

KOHDE	1	1.00
KOHDE	2	0.90
KOHDE	3	0.80
KOHDE	4	0.70
KOHDE	5	0.50

PELAAJIEN OPTIMISTRATEGIAT

X	1	2	Y	1	3
X	2	2	Y	2	0
X	3	2	Y	3	0
X	4	1	Y	4	3
X	5	1	Y	5	2

PUOLUSTAJAN KARSIMA KOKONAISVAHINKO

1.9767

KOhteiden LUKUMAARA

5

KAYTETTAVISSA OLEVAT MIESVAHVUUDET

P 10 P 6
1 2

PUOLUSTAJAN OSUMISTODENNAKOISYYS

0.70

KOhteiden VAHINGOITTUMISALTTIUEDT

KOHDE	1	1.00
KOHDE	2	0.80
KOHDE	3	0.50
KOHDE	4	0.30
KOHDE	5	0.20

PELAAJIEN OPTIMISTRATEGIAT

X	1	8	Y	1	0
X	2	0	Y	2	0
X	3	1	Y	3	5
X	4	1	Y	4	0
X	5	0	Y	5	1

PUOLUSTAJAN KARSIMA KOKONAISVAHINKO

1.0619

KOhteiden LUKUMAARA

4

KAYTETTAVISSA OLEVAT MIESVAHVUUDET

P 1 7 P 2 7

PUOLUSTAJAN OSUMISTODENNAKOISYYS

0.50

KOhteiden VAHINGOITTUMISALTTIUEDT

KOHDE	1	1.00
KOHDE	2	0.80
KOHDE	3	0.50
KOHDE	4	0.30

PELAAJIEN OPTIMISTRATEGIAT

X 1	3	Y 1	4
X 2	3	Y 2	0
X 3	1	Y 3	2
X 4	0	Y 4	1

PUOLUSTAJAN KARSIMA KOKONAISVAHINKO

1.6542

KOhteiden LUKUMAARA

4

KAYTETTAVISSA OLEVAT MIESVAHVUUDET

P 1 7 P 2 7

PUOLUSTAJAN OSUMISTODENNAKOISYYS

0.90

KOhteiden VAHINGOITTUMISALTTIUEDT

KOHDE	1	1.00
KOHDE	2	0.50
KOHDE	3	0.40
KOHDE	4	0.10

PELAAJIEN OPTIMISTRATEGIAT

X 1	5	Y 1	6
X 2	0	Y 2	1
X 3	2	Y 3	0
X 4	0	Y 4	0

PUOLUSTAJAN KARSIMA KOKONAISVAHINKO

1.1280

Kirjallisuusluettelo

- [1] Danskin, J. M: The theory of max-min and its application to weapon allocation problems, Heidelberg 1967
- [2] Graves, L.G: The theory of functions of real variables, Nex York 1946
- [3] Hadley, G: Nonlinear and dynamic programming, Reading, Mass. 1964
- [4] Kakutani, S: A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Math. J. 8, N:o 3, 457 - 459 (1941)