

TURUN
KAUPPAKORKEAKOULUN
JULKAISUJA
SARJA

PUBLICATIONS OF THE TURKU
SCHOOL OF ECONOMICS
SERIES A I - 4:1974

Ilkka Virtanen

MONIKOMPONENTTISEN STOKASTISESTI VIOITTUVAN
SYSTEMIN KÄYTTÄYTYMISESTÄ JA LUOPETTAVUUDESTA

English Summary

ESIPUHE

Tämä tutkimus on syntynyt opinnäytetyönä. Tutkimus on esitetty sovelletun matematiikan lisensiaattityönä Turun Yliopiston matemaattis-luonnontieteellisessä tiedekunnassa keuhällä 1974 ja julkaistaan tässä alkuperäisessä muodossaan.

Tutkimuksieni aihepiirin muotoutumiseen on ratkaisevalla tavalla vaikuttanut monivuotinen esimieheni, prof. Pentti Malaska. Hänen vaikutuksensa työn kuluessa on muutenkin ollut huomattava. Työs-kentelyäni varten olen jatkuvasti saanut häneltä virikkeitä niin henkilökohtaisten keskustelujen kuin Turun Kauppakorkeakoulun tutkijoille tarkoitettujen seminaarien yhteydessä. Tästä kai-kesta haluan lausua prof. Malaskalle lämpimät kiitokseni.

Tutkimusta ovat sen alkuvaiheista lähtien seuranneet prof. Olavi Hellman ja FT Esa Uusipaikka. Heiltä olenkin saanut työtäni ajatellen useita varteenotettavia huomautuksia ja parannusohdo-tuksia, joista tässä esitän parhaimmat kiitokseni.

Vaikka tutkimus onkin puhtaasti teoreettista perustutkimusta, on sillä ainakin aiheen valinnan suhteen tietty käytännön tuo-tantoelämästä peräisin oleva tausta. Tästä suhteesta varsin antoisaksi olen kokenut yhteistoimintani Tehdaspalveluyhdistys ry:n (ent. Kunnossapitotoimikunnan) kanssa.

Työn vaikean konekirjoitustyön on taitavasti ja suurta huolelli-suutta osittain suorittanut rva Kirsti Vallinkoski. Parhaat kiitokseni hänelle tästä työstä. Turun Kauppakorkeakoulua kiitän siitä, että se on hyväksynyt tämän tutkimuksen julkaisusarjaansa.

Tutkimusta varten saamastani taloudellisesta tuosta kiitän Suomen Kulttuurirahastoa ja Turun Kauppakorkeakoulun Yritys-suunnittelun stipendirahastoa.

Turussa, huhtikuussa 1975

Ilkka Virtanen

SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO	1	4. SYSTEEMIN KÄYTTÄYTYMINEN, KUN OSASYSTEEMI S_1 ON AKTIIVISESTI RINNANKYTKETTY	30
2. LUOTETTAVUUSTEORIAN MATEMAATTISISTA PERUSTEISTA	3	4.1. Korjauspolitiikkana minimikorjaus- politiikka P_1	30
2.1. Luotettavuus ja siihen liittyvät perus- käsitteet	3	4.1.1. (A, P_1) -systeemin tilat	30
2.2. Vikataajuus, häiriöttömän toiminta-ajan tiheys- ja kertymäfunktiot sekä niiden väliset yhteydet	7	4.1.2. (A, P_1) -systeemin tilayhtälöt	31
2.3. Tavallisimmat luotettavuusteoriassa esiin- tyvät jakautumat	10	4.1.2.1. Merkinnät	31
2.3.1. Eksponentiaalijakautuma	10	4.1.2.2. Osittaisdifferentiaali- yhtälöt	34
2.3.2. Gamma-jakautuma	11	4.1.2.3. Reunaehdot	36
2.3.3. Weibull-jakautuma	12	4.1.3. Tilayhtälöiden ratkaisut	37
2.3.4. Rayleigh-jakautuma	13	4.1.3.1. Tilayhtälöiden Laplace- muunnokset	37
2.3.5. Katkaistu normaali-jakautuma	14	4.1.3.2. Muunnosyhtälöiden rat- kaisut	38
2.3.6. Log-normaali-jakautuma	15	4.1.3.3. Tilayhtälöiden ratkaisut muunnosyhtälöiden ratkai- sujen käänteismuunnoksina	44
2.3.7. Äärimmäisten arvojen jakautuma	16	4.1.3.4. Stationäärisen vaiheen ratkaisut	47
2.3.8. Jakautumien yhdistäminen	17	4.1.4. (A, P_1) -systeemin luotettavuudesta	53
2.3.9. Yleinen jakautuma	19	4.2. Korjauspolitiikkana täyskorjauspolitiikka P_2	55
3. TUTKIMUKSEN RAJAUS JA TÄSMENNYS SEKÄ TARKASTE- L-TAVAN SYSTEEMIN KUVAUS JA SYSTEEMIÄ KOSKEVAT OLETTAMUKSET	20	4.2.1. (A, P_2) -systeemin tilat	55
3.1. Tutkimuksen lähtökohta ja tavoitteet	20	4.2.2. (A, P_2) -systeemin tilayhtälöt	56
3.2. Tarkasteltavan systeemin kuvaus	22	4.2.2.1. Merkinnät	56
3.2.1. Systeemin rakenne	22	4.2.2.2. Osittaisdifferentiaali- yhtälöt	57
3.2.2. Osasysteemien kytkennät	24	4.2.2.3. Reunaehdot	58
3.2.3. Korjauspolitiikat	25	4.2.3. Tilayhtälöiden ratkaisut	59
3.3. Systeemin satunnaissuureita koskevat olettamukset	26	4.2.3.1. Tilayhtälöiden Laplace- muunnokset	59
3.3.1. Vian esiintyminen	27	4.2.3.2. Muunnosyhtälöiden rat- kaisut	60
3.3.2. Korjausaika	28	4.2.3.3. Tilayhtälöiden ratkaisut muunnosyhtälöiden ratkai- sujen käänteismuunnoksina	64
3.3.3. Korjauksen odotusaika	29	4.2.3.4. Stationäärisen vaiheen ratkaisut	66
		4.2.4. (A, P_2) -systeemin luotettavuudesta	69

5. SYSTEMIN KÄYTTÄYTYMINEN, KUN OSASYSTEEMI S_1 ON PASSIIVISESTI RINNANKYTKETTY 72

5.1. Korjauspolitiikkana minimikorjauspolitiikka P_1 72

5.1.1. (P, P_1) -systeemin tilat 72

5.1.2. (P, P_1) -systeemin tilayhtälöt 73

5.1.3. Tilayhtälöiden ratkaisut 74

5.1.4. (P, P_1) -systeemin luotettavuudesta 81

5.2. Korjauspolitiikkana täyskorjauspolitiikka P_2 82

5.2.1. (P, P_2) -systeemin tilat 82

5.2.2. (P, P_2) -systeemin tilayhtälöt 82

5.2.3. Tilayhtälöiden ratkaisut 83

5.2.4. (P, P_2) -systeemin luotettavuudesta 87

6. VARMISTUSMENETELMÄN JA KORJAUSPOLITIIKAN VAIKUTUS SYSTEMIN LUOTETTAVUUTEEN 88

6.1. Merkintöjä ja eräitä aputuloksia 88

6.2. Luotettavuuden komponentit: tilatodennäköisyydet P_m 96

6.3. Luotettavuuden riippuvuus osasysteemin S_1 komponenttien lukumäärästä 101

6.4. Luotettavuus ja varmistusmenetelmä 104

6.5. Luotettavuus ja korjauspolitiikka 106

7. YHTEENVETO TUTKIMUKSEN KESKEISISTÄ TULOKSISTA 109

SUMMARY 112

LÄHDEKIRJALLISUUS 115

1. JOHDANTO

Matemaattisen luotettavuusteorian kehityksen alku on ajoitettavissa 1930-luvulle.¹ Liikkeelle lähtöä oli omiaan voimistamaan samoikin aikoihin käyty toinen maailmansota. Luotettavuusteoria on syntynyt lähinnä voimakkaan teknologisen kehityksen mukanaan tuomasta tuotanto-, kuljetus-, kommunikaatio- yms. laitteiden luotettavan toiminnan merkityksen korostumisesta. Pitkälle automatisoidussa, entistä vähemmän ihmisen suoranaisten ohjauksen alaisena toimivassa ja entistä laajempia tehtäväkokonaisuuksia suorittavassa laitteistossa ilmennyt vika saattaa ulottaa vaikutuksensa paitsi laitteistoon ja sen tuotantoon sinänsä myös muulle tuotantolaitokseen tai sen ympäristöön. Häiriöiden synnyttämisen ja niiden haittavaikutusten eliminointi ovat näin entistä keskeisemmissä asemassa mikä tahansa tuotanto- tms. laitoksen toiminnassa.

Toisaalta laitteet, jotka kykenevät suoriutumaan näistä kasvanneista vaatimuksista, ovat yleensä rakenteeltaan entistä monimutkaisempia. Kehitys onkin johtanut selvään ristiriitatilanteeseen: toisaalta vaaditaan laitesysteemeiltä entistä suurempaa luotettavuutta, toisaalta systeemien monimutkaistuminen on omiaan alentamaan sitä. Luotettavuusteorian keskeisenä tehtävänä onkin tutkia tätä ristiriitatilannetta ja etsiä keinoja sen purkamiseksi.²

Luotettavuuteen liittyvät kysymykset ovat ajankohtaisia laitteen koko eliniän ajan. Niinpä luotettavuusteoriakin tarkastelee näihin kysymyksiin liittyvää yleistä säännönmukaisuutta, olipa kysymyksessä laitteen suunnittelu, valmistus, käyttöön otto tai sen käyttö varsinaiseen tarkoitukseensa.³ Paljolti siitä riippuen, mihin edellä mainituista vaiheista tarkastelu kohdistuu, voidaan ongelmaa lähestyä kahdella periaatteiltaan erilaisella tavalla.⁴

¹ Barlow ja Prochan, s. 1.

² Gnedonko et al, s. 70.

³ Sama, s. 1.

⁴ Sama, s. 70.

Toisessa huomio kiinnitetään yksityisiin komponentteihin, niiden laatuun ja luotettavuuteen. Systemin luotettavuutta voidaan parantaa, kun saatetaan sen osat, komponentit, entistä luotettavammiksi. Tällöin liikutaan selvästi suunnittelu-, valmistus- tai käyttövaiheeseen. Toisessa lähestymistavassa otetaan komponentit annettuina, kehitetään keinoja luotettavien systemien konstruoinniksi annettuihin osiin ja ylläpidetään tätä luotettavuutta sopivilla huolto- ja korjaustoimenpiteillä. Ongelmat ovat osittain suunnitteluvaiheen, pääasiassa kuitenkin käyttövaiheen aikaisia.

Nyt käsillä oleva tutkimus sijoittuu selvästi jälkimmäisen lähestymistavan piiriin. Tarkastelun näkökulma on lisäksi lähinnä kunnossapidollinen: tarkastellaan tietyn tyyppistä useista laitteista koostuvaa systeemiä ja miten siinä tietyt kunnossapitoorganisaation valittavissa olevat ratkaisut vaikuttavat luotettavuuden mittareiksi valittuihin suureisiin. Ratkaisuvaihtoehtoina ovat toisaalta erilaiset komponenttien varmistuksen järjestämistavat, toisaalta erilaiset kunnossapitopolitiikat.

Käytettyjen menetelmien puolesta tutkimus sijoittuu stokastisten prosessien teorian alueelle. Systemille määritellään joukko diskreettejä tiloja; näissä tiloissa viipymistä ja tilasta toiseen siirtymistä seurataan ajan funktiona. Tietyissä tilassa viipyminen ja toiseen tilaan siirtyminen ovat luonteeltaan stokastisia, useiden eri satunnaistekijöiden vaikutuksen alaisia. Systemin käyttäytymistä kuvaaviin tiloihin liittyvillä todennäköisyyslausekkeilla on mielekäs luotettavuusteoreettinen merkitys: tutkimus on näin sisältönsä ja tulostensa puolesta kuitenkin luotettavuustutkimusta.

2. LUOTETTAVUUSTEORIAN MATEMAATTISISTA PERUSTEISTA

2.1. Luotettavuus ja siihen liittyvät peruskäsitteet

Ennen tarkasteltavan ongelman täsmällisempää määrittelyä ja rajaamista käydään läpi keskeisimpien käytettävien käsitteiden määritelmät ja niihin liittyvät perusominaisuudet. Tähän antaa perustellun aiheen luotettavuusteoreettisessa kirjallisuudessa esiintyvän terminologian verraten suuri epäyhtenäisyys ja vaihtelunomaisuus.¹

Tarkastelujen kohteena on useista koneista, laitteista tms. muodostuva toiminnallinen kokonaisuus, jota kutsutaan systeemiksi. Systemin osia, joita toimintansa ja käyttäytymisensä perusteella voidaan pitää itsenäisinä kokonaisuuksina, kutsutaan systeemin komponenteiksi. Komponentti voi siten olla yksityinen laite, sen tietty osa tai joukko keskenään samanlaisia tai erilaisia laitteita. Systemista, sen osasta ja komponentista käytetään yleisnimitystä yksikkö.²

Yksikköä ja sen toimintaedellytyksiä luonnehditaan yleensä joukolla tiloja, jotka ilmoittavat, miten hyvin yksikkö pystyy suoriutumaan sille asetetuista tehtävistä. Pienimmän tarkasteltavan yksikön, komponentin, oletetaan tavallisimmin, niin myös seuraavassa, olevan kuitenkin vain joko normaalissa toimintakunnossa tai viallisen³. Vialla tarkoitetaan tällöin tilaa, jonka esiintyminen muuttaa yksikön ominaisuuksia normaalin toiminnan alueen ulkopuolelle siinä määrin, että yksikön toiminta keskeytyy ja on ryhdyttävä korjauksiin.⁴

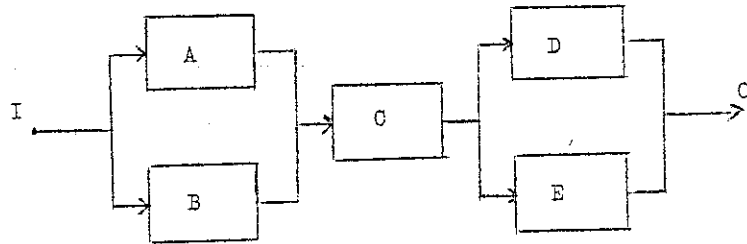
¹ Polovko, s. 2, mm. mainitsee kahdeksan kirjallisuudessa yleisiä määritelmiä käsitteelle "luotettavuus", näistä useat vielä poikkeavat melko lailla toisistaan.

² Edellisestä huomautuksesta poikkeavasti käsitteillä "systeemi", "komponentti" ja "yksikkö" on varsin vakiintunut merkitys, ks. esim. Gnedenko et al., s. 69.

³ Tarkasteluja, joissa komponentti voi toimia myös alentuneella teholla, on suorittanut mm. Kulshrestha IV.

⁴ Polovko, s. 7.

Systeemin komponenttien välisten riippuvuuksien kuvaamiseen käytetään tavallisimmin luotettavuuskaaviota. Luotettavuuskaavio¹ on verkko, jonka lohkot kuvaavat komponentteja ja lohkojen väliset nuolet komponenttien riippuvuuksia toisistaan. Systemi on toimintakunnossa, mikäli alkupisteestä (I) johtaa loppupisteeseen (O) vähintään yksi polku, jonka kaikki komponentit (lohkot) ovat kunnossa (vrt. kuva 2.1.).



Kuva 2.1. Yksinkertaisen systeemin luotettavuuskaavio.

Korjauksen päättymisen (ja komponentin käynnistämisen) sekä uuden vian ilmaantumisen välinen aika, häiriötön toiminta-aika², on satunnaisuus, jolla oletetaan olevan jokin tunnettu, yleensä havaintojen perusteella estimoitu jakautuma. Samalla tavalla oletetaan korjauksen kestoajalla ja korjauksen alun odotusajalla olevan omat tunnetut jakautumansa. Korjauksen kestoajan oletetaan sisältävän kaiken sen ajan, joka kuluu korjausmiehistön saapumisesta vioittuneen komponentin luo aina siihen hetkeen, jolloin komponentti on valmis otettavaksi normaaliin käyttöön. Korjauksen alun odotusajalla tarkoitetaan sitä aikaa, joka kuluu korjauksen suunnitteluun ja valmisteluun (osien ja työkalujen nouto, piirustukset jne.) sekä korjausmiehistön vapautumiseen mahdollisista muista töistä.

Edellä esitettyjen käsitteiden avulla voidaan nyt konstruoida useitakin mittareita, jotka ilmoittavat, miten hyvin jokin yksikkö kykenee suoriutumaan sille asetetuista tehtävistä. Keskeisimmäksi

¹ Zelen, s. 4.

² Vastaavia englanninkielisiä nimityksiä: mm. Barlow ja Proschan, s.9, "time to failure", Polovko, s.73, "time between failures".

tämän laatuiseksi suureeksi on luotettavuusteoriassa muodostunut luotettavuuden käsite. Kuten edellä jo on viitattu, on luotettavuuden määritelmien joukko varsin moninainen. Perusluonteeltaan nämä määritelmät jakaantuvat kuitenkin selvästi kahteen ryhmään: kvalitatiivisiin ja kvantitatiivisiin.¹

Kvalitatiiviset määritelmät muodostavat verraten homogeenisen ryhmän. Tämän ryhmän tyypillisinä edustajina voidaan pitää mm. seuraavia määritelmiä:

1. "Luotettavuus on todennäköisyys sille, että laite kohtaamis- saan toimintaolosuhteissa toimii tehtävänsä mukaisesti aiottu toiminta-ajanjakson."²
2. "Yksikön luotettavuudella tarkoitetaan yksikön kykyä säilyttää laatunsa tietyissä käyttöolosuhteissa."³
3. "Luotettavuus on todennäköisyys sille, että laite toimii menestyksellisesti aiotulla tavalla käyttäjän määrittelemissä olosuhteissa."⁴

Kuten yllä esitettyistä esimerkeistä huomataan, jättävät nämä kvalitatiiviset määritelmät vielä tulkinnan varaa luotettavuuden käsitteelle. Tulkinnoista vapautumiseksi on otettu käyttöön kvantitatiiviset määritelmät, jotka tiukan matemaattisesti määrittelevät tämän käsitteen. Samalla on kuitenkin käyttötarkoituksesta ja toimintaolosuhteista johtuen jouduttu useaan rinnakkaiseen määritelmään. Suurimman suosion on saavuttanut määritelmä⁵: "Luotettavuus (hetkellä t) = todennäköisyys, että yksikkö toimii häiriöttä ajanjakson $[0, t]$." Toisaalta kuitenkin korostetaan, että välttämättä ei tarvitsekaan olla "yhtä ainoata oikeata" luotettavuuden määritelmää, olosuhteet ja käyttötarkoitus viime kädessä ratkaisevat, mikä kvantitatiivinen suure antaa parhaan käsityksen yksikön "luotettavuudesta".⁶

¹ Polovko, s.2.

² Barlow ja Proschan, s.6.

³ Gnedenko et al., s. 70.

⁴ Lloyd ja Lipow, s. 20.

⁵ Mm. Gnedenko et al., s. 74, Barlow ja Proschan, s. 7.

⁶ Gnedenko et al., s. 74.

Muina luotettavuutta kuvaavina suureina tulevat tällöin kysymykseen mm. "Todennäköisyys, että yksikkö on toimintakunnossa hetkellä t "¹ ja "Häiriöttömän toiminta-ajan odotusarvo"².

Systeemin luotettavuus voidaan määritellä yleisessä muodossa tavalla, joka erikoistapauksinaan sisältää mm. kaikki edellä esitetyt tunnusluvut.³ Olkoon $x(t)$ stokastinen prosessi (skalari- tai vektoriarvoinen suure), joka kuvaa systeemin tilojen kehitystä ajan mukana ja olkoon $X = \{x(t)\}$ niiden muodostama avaruus. Olkoon edelleen Φ jokin avaruudessa X määritelty funktionaali. Luotettavuus \mathcal{P} määritellään tällöin tämän funktionaalina odotusarvona, ts.

$$(2.1) \quad \mathcal{P} = E \left\{ \Phi [x(t)] \right\}.$$

Luotettavuus jää siis riippumaan funktionaalin Φ valinnasta. Olkoon esim. X_0 niiden tilojen joukko, jolloin systeemi ei ole toimintakykyinen. Valitsemalla

$$(2.2) \quad \Phi_1 [x(t)] = \begin{cases} 0, & \text{jos on olemassa } 0 \leq s \leq t \text{ siten, että } x(s) \in X_0 \\ 1, & \text{muulloin} \end{cases}$$

saadaan $E \left\{ \Phi_1 [x(t)] \right\} = P \left\{ \text{systeemi on kunnossa vähintään ajan } 0: \text{sta } t: \text{hen} \right\}$. Valinta

$$(2.3) \quad \Phi_2 [x(t)] = \begin{cases} 0, & \text{jos } x(t) \in X_0 \\ 1, & \text{jos } x(t) \notin X_0 \end{cases}$$

puolestaan johtaa luotettavuuden määritelmään $E \left\{ \Phi_2 [x(t)] \right\} = P \left\{ \text{systeemi on toimintakunnossa hetkellä } t \right\}$. Tässä tutkimuksessa systeemin luotettavuudella tarkoitetaan määritelmän (2.3) perusteella syntyvää todennäköisyyslauseketta.⁴ Sillä on mielekäs empiirinen tulkinta varsinkin sellaisissa systeemeissä, jotka saavuttavat stationäärin vaiheen: näin määritelty luotettavuus kuvaa sitä suhteellista osuutta ajasta, jonka systeemi on normaalissa toimintakunnossa.⁵

¹ Zelen, s. 29.

² Gnedenko et al., s. 74.

³ Gnedenko et al., ss. 74-78.

⁴ Tätä kutsutaan myös hetkelliseksi käytettävyydeksi (point availability): Rau, s. 240; Barlow ja Proschan, s. 7.

⁵ Rau, s. 240.

2.2. Vikataajuus, häiriöttömän toiminta-ajan tiheys- ja kertymäfunktiot sekä niiden väliset yhteydet.

Seuraavassa tarkastellaan mielivaltaisen, jatkuvassa käytössä olevan yksikön toimintaa, erityisesti sen vioittumista ja häiriöttömän toiminta-ajan jakautumaa. Häiriöttömän toiminta-ajan jakautuman kuvaamiseksi on käytettävissä useitakin funktioita, tärkeimmät näistä ovat¹ kertymäfunktio $F(t)$, tiheysfunktio $f(t)$ ja vikataajuusfunktio $r(t)$.²

Jos merkitään symbolilla T häiriötöntä käyntiaikaa kuvaavaa satunnaissuuretta, niin kertymäfunktion $F(t)$ määrittellee todennäköisyyslauseke

$$(2.4) \quad F(t) = P\{T \leq t\}.$$

Jos $F(t)$ on jatkuva ja tiheysfunktio $f(t)$ on olemassa, on³

$$(2.5) \quad f(t) = \frac{d}{dt} \left\{ F(t) \right\}$$

ja

$$(2.6) \quad F(t) = \int_0^t f(u) du$$

(luotettavuusteoriassa voidaan tarkasteltavien satunnaissuureiden luonteesta johtuen ilman muuta olettaa, että $f(t) = F(t) = 0$, kun $t < 0$; seuraavassa oletetaankin aina, että $t \geq 0$.)

Luotettavuusteoriassa funktion $F(t)$ jatkuvuus on varsin luonnollinen olettaimus, merkitsisihän $F(t)$:n epäjatkuvuuskohta t_0 , että tarkasteltavalla yksiköllä olisi tuona ajankohtana positiivinen vioittumistodennäköisyys. Ainoan käytännössä reaalisen poikkokosen voisi muodostaa hetki $t = 0$; epäjatkuvuuskohta merkitsisi tässä, että yksikkö toimintaan kytkettäessä on viollinen. Alkuhetken viollisuus voidaan kuitenkin yleensä heti todeta ja

¹ Barlow ja Proschan, s. 12.

² Nimitystä vikataajuus käyttänyt ainakin Turunen. Englanninkielisessä kirjallisuudessa ovat yleisiä nimet: failure rate (mm. Barlow ja Proschan), hazard rate (esim. Singpurwalla, myös Barlow ja Proschan), hazard function (Lloyd ja Lipow); Loiddi on käyttänyt myös nimitystä hazardifunktio.

³ Gnedenko et al., s. 78, Barlow ja Proschan, s. 12.

yksikkö korjata tai vaihtaa uudelleen. Voidaan siten rajoituksetta olettaa¹, että tarkasteltavilla jakautumilla kertymäfunktio on jatkuva ja tiheysfunktio on olemassa.

Luotettavuusteoriassa kertymä- ja tiheysfunktioita tärkeämpänä funktiona jakautuman luonteen kuvaamisessa on pidettävä kuitenkin vikataajuutta $r(t)$. Monet epäsymmetriset jakautumat, kuten esim. gamma-, Weibull- ja log-normaalinen jakautuma, eroavat tiheys- tai kertymäfunktioiltaan toisistaan merkittävästi vain jakautuman liepeillä. Toisaalta, kun ajatellaan havaintojen tekoa jakautumasta, on todettava, että havaintoja on näiltä lievealueilta yleensä verraten vähän. Näin jakautuman tunnistaminen voi muodostua sangen hankalaksi. Sen sijaan vikataajuusfunktiolla on kullekin jakautumatyypille ominainen kulku koko jakautuman alueella.²

Vikataajuus määritellään lausekkeena³

$$(2.7) \quad r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

(niille t :n arvoille, joille $0 \leq F(t) < 1$). Tällä funktiolla on mielekäs todennäköisyysteoreettinen tulkinta: $r(t)dt =$ (ehdollinen) todennäköisyys sille, että ajan t häiriöttä toiminut yksikkö vioittuu aikana $(t, t+dt)$. Vikataajuuden sekä kertymä- ja tiheysfunktioiden välillä voidaan osoittaa olevan mm. seuraavat riippuvuussuhteet⁴:

$$(2.8) \quad F(t) = 1 - e^{-\int_0^t r(u)du}$$

$$(2.9) \quad f(t) = r(t)e^{-\int_0^t r(u)du}$$

Kertymä- ja tiheysfunktioiden yleisten ominaisuuksien perusteella on edelleen selvää, että

$$(2.10) \quad \int_0^{\infty} r(t)dt = \infty \quad \text{ja}$$

$$(2.11) \quad \int_0^{\infty} r(t)e^{-\int_0^t r(u)du} dt = 1.$$

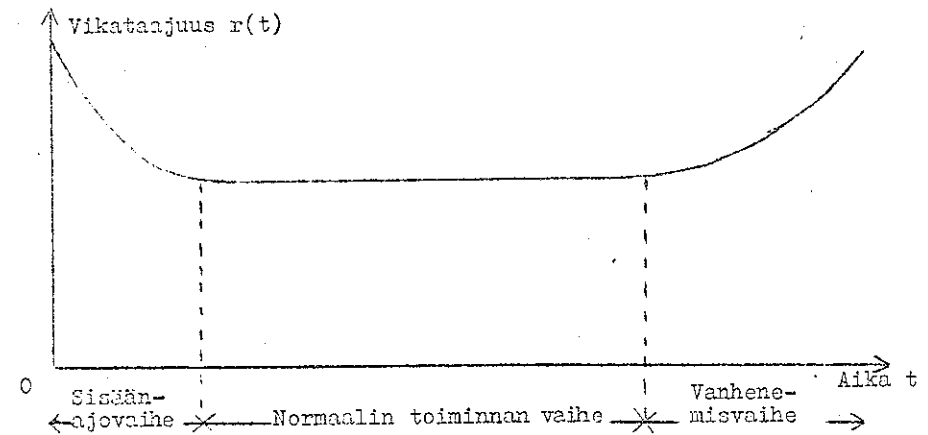
¹ Gnedenko et al., s. 79.

² Barlow ja Proschan, s. 10.

³ Barlow ja Proschan, s. 10.

⁴ Lloyd ja Lipow, ss. 136-137; Polovko, ss. 36-37.

Vikataajuusfunktion "klassillisena muotona" voidaan pitää kuvassa 2.2. esitettyä käyrää, jonka perusteella yksikön toiminta on perinteisesti jaettu kolmeen vaiheeseen.¹ Ensimmäisen, ns. sisäänajovaiheen aikana vikataajuus on suhteellisen suuri vaihtuen vähitellen tietylle tasolle, jolla se säilyy koko toisen vaiheen, ns. normaalin toiminnan vaiheen. Kolmannen, ns. vanhenemisvaiheen aikana vikataajuus jälleen kasvaa. Seuraavassa kappaleessa tarkastellaan yksityiskohtaisemmin erilaisia luotettavuusteoriassa kysymykseen tulevia jakautumia ja niitä luonnehtivia funktioita.



Kuva 2.2. Vikataajuusfunktion klassillinen muoto.

¹ Vrt. esim. Gnedenko et al., s. 85; Jorgenson et al., s. 133 ja Forsström, s. 7.

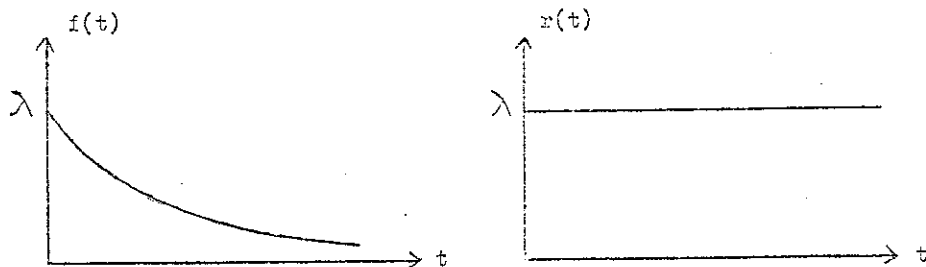
2.3. Tavallisimmat luotettavuusteoriassa esiintyvät jakautumat

Stokastisesti vioittuvan yksikön häiriöttömän toiminta-ajan malliksi on luotettavuusteoreettisissa tarkasteluissa esitetty varsin suurta joukkoa erilaisia teoreettisia todennäköisyysjakautumia. Jatkuvista jakautumista on kuitenkin vain seitsemän jakautumatyyppeä saavuttanut kiintuneen aseman niin teoreettisissa tarkasteluissa kuin käytännön sovellutuksissakin.¹ Nämä ovat: eksponentiaali-, gamma-, Weibull-, Rayleigh-, (katkaistu) normaali-, log-normaali- ja äärimmäisten arvojen jakautuma. Seuraavassa esitetään näiden jakautumien tiheys-, kertymä- ja vikataajuusfunktiot sekä luodaan lyhyt yleiskatsaus jakautumille tyypillisimpiin ominaisuuksiin.

2.3.1. Eksponentiaali-jakautuma

Eksponentiaali-jakautuman määrittelevät jakautumafunktiot

$$(2.12) \begin{cases} f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \\ F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \\ r(t) = \lambda \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$



Kuva 2.3. Eksponentiaali-jakautuman tiheys- ja vikataajuusfunktiot.

¹ Ks. esim. Barlow ja Proschan, ss. 12-17; Jorgenson et al., ss. 134-145; Polovko, ss. 74-95 ja Singpurwalla.

Eksponentiaali-jakautuma on luotettavuusteorian ylivoimaisesti "suosituin" jakautuma, sillä voidaan katsoa olevan tällä alueella suunnilleen sama merkitys kuin normaalijakautumalla klassillisen tilastotieteen alueella.¹ Tämä johtuu paitsi paljolti siitä, että eksponentiaali-jakautuman käsittely on matemaattisesti yksinkertaisinta, myös siitä, että on löydetty runsaasti niin empiirisiä kuin teoreettisiakin perusteita² eksponentiaali-jakautuman soveltuvuudesta häiriöttömän toiminta-ajan jakautuman malliksi.

Todettakoon lopuksi eksponentiaali-jakautuman kaksi merkittävintä ominaisuutta: toinen on vikataajuuden säilyminen vakiona ja toinen tulevan häiriöttömän toiminta-ajan riippumattomuus jo todetun toiminta-ajan pituudesta. Eksponentiaali-jakautuma on ainoa jakautuma, jolla on nämä ominaisuudet.³

2.3.2. Gamma-jakautuma

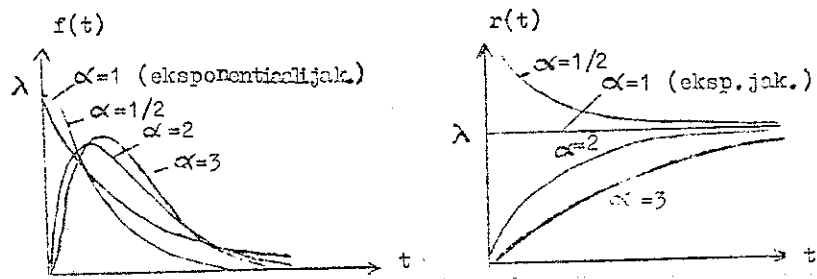
Gamma-jakautuman määrittelevät funktiot

$$(2.13) \begin{cases} f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} & (\lambda > 0, \alpha > 0) \\ F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, & \text{jos } \alpha \text{ on positiivinen kokonaisluku} \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t u^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du, & \text{muulloin} \end{cases} \\ r(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)! \sum_{n=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda t)^n}{n!}}, & \text{jos } \alpha \text{ on positiivinen kokonaisluku} \\ \frac{f(t)}{1 - F(t)}, & \text{muulloin} \end{cases} \end{cases}$$

¹ Singpurwalla, s. 186.

² Ks. esim. Barlow ja Proschan, ss. 13-15 ja s. 18.

³ Gnedenko, s. 87.



Kuva 2.4. Gamma-jakautuman tiheys- ja vikataajuusfunktiot

Gamma-jakautuma on eksponentiaali-jakautuman luonnollinen laajennus, se muodostuu tämän α -kertaisena konvoluutiona (parametrin arvolla $\alpha=1$ gamma-jakautuma palautuu eksponentiaali-jakautumaksi). Parametreista λ on ns. sijaintiparametri, α ns. muotoparametri (vrt. kuva 2.4.) Jakautuman vikataajuus on kasvava, mikäli $\alpha > 1$, sen ylärajana on tällöin λ . Parametrin arvoilla $\alpha < 1$ vikataajuus taas on vähenevä funktio (alarajana λ).

Gamma-jakautuman empiirisestä taustasta voidaan todeta, että jakautuma esiintyy silloin¹, kun vian syntymisen edellytyksenä on tietyn häiriön vaikuttaminen laitteeseen tarkalleen α -kertaa ja näiden häiriöiden esiintymistiheys noudattaa λ -parametrin Poisson-prosessia.

2.3.3. Weibull-jakautuma

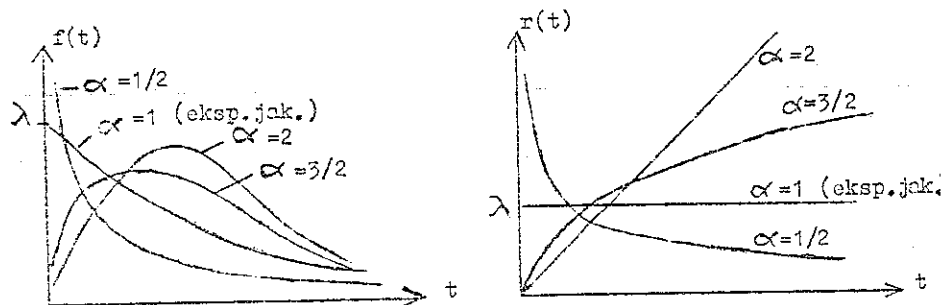
Weibull-jakautuman määrittelevät funktiot

$$(2.14) \begin{cases} f(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha} \\ F(t) = 1 - e^{-\lambda t^\alpha} \\ r(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} \end{cases} \quad (\alpha > 0, \lambda > 0)$$

Myöskin Weibull-jakautumaa voidaan pitää eksponentiaali-jakautuman kaksiparametrisenä laajenuksena, palautuahan se muotoparametrin

¹ Ks. esim. Barlow ja Proschan, s. 16.

arvolla $\alpha = 1$ eksponentiaali-jakautumaksi. Tiheysfunktio muistuttaa suuresti gamma-jakautuman tiheysfunktioita, vikataajuus on samoin parametrin arvoilla $\alpha < 1$ vähenevä ja arvoilla $\alpha > 1$ kasvava, kuitenkin nyt niin, että kasvu on rajoittamaton ja vähenevässä tapauksessa vikataajuuden alarajana on 0 gamma-jakautuman λ :n asemesta.



Kuva 2.5. Weibull-jakautuman tiheys- ja vikataajuusfunktiot.

Weibull-jakautuman teoreettisista perusteista voidaan todeta, että se on johdettavissa satunnaisotoksen pienimmän havainnon asymptoottisena jakautumana, kun perusjoukon jakautuma on tiettyä tyyppiä.¹ Kaksiparametrisen Weibull-jakautuman vikataajuusfunktion moni-ilmeisyys on tehnyt tästä jakautumasta viime aikojen luotettavuusteoreettisen jakautumatutkimuksen ehkä suosituimman jakautumatyypin.

2.3.4. Rayleigh-jakautuma

Rayleigh-jakautuman määrittelevät funktiot

$$(2.15) \begin{cases} f(t) = \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \\ F(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \\ r(t) = \frac{t}{\sigma^2} \end{cases}$$

¹ Ks. esim. Singpurwalla, s. 187 ja Gnedenko, ss. 91-92.

Huomataan helposti, että Rayleigh-jakautuma on Weibull-jakautuman yksiparametrinen erikoistapaus: parametrilla α on arvo 2 (ja lisäksi on merkitty $2\lambda = 1/\sigma^2$). Jakautuman tiheys- ja vikataajuusfunktioiden muoto nähdään kuvasta 2.5, kun valitaan siitä käyrät, joissa $\alpha = 2$. Vaikka Rayleigh-jakautuma onkin Weibull-jakautuman erikoistapaus, pidetään sitä useissa tarkasteluissa omana jakautumatyypinään. Perusteluna tälle on jakautuman saavuttama merkittävä asema eräissä rinnan kytkettyjä komponentteja sisältävissä systeemeissä koskevilla luotettavuustarkasteluilla.¹

2.3.5. Katkaistu normaalijakautuma

Luotettavuusteoriassa esiintyvien satunnaissuureiden luonteesta johtuen (satunnaissuureet ovat aikasuureita) normaalijakautuman sijasta tulee kysymykseen origosta katkaistu normaalijakautuma, jonka määrittävät funktiot

$$(2.16) \quad \begin{cases} f(t) = \frac{b}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} = b \varphi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \\ F(t) = \frac{b}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du = b\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \quad (\mu > 0, \sigma > 0) \\ r(t) = \frac{e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\int_t^{\infty} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du} = \frac{\varphi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)} \end{cases}$$

missä vakio b määräytyy niin, että

$$(2.17) \quad \int_0^{\infty} f(t) dt = 1$$

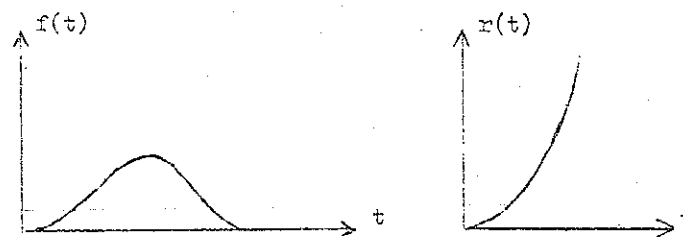
on voimassa. Tällöin on²

$$(2.18) \quad b = \sigma \left\{ \int_0^{\infty} \varphi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) dt \right\}^{-1}.$$

¹ Polovko, s. 84.

² Jorgenson et al., s. 138.

Yhtälöissä (2.16) ja (2.18) on $\varphi(u)$:lla ja $\Phi(u)$:lla merkitty tavallisen $(0,1)$ -normaalisen satunnaissuureen tiheys- ja kertymäfunktioita.



Kuva 2.6. Katkaistun normaalijakautuman tiheys- ja vikataajuusfunktioita.

Katkaistulla normaalijakautumalla on todettu olevan jonkin verran sovellutusmahdollisuuksia tietyn tyyppisten yksiköiden häiriöttömän toiminta-ajan mallina (mm. sähkölamput ja bussien moottorit).¹ Huomattavasti tärkeämpi merkitys jakautumalla on kuitenkin korjausten kestoajan kuvaajana.² Terminologian suhteen on tietysti todettava, että $f(t)$ ja $F(t)$ ovat tällöin korjauksen kestoajan tiheys- ja kertymäfunktioita ja $r(t)$ korjauksen valmistamisintensiteetti.³

2.3.6. Log-normaalinen jakautuma

Log-normaalista jakautumaa luonnehtivat funktiot ovat

$$(2.19) \quad \begin{cases} f(t) = \frac{1}{t \ln g \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln t - \ln \tilde{T})^2}{2(\ln g)^2}} = \frac{1}{t \ln g} \varphi\left(\frac{\ln t - \ln \tilde{T}}{\ln g}\right) \\ F(t) = \frac{1}{t \ln g \sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{(\ln u - \ln \tilde{T})^2}{2(\ln g)^2}} du = \Phi\left(\frac{\ln t - \ln \tilde{T}}{\ln g}\right) \\ r(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{\varphi\left(\frac{\ln t - \ln \tilde{T}}{\ln g}\right)}{t \ln g [1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \ln \tilde{T}}{\ln g}\right)]} \end{cases}$$

¹ Polovko, s. 90, Jorgenson et al., s. 136.

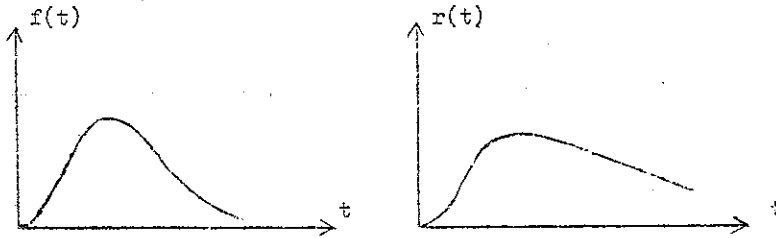
² Jorgenson et al., s. 136.

³ Kulshrestha (I) - (V) käyttänyt nimitystä repair rate.

missä

\bar{T} = geometrinen keskiarvo (satunnaissuureen logaritmien keskiarvon antilogaritmi)

g = geometrinen hajonta (satunnaissuureen logaritmien hajonnan antilogaritmi)



Kuva 2.7. Log-normaalisen jakautuman tiheys- ja vikataajuusfunktiot.

Yhtälöistä (2.19) nähdään, että satunnaissuureen jakautuma on log-normaalinen silloin, kun sen logaritmien jakautuma on normaalin. Vikataajuusfunktiota tarkasteltaessa huomataan sen olevan aluksi kasvava, kunnes se myöhemmin muuttuu väheneväksi. Funktion kulun kehitys on siis täysin päinvastainen kuin vikataajuuden klassillisen muodon yhteydessä esitettiin. Onkin todettava, että log-normaalisen jakautuman merkitys häiriöttömän toiminta-ajan mallina on varsin vähäinen; pysyvän asemansa luotettavuusteoreettisessa tutkimuksessa jakautuma on saavuttanut hyvän korjausajan kuvaajana.¹

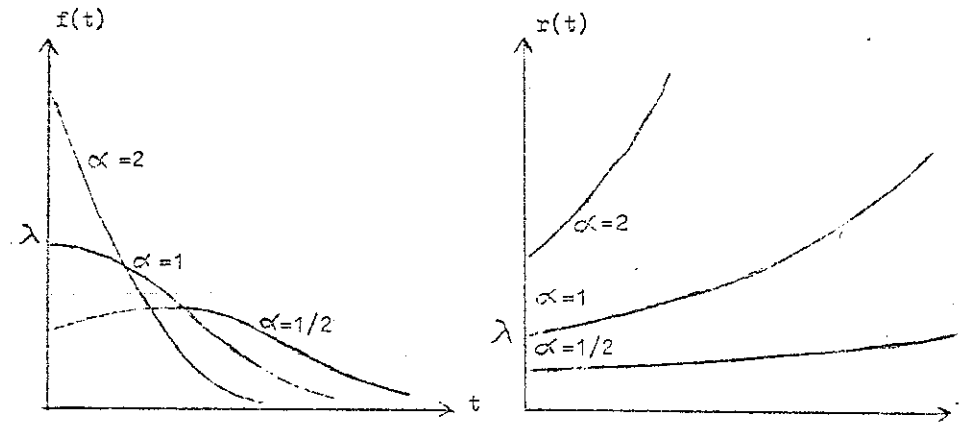
2.3.7. Äärimmäisten arvojen jakautuma

Äärimmäisten arvojen jakautuma on yleisimmässä, kaksiparametrisessä muodossaan

$$(2.20) \begin{cases} f(t) = \alpha \lambda e^{-\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)^{-\alpha} \\ F(t) = 1 - (e^{\lambda t} - 1)^{-\alpha} \\ r(t) = \alpha \lambda e^{-\lambda t} \end{cases} \quad (\alpha > 0, \lambda > 0)$$

¹

Barlow ja Proschan, s. 11.



Kuva 2.8. Äärimmäisten arvojen jakautuman tiheys- ja vikataajuusfunktiot.

Äärimmäisten arvojen jakautuma tulee yleensä kysymykseen, kun vain aiheuttava ilmiö on riippuvainen satunnaissuureen pienimmästä arvosta ja perusjoukon jakautuma on eksponentiaalinen.¹ Sovellutusalueina voidaan mainita erityisesti korroosion vaikutuksesta syntyvät yksikön vioittumiset (neste- ja kaasuputket yms).²

2.3.8. Jakautumien yhdistäminen

Kuten vikataajuusfunktioiden muodoista edellä on käynyt ilmi, tuskin mikään esitetystä jakautumista pystyy toimimaan yksikön häiriöttömän toiminta-ajan mallina koko yksikön elinajan. Sisäinajo vaiheen aikana vikojen ilmaantuminen noudattaa lähinnä jotain vähenevää vikataajuuden omaavaa jakautumaa (esim. gamma- tai Weibull-jakautumaa). Normaalien toiminnan aikana jakautumatyyppi on lähinnä eksponentiaalinen ja vanhenemisvaiheen aikana jokin kasvava vikataajuuden omaava jakautuma (esim. katkaistu normaalijakautuma) sopii parhaiten malliksi.

¹ Singpurwalla, s. 187.

² Lloyd ja Lipow, s. 140.

Jakautumien yhdistäminen tarjoaa nyt kuitenkin keinon, jolla saadaan aikaan koko yksikön elinajan kattava häiriöttömän toiminta-ajan jakautuma. Tarkastellaan tästä esimerkkinä kahden eksponentiaali-jakautuman yhdistämistä.¹ Olkoon

$$(2.21) \begin{cases} f(t) = C_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \\ F(t) = 1 - C_1 e^{-\lambda_1 t} - C_2 e^{-\lambda_2 t} \\ r(t) = \frac{C_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}} \end{cases}$$

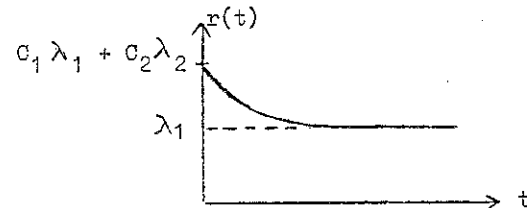
missä vakiot C_1 ja C_2 on valittu niin, että $C_1 + C_2 = 1$ ja että $f(t)$ täyttää tiheysfunktioille asetetut edellytykset. Oletetaan vielä, että $\lambda_1 < \lambda_2$. Tällöin huomataan helposti, että

$$(2.22) \quad \lim_{t \rightarrow 0} r(t) = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) C_2 > \lambda_1$$

ja

$$(2.23) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lambda_1$$

Vikataajuusfunktion muoto on näin kuvassa 2.9. esitetyn luonteinen



Kuva 2.9. Kahden eksponentiaali-jakautuman yhdistelmän vikataajuus

Tuloksena on siis jakautumatyyppi, joka sisänaajo- ja normaalin toiminnan vaiheen osalta hyvin vastaa vikataajuusfunktion klassillista muotoa. Vastaavalla tavalla eri jakautumia yhdistelemällä saadaan uusia jakautumia, joilla on kulloinkin halutun kaltainen vikataajuusfunktio.

¹ Polovko, s. 94.

2.3.9. Yleinen jakautuma

Edellisissä jaksossa on luotu yleiskatsaus luotettavuusteorian keskeisimpiin jakautumatyyppihin ja etsiä niiden perusominaisuuksiin. Yhteisenä piirteenä niille kaikille jakautumatyypeille on, samoin kuin niiden jaksossa 2.3.8 esitetyllä tavalla saaduille yhdistelmille, että mikä tahansa kolmesta jakautumaa luonnehtivasta funktiosta $f(t)$, $F(t)$ tai $r(t)$ on riittävä jakautuman identifioimiseksi, mm. t. kaksi saadaan sen jälkeen yhtälöistä (2.5) - (2.9). Kuten edellä jo on todettu, luotettavuusteoreettisissa tarkasteluissa on keskeisimmässä asemassa vikataajuusfunktio $r(t)$. Jäljempänä vikataajuusfunktio onkin yleensä lähtökohdana, tiheysfunktio esimerkiksi saadaan tämän jälkeen yhtälöstä (2.9).

Edellä esitetyn perusteella voidaankin nyt todeta, että vikataajuuden oletaminen mielivaltaiseksi (kuitenkin säännölliseksi) ajan funktioksi tai tiheysfunktion osittainen muodossa (2.9), missä $r(t)$ on tällä tarkemmin spesifioimaton vikataajuusfunktio, mahdollistaa kaikkien jatkuvien, tiheysfunktion omaavien jakautumien käsitteilyn saman mallin puitteissa. Tässä muodossa esitetystä, mainitut jatkuvuus- ja tiheysfunktion olemassaolovaatimukset täytettävästä jakautumasta käytetään jäljempänä nimitystä yleinen jakautuma. Nimitys viittaa nyt siihen, että tämän jakautuman avulla suoritettavat tarkastelut kattavat mm. kaikki jaksossa 2.3.1. - 2.3.7. esitetyt jakautumatyyppit samoin kuin jaksossa 2.3.8. esitetyt jakautumien yhdistelmät. Tarkastelut saadaan liitettyä kussakin yksittäistapauksessa kysymyksessä olevaan jakautumaan sopivalla vikataajuusfunktion $r(t)$ valinnalla.

3. TUTKIMUKSEN RAJAUS JA TÄSMENNYS SEKÄ SYSTEMIN KUVAUS JA SITÄ KOSKEVAT OLETTAMUKSET

3.1. Tutkimuksen lähtökohta ja tavoitteet.

Tarkastelujen kohteena on perusrakenteeltaan tietyssä muodossa esitettävissä oleva systeemi, jonka käyttäytymistä tarkastellaan erilaisissa olosuhteissa erityisesti luotettavuuden näkökulmasta. Systeemille antavat leimansa stokastisesti, annettujen todennäköisyyslakien mukaisesti tapahtuvat komponenttien vioittumiset. Myös korjausten odotus- ja valmisteluajoilla sekä varsinaisilla korjausajoilla oletetaan olevan tietyt tunnetut jakautumat. Systeemissä esiintyvät satunnaissuureet sekä niitä koskevat oletukset esitetään yksityiskohtaisesti kappaleessa 3.3. Systeemissä vallitsevat erilaiset olosuhteet syntyvät systeemin tietyn strategisen yksikön rakennerratkaisun ja systeemin korjauksessa noudatettavan politiikan perusteella. Tutkittavina rakennerratkaisuna ovat tietyn kriittillisen komponentin varmistusmenetelmät: aktiivinen ja passiivinen rinnankytkentä. Korjauspolitiikkoina tarkastellaan ns. minimi- ja täyskorjauspolitiikkoja. Systeemin rakenteen yleismuoto ja "politiikkamuuttujat" (rinnankytkennän laatu ja korjauspolitiikka) esitellään seuraavassa kappaleessa 3.2

Systeemin lopullinen yksilöinti on tapahtunut vasta kun varmistusmenetelmä ja korjauspolitiikka on kiinnitetty. Tämän suorittaminen johtaa neljään perussysteemin erikoistapaukseen. Luvuissa 4 ja 5 suoritetaan näitä koskevat tarkastelut. Kussakin tapauksessa määritellään luotettavuuden määrittämisen kannalta tarkoituksenmukaisella tavalla systeemin tilat, laaditaan systeemin käyttäytymisen kuvaamiseksi osittaisdifferentiaali-differenssiyhtälöryhmä (ns. tilayhtälöt) ja ratkaistaan nämä Laplace-muunnoksia ja niiden käänteismuunnoksia hyväksi käyttäen. Tilayhtälöiden ratkaisusta johdetaan edelleen systeemin luotettavuutta kuvaavat tunnusluvut. Lopuksi osoitetaan, että systeemi saavuttaa hyvin yleisillä ehdoilla stationäärin vaiheen ja että tämän vaiheen ratkaisut ovat useimpien systeemin kuvauksessa käytettyjen jakautumien osalta niiden tyyppistä riippumattomat, ratkaisuissa esiintyvät vain jakautumien odotusarvot.

Luvussa 6 suoritetaan johdettujen luotettavuuslausekkeiden tarkempi analysointi. Erilaisista olosuhteista huolimatta luotettavuuden ilmoittava lauseke voidaan kaikissa tapauksissa saattaa tiettyyn ulkonäköisesti yhdenmukaiseen muotoon, missä luotettavuuden riippuvuus eräistä systeemin keskeisistä suureista käy ilmi. Eri systeemin luotettavuuksia voidaan tämän perusteella myös verrata ja näin saadaan selvä kuva toisaalta eri varmistusjärjestelmien ja toisaalta eri korjauspolitiikkojen vaikutuksesta tähän systeemin toiminnan kannalta keskeiseen ominaisuuteen.

Tutkimuksen perustilanteen, systeemin tietyn tyyppisen yleisrakenteen ja systeemin tarkastelun mainituissa neljässä erikoistapauksessa, ts. oikeastaan neljän spesifisen systeemin konstruoimain, on esittänyt intialainen D. K. Kulshrestha artikkelissaan.¹ Kulshrestha on kuitenkin tarkastellut esittämäänsä systeemiä melko ankarien ja rajoittavien oletusten vallitessa. Lisäksi Kulshresthan oletukset poikkeavat eri tapauksissa toisistaan niin, että eri systeemit eivät ole keskenään suoraan vertailukelpoisia. Tässä työssä olosuhteita on yleistetty: on asetettu entistä vähemmän yleisyyttä rajoittavia vaatimuksia systeemin satunnaissuureiden suhteen ja on otettu mukaan uusia stokastisia suureita. Samalla on kunkin tapauksen oletukset yhdenmukaistettu, jonka tuloksena tarkastettavat erityissysteemit on saatu keskenään vertailukelpoisiksi. Tehtyjen yleistysten yksityiskohtainen esittely suoritetaan kappaleessa 3.3, missä yhteydessä systeemin stokastiset aineksot muutenkin esitetään.

Kulshresthan tutkimuksissa esiintyvien rajoittavien lähtöoletusten melko laaja karsinta ja reaalisysteemiä kuvaavan mallin laajennus ovat väistämättä johtaneet siihen, että Kulshresthan soveltamat tarkastelu- ja ratkaisumenetelmät eivät sellaisenaan ole tässä tutkimuksessa käyttökelpoisia. Täysin uusien kysymysten eteen joudutaan mm. ratkaistaessa systeemin käyttäytymistä kuvaavaa osittaisdifferentiaali-differenssiyhtälöryhmää.² Sopivilla systeemiä kuvaavien suureiden valinnoilla on kuitenkin

¹ Kulshrestha I, II, III ja V.

² Vrt. jaksossa 3.3.1 ja jaksossa 4.1.3.3 sivulla 42 esitetyt tarkemmat selvitykset.

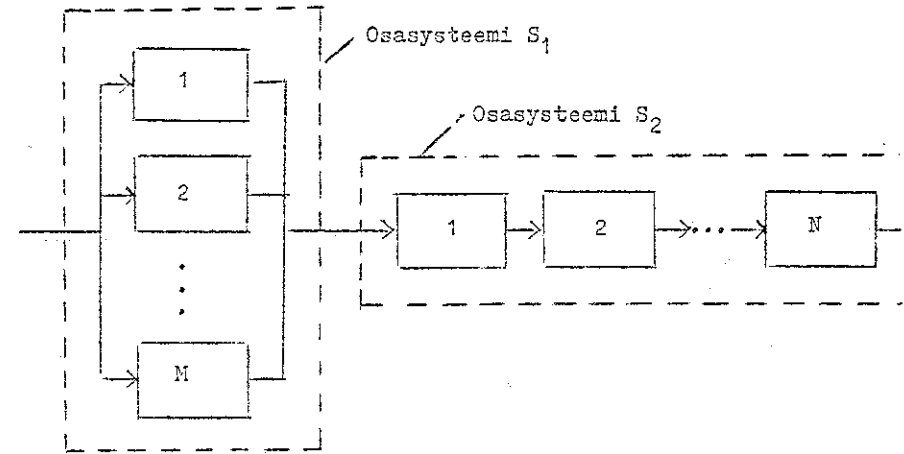
päästy siihen, että ratkaisut löytyvät suljetussa muodossa myös näissä yleisemmissä puitteissa. Systeemin tila-käsitettä ei esiinny Kulshresthan tarkasteluissa lainkaan. Sen käyttöön otto tässä yhteydessä on kuitenkin vahvasti perusteltavissa systeemin kuvauksen ja luotettavuuden määrityksen tullessa tällä tavoin selkeäksi ja johdonmukaiseksi.

Tehdyillä yleistyksillä on tuloksia ja sovellutusmahdollisuuksia ajatellen huomattava merkitys. Mitä yleisempiä jonkin reaali-systeemin kuvauksessa käytetyn mallin oletukset ovat, sitä laajempia ovat tietysti mallin soveltamismahdollisuudet käytännön tilanteisiin. Tässä tapauksessa yleistysten merkitys tulee erityisen selvästi näkyviin stationäärisen vaiheen ratkaisuissa. Nämä osoittautuvat lopulta systeemin jakautumatyypeistä riippumattomiksi, riippuvuutta on vain jakautumien eräistä tunnusluvuista, lähinnä odotusarvoista. Tärkeänä on myös nähtävä eri tapauksien oletusten yhdenmukaistaminen. Tämä vasta tarjoaa mahdollisuuden vertailujen suorittamiseksi ja erilaisten varmistusten ja korjauspolitiikkojen vaikutusten tutkimiseksi.

3.2. Tarkasteltavan systeemin kuvaus

3.2.1. Systeemin rakenne

Seuraavissa luvuissa suoritettavat tarkastelut kattavat minkä tahansa jatkuvassa toiminnassa olevan, useista erillisistä laitteista koostuvan systeemin, joka voidaan esittää seuraavassa muodossa. Systeemi koostuu kahdesta määrätyn rakenteen omaavasta osasysteemistä S_1 ja S_2 . Koko systeemin toimintakyvyn edellytyksenä on, että kummatkin osasysteemit ovat toimintakunnossa. Osasysteemin S_1 muodostavat M keskenään samanlaisia komponenttia, jotka ovat kytketyt rinnakkain, ts. S_1 pystyy toimimaan niin kauan kuin yksikin sen komponenteista on toimintakykyinen. Osasysteemi S_2 taas koostuu N :stä sarjaan kytketystä komponentista, ts. yhdenkin S_2 :n komponentin vioittuminen saattaa S_2 :n ja samalla koko systeemin toimintakyvyttömäksi. S_2 :n komponenttien keskinäiselle samanlaisuudelle tai erilaisuudelle ei aseteta rajoituksia. Systeemin rakenne luotettavuuskaaviomuodossa käy ilmi kuvasta 3.1.



Kuva 3.1. Systeemin luotettavuuskaavio.

Yllä kuvattu systeemi saattaa aluksi tuntua varsin spesifiseltä ja rajoittuneelta. Mutta kun otetaan huomioon, että komponenttien koostumuksesta ei ole tehty mitään oletuksia, saa systeemi huomattavasti yleispätevämmän luonteen. Mikä tahansa S_2 :n komponentti k voi esimerkiksi koostua useasta rinnakkaisesta laitteesta, ts. olla rakenteeltaan osasysteemin S_1 kaltainen. Valitun systeimirakenteen edellyttämiä tarkasteluja varten vikojen ilmaantumista, korjauksen odotusaikaa ja korjaustyön kestoaikaa koskevat laitekohtaiset tiedot on nyt vain yhdistettävä koko komponenttia k koskeviksi. Myöskään S_1 :n komponenttien sisäiselle rakenteelle ei aseteta muita rajoituksia kuin että komponentit ovat keskenään samanlaiset. Systeemin voidaan näin ollen katsoa kuvaavan mitä tahansa reaali maailman systeemiä, jonka toiminnan perustana ja edellytyksenä on $(N + 1)$:n itseenäisen systeemin osan toiminta (S_1 ja S_2 :n N komponenttia). Erityinen mielenkiinto on kohdistunut näistä yhteen (S_1 :een) ja sen toiminnan varmistamiseen. Valittu mallin rakennemuoto korostaa juuri tätä seikkaa.

3.2.2. Osasysteemien kytkennät

Osasysteemin S_2 rakenne on kaikissa tilanteissa sama, S_2 koostuu N :stä sarjaan kytketystä komponentista. Sen sijaan osasysteemissä S_1 , joka erotettiin omaksi yksiköksi komponentin varmistustavan vaikutuksen selvittämiseksi, tarkastellaan kahta rinnankytkennän muotoa: aktiivinen ja passiivinen rinnankytkentä.

Aktiivisella rinnankytkennällä¹ tarkoitetaan kytkentää, jossa kaikki rinnakkaiset, keskenään identtiset komponentit kytketään samanaikaisesti toimintaan. Kullakin komponentilla on siis sama vioittumistodennäköisyys ja kokonaisuus toimii niin kauan kuin yksikin sen komponenteista toimii.

Passiivisella rinnankytkennällä² muodostettu osasysteemi S_1 toimii siten, että M :stä rinnakkaisesta komponentista vain yksi on kerrallaan toiminnassa. Toiminnassa olevan komponentin vioittutua seuraava varalla oleva komponentti kytkeytyy toimintaan. Kytkentämuoto edellyttää automaattista ohjauslaitetta, joka suorittaa siirtymisen komponentista toiseen. Tämän ohjauslaitteen oletetaan seuraavassa olevan täydellisesti luotettavan. Passiivisessa rinnankytkennässäkin osasysteemi toimii niin kauan kuin vähintään yksi komponenteista on kunnossa. Huomattavimpana erona aktiiviseen rinnankytkentään verrattuna matemaattisten tarkastelujen kannalta on nyt, että varalla olevat S_1 :n komponentit eivät "vanhene" reservissäoloaikanaan.

Luotettavuusteoreettisessa kirjallisuudessa on esitetty useita muitakin rinnankytkennän muotoja, esimerkiksi $ns. (k, n)$ -strukturi³, mutta seuraavassa rajoitutaan kahden esitetyn perustapauksen käsittelyyn.

¹ Nimityksen suhteen ks. Venho, s. 67; vastaavista englanninkielisistä nimityksistä yleisin "parallel redundancy", ks. esim. Barlow ja Proschan, s. 162.

² Nimityksen suhteen ks. Venho, s. 68; englanninkielisistä termeistä yleisin "standby redundancy", ks. esim. Barlow ja Proschan, s. 162.

³ Kytkentämuoto, jossa on n rinnakkaista komponenttia ja kokonaisuus toimii niin kauan kuin vähintään k komponenttia on kunnossa, Barlow ja Proschan, s. 216.

3.2.3. Korjauspolitiikat

Korjaustoiminnasta oletetaan, että vioittunutta komponenttia voidaan korjata vain, kun koko systeemi on pysähtyksissä. Osasysteemin S_2 kohdalla komponentin vioittuminen toisaalta aina merkitsee koko systeemin toiminnan pysähtymistä, joten S_2 :n osalta korjaustoimenpiteisiin ryhdytään tarkalleen silloin, kun jokin sen komponenteista on vioittunut. Korjaustyön luonnetta ei tältä osin muuten määritellä tarkemmin, korjaustoimenpiteenä voi olla koko komponentin vaihto, komponentin tietyn osan vaihto tai muunlainen työ. Olennaista on vain, että komponentti korjauksen jälkeen on luotettavuusnäkemyksessä uuden veroinen.

Jo systeemin rakennemuoto korostaa S_1 :n komponenttien keskeistä asemaa koko systeemin toiminnan tarkastelussa, onhan siinä kiinnitetty erityistä huomiota systeemin tämän osan varmistamiseen rinnakkaisten varakomponenttien muodossa. Myös korjauspolitiikojen osalta kohdistetaan päähuomio S_1 :n komponenttien korjaustoiminnan järjestämiseen. S_1 :n komponenteista oletetaan, että korjaustapahtumaan liittyvät suuret (kustannukset, työn kesto- aika jne.) ovat olennaisesti eri suuruusluokkaa siitä riippuen, onko komponentti ehtinyt rikkoontua vai kunnostetaanko se sopivan tilaisuuden tullen jo ennen vioittumista. Käytännössä tämä merkitsee sellaisen huolto- tai komponentin vaihto-ohjelman soveltamista, jossa jokaisen korjaustapahtuman yhteydessä S_1 :n vielä toimintakelpoiset komponentit vaihdetaan uusiin tai saate- taan sopivilla huoltotoimenpiteillä uusien veroisiksi. Käytetään näistä toimenpiteistä seuraavassa nimitystä S_1 :n ennakkohuolto-ohjelma. Tämän ennakkohuolto-ohjelman oletetaan olevan mukana kummassakin varainoisten tarkastelujen kohteena olevassa vioittuneitten komponenttien korjauspolitiikassa, minimi- ja täyskorjauspolitiikassa.

Minimikorjauspolitiikalla tarkoitetaan tässä politiikkaa, jonka mukaan S_1 :n vioittuneiden komponenttien korjaukseen ryhdytään vasta silloin, kun se systeemin toiminnan jatkamisen kannalta on välttämätöntä, ts. kun viimeininkin S_1 :n M :stä komponentista on tulleet toimintakyvyttömäksi. S_2 :n komponenttien korjauksessa noudatetaan edellä esitettyjä yleisiä periaatteita eli S_2 :ssa

ilmennyt vika johtaa heti korjaustoimenpiteisiin. Samoin kukin vikatilanne johtaa S_1 :n ennakkohuolto-ohjelman läpikäymiseen.

Täyskorjauspolitiikassa¹ kiinnitetään edellistä vielä suurempaa huomiota osasynteesiin S_1 toiminnan varmistamiseen. Jokaisen S_2 :n synnyttämän systeemin toiminnan keskeytymisen yhteydessä korjataan paitsi viallinen S_2 :n komponentti myös sillä hetkellä mahdollisesti viallisina olevat S_1 :n komponentit (vaikka S_1 pystyisikin jatkamaan toimintaansa vielä vioittumattomien komponenttiansa turvin). Täyskorjauspolitiikka johtaa näin entistä harvempiin S_1 :n taholta tuleviin toimintakeskeytyksiin. Muilta osin noudatetaan edellä esitettyjä korjaustoiminnan yleisiä periaatteita.

Edellä esitetyt minimi- ja täyskorjauspolitiikka eroavat Kulshresthan esittämistä vastaavista politiikoista sikäli, että niissä on mukana em. S_1 :n ennakkohuolto-ohjelma. Kahdessa tapauksessa² Kulshrestha on olettanut S_1 :n komponenttien vikataajuusfunktiot vakioiksi eli häiriöttömän toiminta-ajan jakautuman eksponentiaaliseksi, jolloin vielä toimivan komponentin uusiminen ei ole mielekäästä (komponentin tuleva toiminta ei riipu komponentin jo saavuttamasta iästä eksponentiaalijakautuman tapauksessa). Kahdessa muussa tapauksessa³ vikataajuusfunktio on Kulshresthallakin ajan funktio ja näiden suhteen onkin todettava, että korjauspolitiikkoihin on tällöin sisällytettävä em. ennakkohuolto-ohjelma, jotta Kulshresthan esittämät tulokset olisivat voimassa.⁴

3.3. Systeemin satunnaisuureita koskevat oletukset

Edellä on jo lyhyesti viitattu tekijöihin, jotka tekevät systeemistä stokastisen systeemin. Komponentin häiriötön toiminta-aika, korjauksen alkuun kuluva odotus- ja valmistelu-aika sekä varsinainen korjausaika oletetaan kaikki satunnaisuureiksi, joiden

¹ Kulshresthalla "opportunistic repair policy", ks. Kulshrestha II

² Kulshrestha I ja V.

³ Kulshrestha II ja III.

⁴ Esimerkiksi yhtälöt (5) s. 30 Kulshrestha II ja (4) s. 162 Kulshrestha III edellyttävät mainittua ennakkohuolto-ohjelmaa ollakseen voimassa.

jakautumat tunnetaan. Jakautumat identifioidaan seuraavassa "intensiteettifunktion" perusteella: häiriöttömän toiminta-ajan yhteydessä vikataajuus, odotusajan yhteydessä odotuksen päättymisintensiteetti ja korjausajan jakautumalla korjauksen valmistamisintensiteetti. Tämä edellyttää, kuten aiemmin on jo todettu, jatkuvaa, tiheysfunktion omaavaa jakautumaa. Muuten jakautumatyypeille ei aseteta mitään rajoituksia. Tiheysfunktio esitetään aina intensiteettifunktion avulla muodossa (2.9). Mallin yleisyys kaikki jatkuvuusvaatimukset täyttävät jakautumat kattavaksi tetaan jättämällä intensiteettifunktiot tarkemmin spesifioimatta.

3.3.1. Vian esiintyminen

Systeemin komponenteissa ilmenevien vikojen esiintymistä kuvaamaan käytetään häiriöttömän toiminta-ajan jakautumaa. Häiriötön toiminta-aika voi olla sama kuin komponentin elinikä (jos korjausmenetelmä on komponentin vaihto), mutta yleensä se on käsitteensä kuitenkin yleisempi. Komponenttien häiriöttömien toiminta-aikojen jakautumista tehdään seuraavat oletukset.

Osasynteesin S_1 komponentit ovat keskenään identtiset, joten niillä on sama jakautumakin. Jakautuman luonteeseen nähden ei aseteta muita rajoituksia kuin jatkuvuus ja tiheysfunktion olemassaolo, jakautuman tyyppi voi olla mielivaltainen. Tässä kohtaa onkin nähtävissä käytettyjen menetelmien ja ratkaisun löytymisen sekä sen yleispätevyys kannalta yksi tärkeimmistä asioista nyt esitettävään työhön ja lähtökohtana olleiden Kulshresthan töiden välillä. Kulshresthalla on vain kahdessa yksinkertaisimmassa tapauksessa sallittu muukin jakautuma kuin eksponentiaalijakautuma. Näistä toinen¹ on ratkaistu suljetussa muodossa loppuun asti, toisessa² on päädytty eräänlaiseen rekursiiviseen, numeeriset tulokset mahdollistavaan ratkaisualgoritmiin. Kahdessa muussa tapauksessa³ on jakautumatyypiksi sallittu vain eksponentiaalijakautuma. Siirtyminen eksponentiaalijakautumasta yleiseen,

¹ Kulshrestha III.

² Kulshrestha II.

³ Kulshrestha I ja V.

kaikki jatkuvus- ja tiheysfunktion olemassaolovaatimukset täyttävät jakautumat kattavaan esitysmuotoon muuttaa systeemin tilayhtälöitä ratkaisevasti; tavallisista differentiaaliyhtälöistä joudutaan osittaisdifferentiaaliyhtälöihin ja osittaisdifferenssiyhtälöt saavat muodon, jossa kertoimet ovat muuttuvia, vieläpä niin, että tämä muuttuvuus ilmenee kertoimeen sisältyvän funktion tyyppin muuttumisena. Käyttämällä apuna sopivasti määriteltäviä tiheysfunktioilausekkeitä voidaan tarkastelut saattaa näillä yleisemmälläkin olettamuksilla loppuun saakka suljetussa muodossa.

Osasysteemin S_2 komponenttien oletetaan noudattavan eksponentiaalista häiriöttömän toiminta-ajan jakautumaa, kukin kuitenkin omine parametreineen. Aivan yleisessä tapauksessa matemaattiset tarkastelut muodostuisivat kohtuuttoman hankaliksi, suljetussa muodossa kenties mahdottomiksi saattaa loppuun. Toisaalta eksponentiaalijakautuman käytölle tässä yhteydessä on olemassa vahvat perusteensa. Jaksossa 2.3.1. viitattiin jo selvityksiin, joissa on esitetty sekä empiirisiä että teoreettisia perusteluja eksponentiaalijakautuman soveltuvuudesta melko yleisin edellytyksin häiriöttömän toiminta-ajan malliksi. Tarkastelemalla vikataajuusfunktion yleistä, klassillista muotoa (vrt. kuva 2.2.) voidaan lisäksi todeta, että niissäkin tapauksissa, joissa jakautuma ei ole eksponentiaalinen, suurimman osan ajasta eksponentiaalijakautuma käy kuitenkin varsin hyväksi approksimaationa. Lopuksi on vielä korostettava, että tarkastelujen päämielenkiinto on osasysteemissä S_1 , jolloin sen käsittely mahdollisimman yleisin olettamuksin on kuitenkin tärkeintä. Tiukemmat olettamukset S_2 :ssä eivät tällöin tulosten kannalta nouse kovin merkittäväksi tekijäksi.

3.3.2. Korjausaika

Myöskin korjausaika oletetaan satunnaissuureeksi. Kullekin komponentille on oma jakautumansa (S_1 :n komponenteille luonnollisesti sama), jonka suhteen asetetaan ainoastaan jatkuvus- ja tiheysfunktion olemassaolovaatimukset. Tyypillisimpiä korjausajan jakautumia ovat katkaistu normaalijakautuma ja log-normaalinen jakautuma, mutta muutkin jakautumatyyppit voivat tulla kysymykseen

Jakautuman identifioimiseen käytetään seuraavassa pääasiassa korjauksen päättymisintensiteettiä, joka on vikataajuutta vastaava funktio korjausajan jakautuman yhteydessä. Korjausajan tiheysfunktio on tällöin muotoa (2.9). Esitysmuoto mahdollistaa kaikkien vaatimukset täyttävien jakautumien käsittelyn saman mallin puitteissa.

3.3.3. Korjauksen odotusaika

Sen jälkeen kun vika on syntynyt ja se on todettu, kestää yleensä jonkin aikaa ennen kuin varsinainen korjaustyö voi alkaa. Syitä on useampiakin. Korjausmiehistö voi olla kiinnitettynä johonkin muuhun työhön. Varaosalla voi olla tietty toimitusaika tai korjaustyö vaatii uusia piirustuksia tms. Kaikki tällaiset toimenpiteet on esillä olevassa mallissa huomioitu korjauksen odotusaika valmisteluajana, joka on oletettu satunnaissuureeksi. Odotusaajan jakautumalle asetetuista vaatimuksista on voimassa, mitä korjausajan jakautuman yhteydessä on esitetty.

Kulshrestha on ottanut odotusaajan huomioon vain yhdessä¹ mainituista neljästä tapauksesta, siinäkin jakautumatyyppiä sallitaan vain eksponentiaalijakautuma. Odotusaajan ottamiselle mukaan yleisessä muodossaan on kuitenkin olemassa perustelunsa. Edellä jo todettiin sen reaali maailmasta juontuva tausta. Seuraavissa luvuissa se osoittautuu myös teoreettisesti mielenkiintoiseksi. Voidaan nimittäin osoittaa, että stationääriseen vaiheen ratkaisussa odotusaajan (samoin kuin korjausajan) jakautumatyyppin vaikutus häviää, jäljelle jää vain jakautuman yksi parametri, odotusarvo.

¹ Kulshrestha I.

4. SYSTEMIN KÄYTTÄYTYMINEN, KUN OSASYSTEMI S_1 ON AKTIIVISESTI RINNANKYTKETTY

Tässä luvussa tarkastellaan systeemiä niissä olosuhteissa, jotka syntyvät, kun osasysteemi S_1 toimii aktiivisesti rinnankytkettynä. Noudatettavan korjauspolitiikan perusteella saadaan vielä kaksi eri tapausta; kappaleen 4.1 tarkasteluissa on korjauspolitiikka na minimikorjauspolitiikka ja kappaleessa 4.2 täyskorjauspolitiikka. Kytkentänsä ja korjauspolitiikkansa puolesta näin spesifioitua systeemiä kutsutaan jäljempänä (A, P_1) -systeemiksi (minimikorjauspolitiikka) tai (A, P_2) -systeemiksi (täyskorjauspolitiikka).

4.1. Korjauspolitiikkana minimikorjauspolitiikka P_1

4.1.1. (A, P_1) -systeemin tilat

Systeemin käyttäytymisen yksityiskohtaiseksi kuvaamiseksi otetaan käyttöön systeemin tila-käsite. Systeemin tilalla tarkoitetaan seuraavassa käsitettä, joka yksikäsitteisesti määrittelee ne systeemin toimintakyvyn kannalta relevantit olosuhteet, jotka systeemissä ja sen komponenteissa kulloinkin vallitsevat. Esillä olevan (A, P_1) -systeemin kuvaamiseksi osoittautuu tarkoituksenmukaiseksi valita seuraavat tilat:

O_m : systeemi on toimintakunnossa, S_1 :n komponenteista on m kpl vioittunut ($m = 0, 1, \dots, M-1$)

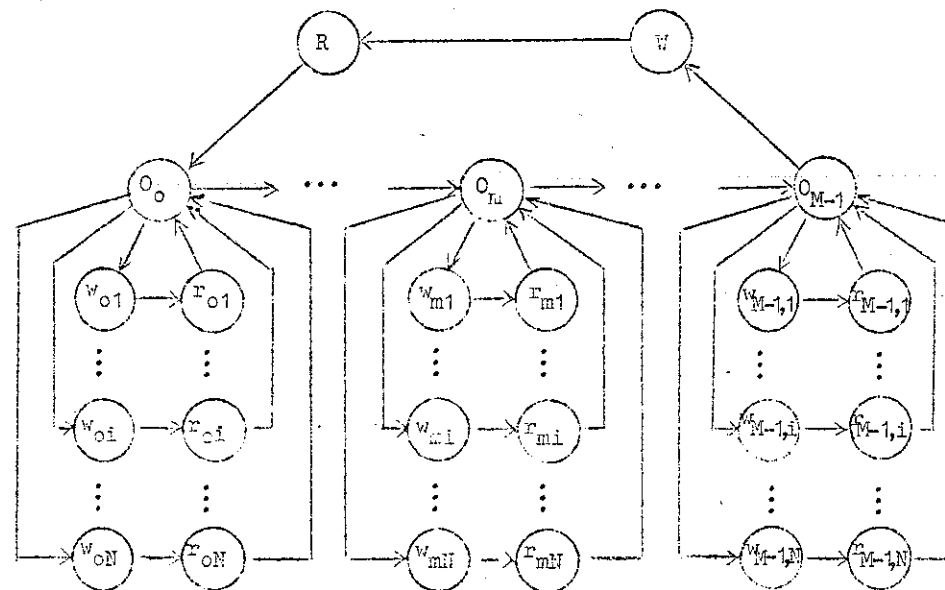
W : systeemi odottaa korjauksen alkua, toimintakyvyttömyyden syynä S_1 :n kaikkien komponenttien vioittuminen

R : systeemi korjauksen alaisena, S_1 :n vialliset komponentit (M kpl) korjataan

w_{mi} : systeemi odottaa korjaustyön alkamista, toimintakeskeytyksen syynä S_2 :n komponentin i vioittuminen; S_1 :n komponenteista on m viallista ($m = 0, 1, \dots, M-1$; $i = 1, 2, \dots, N$)

r_{mi} : systeemi korjauksen alaisena, S_2 :n komponenttia i kunnostetaan; S_1 :n komponenteista on m viallista ($m = 0, 1, \dots, M-1$; $i = 1, 2, \dots, N$), S_1 :n toimivien komponenttien kohdalla toteutetaan ennakkohuolto-ohjelma

(A, P_1) -systeemin tilat ja mahdollisuudet siirtyä tilasta toiseen on esitetty kaaviona kuvassa 4.1.



Kuva 4.1. (A, P_1) -systeemin tilat ja siirtymämahdollisuudet tilasta toiseen.

4.1.2. (A, P_1) -systeemin tilayhtälöt

4.1.2.1. Merkinnot

Systeemissä esiintyvien stokastisten prosessien kuvaamiseksi otetaan käyttöön joukko merkintöjä. Systeemin siirtymiseen tietyyn tilaan tai tässä tilassa viipymiseen liittyvät seuraavat tilatodennäköisyyksien ja tiheysfunktioiden lausekkeet:

$F_m(x, t)$: kertymäfunktio, joka ilmoittaa todennäköisyyden sille että systeemi hetkellä t on tilassa O_m ja että se on ollut tässä tilassa korkeintaan ajan x ($m = 0, 1, \dots, M-1$)

$P_m(x,t)$: kertymäfunktio $F_m(x,t)$ vastaava tiheysfunktio; lauseke $P_m(x,t) \cdot \Delta + o(\Delta)$ ilmoittaa tällöin todennäköisyyden, että systeemi on hetkellä t tilassa O_m ja että siirtyminen tähän tilaan on tapahtunut aikavälillä $(t-x-\Delta, t-x)$, ($m=0,1,\dots,M-1$)

$P_m(t)$: todennäköisyys, että systeemi hetkellä t on tilassa O_m ($m=0,1,\dots,M-1$)

$F_W(x,t)$: kertymäfunktio, joka ilmoittaa todennäköisyyden sille, että systeemi hetkellä t on tilassa W ja on ollut tässä tilassa korkeintaan ajan x

$P_W(x,t)$: edellistä vastaava tiheysfunktio

$P_W(t)$: todennäköisyys, että systeemi hetkellä t on tilassa W

$F_R(x,t)$: kertymäfunktio, joka ilmoittaa todennäköisyyden sille, että systeemi hetkellä t on tilassa R ja on ollut tässä tilassa korkeintaan ajan x

$P_R(x,t)$: edellistä vastaava tiheysfunktio

$P_R(t)$: todennäköisyys, että systeemi hetkellä t on tilassa R

$F_{w_{mi}}(x,t)$: kertymäfunktio, joka ilmoittaa todennäköisyyden sille, että systeemi hetkellä t on tilassa w_{mi} ja on ollut tässä tilassa korkeintaan ajan x ($m=0,1,\dots,M-1$; $i=1,2,\dots,N$)

$P_{w_{mi}}(x,t)$: edelliseen liittyvä tiheysfunktio ($m=0,1,\dots,M-1$; $i=1,2,\dots,N$)

$P_{w_{mi}}(t)$: todennäköisyys, että systeemi hetkellä t on tilassa w_{mi} ($m=0,1,\dots,M-1$; $i=1,2,\dots,N$)

$F_{r_{mi}}(x,t)$: kertymäfunktio, joka ilmoittaa todennäköisyyden sille, että systeemi hetkellä t on tilassa r_{mi} ja on ollut tässä tilassa korkeintaan ajan x ($m=0,1,\dots,M-1$; $i=1,2,\dots,N$)

$P_{r_{mi}}(x,t)$: edelliseen liittyvä tiheysfunktio ($m=0,1,\dots,M-1$; $i=1,2,\dots,N$)

$P_{r_{mi}}(t)$: todennäköisyys, että systeemi hetkellä t on tilassa r_{mi} ($m=0,1,\dots,M-1$; $i=1,2,\dots,N$)

Edellä määriteltyjä lausekkeita sitovat toisiinsa mm. yhtälöt:

$$(4.1) \quad P_m(t) = \int_0^{\infty} P_m(x,t) dx \quad (m=0,1,\dots,M-1)$$

$$(4.2) \quad P_W(t) = \int_0^{\infty} P_W(x,t) dx$$

$$(4.3) \quad P_R(t) = \int_0^{\infty} P_R(x,t) dx$$

$$(4.4) \quad P_{w_{mi}}(t) = \int_0^{\infty} P_{w_{mi}}(x,t) dx$$

$$(4.5) \quad P_{r_{mi}}(t) = \int_0^{\infty} P_{r_{mi}}(x,t) dx$$

$\left. \begin{array}{l} (4.4) \\ (4.5) \end{array} \right\} (m=0,1,\dots,M-1; i=1,2,\dots,N)$

Häiriöttömän käyntiajan, korjauksen alun odotusajan ja korjauksen kestoajan intensiteetti- ja tiheysfunktioita merkitään

$\alpha(x)$: osajärjestelmän S_1 yksityisen komponentin vikataajuus; $\alpha(x) \cdot \Delta + o(\Delta)$ on tällöin todennäköisyys, että ajan x kestänyt komponentti vioittuu aikavälillä $(x, x+\Delta)$

$A(x)$: S_1 :n yksityisen komponentin häiriöttömän käyntiajan tiheysfunktio

$\beta(x)$: osajärjestelmän S_1 korjauksen valmistumisintensiteetti; $\beta(x) \cdot \Delta + o(\Delta)$ ilmoittaa todennäköisyyden, että ajan x kestänyt korjaus päättyy aikavälillä $(x, x+\Delta)$

$B(x)$: osajärjestelmän S_1 korjausajan tiheysfunktio

$\mu(x)$: osajärjestelmän S_1 korjauksen odotusajan päättymisintensiteetti; $\mu(x) \cdot \Delta + o(\Delta)$ ilmoittaa todennäköisyyden, että ajan x kestänyt S_1 :n korjaukseen liittyvä odotusaika päättyy aikavälillä $(x, x+\Delta)$

$C(x)$: osajärjestelmän S_1 korjaukseen liittyvän odotusajan tiheysfunktio

λ_i : osajärjestelmän S_2 komponentin i vikataajuus (vakio; $i=1,2,\dots,N$)

$\eta_i(x)$: osajärjestelmän S_2 komponentin i korjaukseen liittyvän odotusajan päättymisintensiteetti ($i=1,2,\dots,N$)

$H_i(x)$: osajärjestelmän S_2 komponentin i korjaukseen liittyvän odotusajan tiheysfunktio ($i=1,2,\dots,N$)

$\mu_i(x)$: osajärjestelmän S_2 komponentin i korjauksen valmistamisintensiteetti ($i=1,2,\dots,N$)

$M_i(x)$: osajärjestelmän S_2 komponentin i korjausajan tiheysfunktio ($i=1,2,\dots,N$)

Intensiteettisuureiden ja vastaavien tiheysfunktioiden välillä vallitsevat nyt yhtälön (2.9) mukaisesti seuraavat yhteydet:

$$(4.6) \quad A(x) = \alpha(x) e^{-\int_0^x \alpha(u) du}$$

$$(4.7) \quad B(x) = \beta(x) e^{-\int_0^x \beta(u) du}$$

$$(4.8) \quad C(x) = \gamma(x) e^{-\int_0^x \gamma(u) du}$$

$$(4.9) \quad H_i(x) = \eta_i(x) e^{-\int_0^x \eta_i(u) du}$$

$$(4.10) \quad M_i(x) = \mu_i(x) e^{-\int_0^x \mu_i(u) du} \quad \left. \begin{array}{l} (4.9) \\ (4.10) \end{array} \right\} (i = 1, 2, \dots, N)$$

Lisäksi merkitään

$$(4.11) \quad \lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i \quad \text{ja}$$

$$(4.12) \quad A_k(x) = k \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} \quad (k=1,2,\dots,M)$$

Tällöin on erikoisesti

$$(4.13) \quad A_1(x) = A(x).$$

Muut merkinnät selostetaan siinä yhteydessä kuin ne tekstissä esiintyvät.

4.1.2.2. Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Tarkastellaan aluksi (A, P_1) -järjestelmän käyttäytymistä mielivaltaiseen ajanhetkeen t liittyvänä lyhyenä aikavälinä $(t, t + \Delta)$. Järjestelmässä hetkellä t vallinneen tilan säilymistä hetkeen $t + \Delta$ kuvaavat nyt seuraavat "eteenpäin" muodostetut differentiaaliyhtälöt:

Yhtälöiden muodostamisperiaate rakentuu Keilsonin ja Kocharianin (ss. 104-105) jonoteoreettisten tarkastelujen yhteydessä kehitetälle ns. lisämuuttuja-tekniikalle, jota Kulshrestha (I-V) on puolestaan soveltanut luotettavuusteoreettisissa yhteyksissä.

$$(4.14) \quad P_m(x+\Delta, t+\Delta) = P_m(x, t) \left\{ [1-\alpha(x)\Delta]^{M-m} \prod_{i=1}^N (1-\lambda_i \Delta) \right\} + o(\Delta) \quad (m=0,1,\dots,M-1)$$

$$(4.15) \quad P_W(x+\Delta, t+\Delta) = P_W(x, t) [1-\gamma(x)\Delta] + o(\Delta)$$

$$(4.16) \quad P_R(x+\Delta, t+\Delta) = P_R(x, t) [1-\beta(x)\Delta] + o(\Delta)$$

$$(4.17) \quad P_{wmi}(x+\Delta, t+\Delta) = P_{wmi}(x, t) [1-\eta_i(x)\Delta] + o(\Delta) \quad \left. \begin{array}{l} (m=0,1,\dots, \\ M-1; \\ i=1,2,\dots,N \end{array} \right\}$$

$$(4.18) \quad P_{rmi}(x+\Delta, t+\Delta) = P_{rmi}(x, t) [1-\mu_i(x)\Delta] + o(\Delta)$$

Kun nyt yhtälöissä (4.14) - (4.18) siirrytään rajatarkasteluihin, eli annetaan lähestyä $\Delta \rightarrow 0$, saadaan tiheysfunktioilausekkeiden määrittämiseksi seuraavat osittaisdifferentiaaliyhtälöt:

$$(4.19) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + (M-m)\alpha(x) + \lambda \right] P_m(x, t) = 0 \quad (m=0,1,\dots,M-1)$$

$$(4.20) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \gamma(x) \right] P_W(x, t) = 0$$

$$(4.21) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \beta(x) \right] P_R(x, t) = 0$$

$$(4.22) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \eta_i(x) \right] P_{wmi}(x, t) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} (m=0,1,\dots,M-1; \\ i=1,2,\dots,N \end{array} \right\}$$

$$(4.23) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \mu_i(x) \right] P_{rmi}(x, t) = 0$$

Yhtälöissä (4.19) - (4.23) x ja t ovat aikasuureita, joten tiheysfunktiot on määriteltävä vain alueella

$$(4.24) \quad \Gamma = \left\{ (x, t) \mid x \geq 0, t \geq 0 \right\}.$$

Yhtälöitä ratkaistaessa on näin otettava huomioon alueen Γ rajoitukset

$$(4.25) \quad \Gamma_x = \left\{ (x, 0) \mid x \geq 0 \right\}$$

$$(4.26) \quad \Gamma_t = \left\{ (0, t) \mid t \geq 0 \right\}$$

vallitsevat erikoisehdot.

4.1.2.3. Reunaehdot

Ratkaisualueen reunalla Γ_t vallitsevat ehdot kuvaavat systeemin siirtymistä tilasta toiseen (onhan tällöin uudessa tilassa viivytetty aika $x = 0$). Reunaehdot saavat muodon¹:

$$(4.27) \quad P_0(0, t) = \int_0^{\infty} P_R(x, t) \beta(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} P_{roi}(x, t) \mu_i(x) dx$$

$$(4.28) \quad P_m(0, t) = \int_0^{\infty} P_{m-1}(x, t) [M-m+1] \alpha(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} P_{rmi}(x, t) \mu_i(x) dx \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(4.29) \quad P_W(0, t) = \int_0^{\infty} P_{M-1}(x, t) \alpha(x) dx$$

$$(4.30) \quad P_R(0, t) = \int_0^{\infty} P_W(x, t) \beta(x) dx$$

$$(4.31) \quad P_{wmi}(0, t) = \lambda_i P_m(t) \quad \left. \begin{array}{l} (m=0, 1, \dots, M-1; \\ i=1, 2, \dots, N) \end{array} \right\}$$

$$(4.32) \quad P_{rmi}(0, t) = \int_0^{\infty} P_{wmi}(x, t) \eta_i(x) dx \quad \left. \begin{array}{l} (m=0, 1, \dots, M-1; \\ i=1, 2, \dots, N) \end{array} \right\}$$

Systeemin käyttäytymisen yksikäsitteiseksi selvittämiseksi on vielä tunnettava systeemin alkutila, ts. tila hetkellä $t = 0$. Alkutila voidaan määrittellä reunalla Γ_x vallitsevilla reunaehdoilla. Kun alkutilaksi valitaan 0_0 , ovat reunaehdot muotoa

$$(4.33) \quad P_0(x, 0) = \delta(x)$$

$$(4.34) \quad P_m(x, 0) = 0 \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(4.35) \quad P_W(x, 0) = P_R(x, 0) = 0$$

$$(4.36) \quad P_{wmi}(x, 0) = P_{rmi}(x, 0) = 0 \quad (m=0, 1, \dots, M-1; i=1, 2, \dots, N)$$

¹ Reunaehtojen muodostamisperiaate on yksityiskohtaisesti esitetty Koillonin ja Kooharianin tutkimuksessa s. 106; tätä alunperin jonoteoreettisessa tapauksessa esitettyä periaatetta on Kulshrestha soveltanut nyt tarkastelujen kohteena olevissa yhteyksissä.

Yhtälössä (4.33) on symbolilla $\delta(x)$ merkitty Dirac'in delta-funktiota.¹

Yhtälöitä (4.19) - (4.23), (4.27) - (4.32) ja (4.33) - (4.36), joiden perusteella voidaan määrätä kutakin ajan hetkeä t vastaavat todennäköisyydet systeemin eri tiloissa olemiselle, kutsutaan seuraavassa systeemin tilayhtälöiksi.

4.1.3. Tilayhtälöiden ratkaisut4.1.3.1. Tilayhtälöiden Laplace-muunnokset

Osittaisdifferentiaaliyhtälöissä (4.19) - (4.23) esiintyy sekä muuttujan x että muuttujan t suhteen muodostetut osittaisderivaatat. Siirtymällä yhtälöiden Laplace-muunnoksiin päästään yhtälöihin, joissa esiintyy ainoastaan osittaisderivaatta muuttujan x suhteen. Merkitään seuraavassa yleisesti funktion $F(t)$ Laplace-muunnosta $\mathcal{L}\{F(t)\}$ (edellyttäen, että se on olemassa) vastaavalla pienellä kirjaimella, ts.

$$(4.37) \quad \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = f(s).$$

Kun yhtälöihin (4.19) - (4.23) suoritetaan Laplace-muunnokset ja otetaan huomioon reunaehdot (4.33) - (4.36), saadaan osittaisdifferentiaaliyhtälöt²:

$$(4.38) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + M\alpha(x) + \lambda \right] p_0(x, s) = \delta(x)$$

$$(4.39) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + (M-m)\alpha(x) + \lambda \right] p_m(x, s) = 0 \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(4.40) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \beta(x) \right] p_W(x, s) = 0$$

$$(4.41) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \beta(x) \right] p_R(x, s) = 0$$

$$(4.42) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \eta_i(x) \right] p_{wmi}(x, s) = 0$$

$$(4.43) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \mu_i(x) \right] p_{rmi}(x, s) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} (m=0, 1, \dots, M-1; i=1, 2, \dots, N) \end{array} \right\}$$

¹ Delta-funktiosta ks. esim. Zadeh ja Desoer, s. 515.

² $\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$, Spiegel I, s. 4.

Reunaehtoyhtälöiden (4.27) - (4.32) Laplace-muunnokset puolestaan ovat

$$(4.44) \quad p_0(0, s) = \int_0^{\infty} p_R(x, s) \beta(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} p_{roi}(x, s) \mu_i(x) dx$$

$$(4.45) \quad p_m(0, s) = \int_0^{\infty} p_{m-1}(x, s) (M-m+1) \alpha(x) dx \\ + \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} p_{rmi}(x, s) \mu_i(x) dx \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(4.46) \quad p_W(0, s) = \int_0^{\infty} p_{M-1}(x, s) \alpha(x) dx$$

$$(4.47) \quad p_R(0, s) = \int_0^{\infty} p_W(x, s) \beta(x) dx$$

$$(4.48) \quad p_{wmi}(0, s) = \lambda_i p_m(s) \quad \left. \begin{array}{l} (m=0, 1, \dots, M-1; \\ i=1, 2, \dots, N) \end{array} \right\}$$

$$(4.49) \quad p_{rmi}(0, s) = \int_0^{\infty} p_{wmi}(x, s) \eta_i(x) dx \quad \left. \begin{array}{l} (m=0, 1, \dots, M-1; \\ i=1, 2, \dots, N) \end{array} \right\}$$

4.1.3.2. Muunnosyhtälöiden ratkaisut

Yhtälöiden (4.38) - (4.43) ratkaisuksi saadaan integroimalla ja hetken $t = 0$ arvot alkuehdoiksi ottamalla lausekkeet¹:

$$(4.50) \quad p_0(x, s) = [1 + p_0(0, s)] e^{-(s+\lambda)x - \int_0^x M \alpha(u) du}$$

$$(4.51) \quad p_m(x, s) = p_m(0, s) e^{-(s+\lambda)x - \int_0^x (M-m) \alpha(u) du} \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(4.52) \quad p_W(x, s) = p_W(0, s) e^{-sx - \int_0^x \beta(u) du}$$

$$(4.53) \quad p_R(x, s) = p_R(0, s) e^{-sx - \int_0^x \beta(u) du}$$

$$(4.54) \quad p_{wmi}(x, s) = p_{wmi}(0, s) e^{-sx - \int_0^x \eta_i(u) du} \quad \left. \begin{array}{l} (m=0, 1, \dots, M-1; \\ i=1, 2, \dots, N) \end{array} \right\}$$

$$(4.55) \quad p_{rmi}(x, s) = p_{rmi}(0, s) e^{-sx - \int_0^x \mu_i(u) du}$$

¹ Lisäksi on käytetty hyväksi delta-funktion ominaisuutta $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t) dt = g(0)$, vrt. esim. Zadeh ja Desoer, s. 516.

Seuraavaksi todistetaan kaksi lemmaa, joiden tuloksia tullaan myöhemmin toistuvasti tarvitsemaan. Lemma 4.1 esitetään komponentin häiriöttömään käyntiaikaan liittyviä suureita koskevana, mutta sen antama tulos on suoraan sovellettavissa odotusaika- ja korjausaikasuureisiin, kunhan $\alpha(x)$, $A(x)$ ja $a(s)$ korvataan vastaavasti suureilla $\beta(x)$, $B(x)$ ja $b(s)$ jne.

Lemma 4.1. Lausekkeen $e^{-\int_0^x \alpha(u) du}$ Laplace-muunnos on

$$\mathcal{L} \left\{ e^{-\int_0^x \alpha(u) du} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-sx - \int_0^x \alpha(u) du} dx = \frac{1}{s} [1 - a(s)],$$

missä $a(s) = \mathcal{L} \{ A(x) \}$.

Todistus. Osittaisintegrointia soveltamalla sekä yhtälö (2.9) ja sovitut merkinnät huomioiden saadaan

$$\int_0^{\infty} e^{-sx - \int_0^x \alpha(u) du} dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{-\int_0^x \alpha(u) du} dx \\ = \int_0^{\infty} \left\{ -\frac{1}{s} e^{-sx} e^{-\int_0^x \alpha(u) du} \right\} - \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} \alpha(x) e^{-\int_0^x \alpha(u) du} dx \\ = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} A(x) dx = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} a(s) = \frac{1}{s} [1 - a(s)].$$

Lemma 4.2. On voimassa

$$\int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x - \int_0^x k \alpha(u) du} dx = \frac{1}{s+\lambda} [1 - a_k(s+\lambda)] \quad (k=1, 2, \dots, M)$$

Todistus. Lemma 4.2 voidaan osoittaa oikeaksi vastaavalla tavalla kuin lemma 4.1 suoraan osittaisintegrointia soveltamalla. Tässä todistus kuitenkin (trivialina) sivuutetaan.

Kun yhtälöön (4.1) puolittain suoritetaan Laplace-muunnos, saadaan

$$(4.56) \quad p_m(s) = \int_0^{\infty} p_m(x, s) dx \quad (m=0, 1, \dots, M-1).$$

Tämä sekä lemmän 4.2 tulos huomioiden voidaan yhtälöstä (4.50) lähtien kirjoittaa

$$\begin{aligned} p_0(s) &= \int_0^{\infty} [1 + p_0(0,s)] e^{-(s+\lambda)x - \int_0^x M \alpha(u) du} dx \\ &= [1 + p_0(0,s)] \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x - \int_0^x M \alpha(u) du} dx \\ &= [1 + p_0(0,s)] \frac{1 - a_M(s+\lambda)}{s + \lambda} \end{aligned}$$

eli viimein

$$(4.57) \quad p_0(0,s) = \frac{s + \lambda}{1 - a_M(s+\lambda)} p_0(s) - 1.$$

Samalla tavalla saadaan yhtälöstä (4.51) lähtien tulos

$$(4.58) \quad p_m(0,s) = \frac{s + \lambda}{1 - a_{M-m}(s+\lambda)} p_m(s) \quad (m=1,2,\dots,M-1).$$

Yhtälöä (4.2) vastaavasta muunnosyhtälöstä lähtien ja lemmän 4.1 tulosta sekä yhtälöitä (4.46), (4.51), (4.52) ja (4.58) soveltaen saadaan

$$\begin{aligned} p_W(s) &= \int_0^{\infty} p_W(x,s) dx \\ &= p_W(0,s) \int_0^{\infty} e^{-sx - \int_0^x \gamma^\alpha(u) du} dx \\ &= p_W(0,s) \frac{1-c(s)}{s} \\ &= \frac{1-c(s)}{s} \int_0^{\infty} p_{M-1}(x,s) \alpha(x) dx \\ &= \frac{1-c(s)}{s} p_{M-1}(0,s) \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)x} \alpha(x) e^{-\int_0^x \alpha(u) du} dx \\ &= \frac{1-c(s)}{s} \frac{s+\lambda}{1-a(s+\lambda)} p_{M-1}(s) a(s+\lambda) \end{aligned}$$

eli lopullisessa muodossaan

$$(4.59) \quad p_W(s) = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda) [1-c(s)]}{s [1-a(s+\lambda)]} p_{M-1}(s).$$

Muiden tilatodennäköisyyksien Laplace-muunnoksille voidaan johtaa aivan vastaavalla tavalla lausekkeet

$$(4.60) \quad p_R(s) = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda) [1-b(s)] c(s)}{s [1-a(s+\lambda)]} p_{M-1}(s)$$

$$(4.61) \quad p_{Wmi}(s) = \frac{\lambda_i [1-h_i(s)]}{s} p_m(s) \quad \left. \begin{array}{l} (m=0,1,\dots,M-1; \\ i=1,2,\dots,N) \end{array} \right\}$$

$$(4.62) \quad p_{Rmi}(s) = \frac{\lambda_i h_i(s) [1-m_i(s)]}{s} p_m(s)$$

Tilatodennäköisyyksien Laplace-muunnokset ovat nyt siis kaikki lausutut lausekkeiden $p_m(s)$ ($m=0,1,\dots,M-1$) avulla. Nämä lausekkeet ovat kuitenkin vielä tuntemattomat. Ratkaisua varten ovat käytettävissä tähän saakka sivussa olleet yhtälöt (4.44) ja (4.45). Kun yhtälöön (4.45) sijoitetaan yhtälöiden (4.48), (4.49), (4.51), (4.54), (4.55) ja (4.58) tulokset, saa se muodon

$$\begin{aligned} &\frac{s+\lambda}{1-a_{M-m}(s+\lambda)} p_m(s) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{s+\lambda}{1-a_{M-m+1}(s+\lambda)} p_{m-1}(s) e^{-(s+\lambda)x} (M-m+1) \alpha(x) e^{-\int_0^x (M-m+1) \alpha(u) du} dx \\ &+ \sum_{i=1}^N \lambda_i p_m(s) \left[\int_0^{\infty} e^{-sx} \mu_i(x) e^{-\int_0^x \mu_i(u) du} dx \right] \left[\int_0^{\infty} e^{-sx} \gamma_i(x) e^{-\int_0^x \gamma_i(u) du} dx \right] \end{aligned}$$

Tämä voidaan termejä yhdistämällä ja alussa sovittuja merkintöjä käyttäen saattaa muotoon

$$(4.63) \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{s+\lambda}{1-a_{M-m}(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] p_m(s) \\ & = \frac{[s+\lambda] a_{M-m+1}(s+\lambda)}{1-a_{M-m+1}(s+\lambda)} p_{m-1}(s) \quad (m=1, 2, \dots, M-1) \end{aligned} \right.$$

Kiinteällä s :n arvolla yhtälö (4.63) on systeemin tiloihin liittyvän indikaattorin m suhteen 1. kertaluvun homogeeninen differenssiyhtälö, jonka kertoimet ovat kuitenkin m :stä riippuvaiset. Riippuvuus on lisäksi sen luonteista, että m :n mukana muuttuvat $p_m(s)$:n ja $p_{m-1}(s)$:n kerroinlausekkeisiin sisältyvät funktiot $a_{M-m}(s+\lambda)$. Yleisessä tapauksessa tällaisen yhtälön ratkaisun löytyminen suljetussa muodossa voi muodostua varsin hankalaksi. Yhtälöstä (4.63) huomataan kuitenkin, että $p_m(s)$:n kertoimessa esiintyy vain funktio $a_{M-m}(s+\lambda)$ ja $p_{m-1}(s)$:n kertoimessa funktio $a_{M-(m-1)}(s+\lambda)$. Tämä antaa aiheen etsiä ratkaisua, joka on muotoa¹:

$$(4.64) \quad p_m(s) = \frac{D(s)[1-a_{M-m}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_{M-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1), \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

missä $Q(s, m)$ on tulolauseke

$$(4.65) \left\{ \begin{aligned} Q(s, m) &= \prod_{k=1}^m \frac{s+\lambda - [1-a_k(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{[s+\lambda] a_k(s+\lambda)} \\ Q(s, 0) &= 1 \end{aligned} \right. \quad (m=1, 2, \dots, M)$$

ja $D(s)$ on m :stä riippumaton (toistaiseksi tuntematon) s :n funktio. Yhtälöiden (4.64) ja (4.65) määrittelemän $p_m(s)$:n lausekkeen voidaan osoittaa todella olevan yhtälön (4.63) ratkaisu. Tämä nähdään helposti suorittamalla tähän yhtälöön (4.64):n ja (4.65):n mukaiset sijoitukset ja sieventämällä:

¹ Ratkaisun tulomuotoisuus voidaan johtaa esim. parametrien variointi- tai summaustekijä-menetelmillä, myös generoivien funktioiden käyttö johtaa ratkaisun löytymiseen, ks. esim. Spiegel II, s. 175.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{s+\lambda}{1-a_{M-m}(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] \frac{D(s)[1-a_{M-m}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_{M-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1) \\ & - \frac{[s+\lambda] a_{M-m+1}(s+\lambda)}{1-a_{M-m+1}(s+\lambda)} \frac{D(s)[1-a_{M-m+1}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_{M-m+1}(s+\lambda)} Q(s, M-m) \\ & = D(s) \left\{ \frac{s+\lambda - [1-a_{M-m}(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{[s+\lambda] a_{M-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1) - Q(s, M-m) \right\} \\ & = D(s) \left\{ Q(s, M-m) - Q(s, M-m) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Yhtälön (4.63) ja samalla kaikkien muunnosyhtälöiden ratkaisut ovat nyt lauseketta $D(s)$ vaille tunnetut, $D(s)$:n määrittämiseksi on vielä käytettävissä yhtälö (4.44). Kun tähän tehdään tarpeelliset sijoitukset, saadaan vastaavalla tavalla kuin yhtälöä (4.63) johdottaessa

$$\begin{aligned} & \left[\frac{s+\lambda}{1-a_M(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] p_0(s) \\ & - \frac{a(s+\lambda) c(s) b(s) [s+\lambda]}{1-a(s+\lambda)} p_{M-1}(s) = 1, \end{aligned}$$

josta saadaan (4.64):n perusteella yhtälö

$$\begin{aligned} & \left[\frac{s+\lambda}{1-a_M(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] \frac{[1-a_M(s+\lambda)] D(s)}{[s+\lambda] a_M(s+\lambda)} Q(s, M-1) \\ & - \frac{a(s+\lambda) b(s) c(s) [s+\lambda]}{1-a(s+\lambda)} \frac{[1-a(s+\lambda)] D(s)}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} Q(s, 0) = 1, \end{aligned}$$

ja (4.65):n perusteella edellisen

$$D(s) \left\{ Q(s, M) - b(s) c(s) \right\} = 1.$$

Lausele D(s) on siis lopulta muotoa

$$(4.66) \quad D(s) = \frac{1}{Q(s, M) - b(s)c(s)}.$$

Muunnosyhtälöiden ratkaisut ovat tämän jälkeen

$$(4.67) \quad p_m(s) = \frac{[1 - a_{M-m}(s+\lambda)] Q(s, M-m-1)}{[s+\lambda] a_{M-m}(s+\lambda) [Q(s, M) - b(s)c(s)]} \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

$$(4.68) \quad p_W(s) = \frac{1 - c(s)}{s [Q(s, M) - b(s)c(s)]}$$

$$(4.69) \quad p_R(s) = \frac{[1 - b(s)] c(s)}{s [Q(s, M) - b(s)c(s)]}.$$

Lausekkeet $p_{wmi}(s)$ ja $p_{rmi}(s)$ ($m=0, 1, \dots, M-1$; $i=1, 2, \dots, N$) saadaan yhtälöistä (4.61) ja (4.62), kun niissä $p_m(s)$ on yhtälön (4.67) mukainen.

4.1.3.3. Tilayhtälöiden ratkaisut muunnosyhtälöiden ratkaisujen käännteismuunnoksina

Edellisessä jaksossa johdettiin tilayhtälöiden ratkaisuja, tilatodennäköisyyksiä, vastaavat Laplace-muunnokset. Ennen kuin siirrytään tarkastelemaan kysymystä näiden muunnosten käännteismuunnoksista, suoritetaan eräänlainen "tarkistuslaskelma". Jotta kuvassa 4.1 esitetty tilojen joukko todella olisi hyvin määritelty (A, P_1) -systemin tilajoukko, on tilojen toisaalta oltava toisistaan erilliset ja toisaalta katettava systeemin kaikki mahdolliset tilat. Tilatodennäköisyyksien avulla lausuttuna tämä merkitsee, että on oltava voimassa kaikilla t:n arvoilla identiteetti

$$(4.70) \quad \sum_{m=0}^{M-1} P_m(t) + P_W(t) + P_R(t) + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=1}^N [P_{wmi}(t) + P_{rmi}(t)] = 1.$$

Yhtälö (4.70) voidaan osoittaa oikeaksi näyttämällä, että vastaava muunnosyhtälö on voimassa:

$$(4.71) \quad \sum_{m=0}^{M-1} p_m(s) + p_W(s) + p_R(s) + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=1}^N [p_{wmi}(s) + p_{rmi}(s)] = \frac{1}{s}.$$

Jälkimmäisen yhtälön paikkansapitävyyden osoittamiseksi todistetaan ensin seuraava lemma:

Lemma 4.3. Kun merkitään

$$g_k(s) = \frac{[1 - a_k(s+\lambda)] [s+\lambda - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)]}{[s+\lambda] a_k(s+\lambda)} \quad (k=1, 2, \dots, M)$$

on voimassa yhtälö

$$Q(s, M) = \sum_{k=1}^M g_k(s) Q(s, k-1) + 1.$$

Todistus. Lausekkeiden $Q(s, m)$ ja $g_k(s)$ määritelmät huomioon ottaen voidaan kirjoittaa yhtälöketju

$$\begin{aligned} Q(s, M) &= \frac{M}{1} \frac{s+\lambda - [1 - a_k(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{[s+\lambda] a_k(s+\lambda)} \\ &= \frac{s+\lambda - [1 - a_M(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{[s+\lambda] a_M(s+\lambda)} Q(s, M-1) \\ &= Q(s, M-1) + \frac{[1 - a_M(s+\lambda)] [s+\lambda - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)]}{[s+\lambda] a_M(s+\lambda)} Q(s, M-1) \\ &= Q(s, M-1) + g_M(s) Q(s, M-1) \\ &= Q(s, M-2) + g_{M-1}(s) Q(s, M-2) + g_M(s) Q(s, M-1) \\ &= \dots \\ &= Q(s, 0) + g_1(s) Q(s, 0) + \dots + g_{M-1}(s) Q(s, M-2) \\ &\quad + g_M(s) Q(s, M-1) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^M g_k(s) Q(s, k-1), \end{aligned}$$

jonka viimeinen yhtälö osoittaa lemmän oikeaksi.

Yhtälöiden (4.61) - (4.62) ja (4.66) - (4.69) sekä lemmän 4.3 perusteella saadaan nyt

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{M-1} p_m(s) + p_W(s) + p_R(s) + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=1}^N [p_{v_{mi}}(s) + p_{r_{mi}}(s)] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ s + \sum_{i=1}^N [\lambda_i(1-h_i(s)) + \lambda_i h_i(s) (1-m_i(s))] \right\} \frac{p_m(s)}{s} \\ &+ p_W(s) + p_R(s) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ s + \sum_{i=1}^N \lambda_i - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right\} \frac{p_m(s)}{s} + p_W(s) + p_R(s) \\ &= \frac{s + \lambda - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s} \sum_{m=0}^{M-1} p_m(s) + p_W(s) + p_R(s) \\ &= \left\{ \frac{\sum_{m=0}^{M-1} [s + \lambda - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)] [1 - a_{M-m}(s + \lambda)]}{[s + \lambda] a_{M-m}(s + \lambda)} Q(s, M-m-1) \right. \\ &+ \left. [1 - c(s)] + [1 - b(s)] c(s) \right\} \frac{D(s)}{s} \\ &= \left\{ \frac{\sum_{k=1}^M [s + \lambda - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)] [1 - a_k(s + \lambda)]}{[s + \lambda] a_k(s + \lambda)} Q(s, k-1) \right. \\ &+ \left. 1 - b(s)c(s) \right\} \frac{D(s)}{s} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^M g_k(s) Q(s, k-1) + 1 - b(s)c(s) \right\} \frac{D(s)}{s} \\ &= \left\{ Q(s, M) - b(s)c(s) \right\} \frac{D(s)}{s} \\ &= \frac{1}{D(s)} \cdot \frac{D(s)}{s} = \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

mikä tulos osoittaa yhtälön (4.71) ja samalla yhtälön (4.70) paikkansa pitäviksi.

Tilatodennäköisyyksien lausekkeet saadaan nyt käänteismuunnoksina

$$(4.72) \quad p_m(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ p_m(s) \right\} \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

$$(4.73) \quad p_W(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ p_W(s) \right\}$$

$$(4.74) \quad p_R(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ p_R(s) \right\}$$

$$(4.75) \quad p_{v_{mi}}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ p_{v_{mi}}(s) \right\}$$

$$(4.76) \quad p_{r_{mi}}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ p_{r_{mi}}(s) \right\} \quad (m=0, 1, \dots, M-1; i=1, 2, \dots, N)$$

Yleisessä tapauksessa, kun tiheysfunktioiden $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $H_i(x)$ ja $M_i(x)$ luonne on tarkemmin määrittämättä, ei käänteismuunnosten lausekkeita luonnollisestikaan voida esittää. Tietyissä erikoistapauksissa todennäköisyyslausekkeet (4.72) - (4.76) ovat sen sijaan verraten helposti määritettävissä. Näin on esimerkiksi silloin, kun systeemissä esiintyvät jakautumat ovat kaikki eksponentiaalisia, ts. intensiteettifunktiot $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\mu(x)$, $\gamma_i(x)$ ja $\mu_i(x)$ ovat vakioita. Näiden yksittäistapausten käsittelyyn ei tässä yhteydessä kuitenkaan puututa, sillä huomattavasti mielenkiintoisemmaksi osoittautuu stationäärisen vaiheen tarkastelu, joka voidaan suorittaa hyvin yleisillä systeemin jakautumia koskevilla oletuksilla.

4.1.3.4. Stationäärisen vaiheen ratkaisut

Seuraavassa osoitetaan, miten erällä hyvin yleisillä edellytyksillä (tiettyjen odotusarvojen olemassaolo) systeemi t :n kasvaessa saavuttaa stationäärisen vaiheen, jolloin tilatodennäköisyydet ovat systeemissä esiintyvistä jakautumista välittömästi riippumattomat. Riippuvuutta esiintyy ainoastaan jakautumien tiettyjen tunnuslukujen, odotusarvojen ja eräiden integraalilausekkeiden, välityksellä. Stationäärisen vaiheen ratkaisut voidaankin johtaa tuntematta tarkemmin systeemin jakautumien tiheys- tai intensiteettifunktioita.

Stationäärin vaiheen ratkaisut johdetaan tunnetuista tilatodennäköisyyksien muunnoksista (4.61) - (4.62) ja (4.67) - (4.69) käyttäen hyväksi Laplace-muunnosten yleistä loppuarvoteoremaa¹:

$$(4.77) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s f(s)$$

Yhtälön (4.77) voimassaolon edellytyksenä on luonnollisesti, että oikean puolen raja-arvo on olemassa.

Aluksi esitetään eräitä aputuloksia.

$$\text{Lemma 4.4.} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1-b(s)}{s} = \bar{B},$$

missä on merkitty

$$\bar{B} = \int_0^{\infty} xB(x)dx,$$

ts. \bar{B} merkitsee osasysteemin S_1 korjausajan odotusarvoa.

Todistus. Loppuarvoteoreman ja Laplace-muunnosten konvoluutio-ominaisuuden² perusteella sekä ottamalla huomioon, että $B(x)$ on tiheysfunktio, saadaan väitetty tulos aikaan:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1-b(s)}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1-b(s)}{s^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} [1-b(s)] \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \cdot b(s) \right\} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[t - \int_0^t (t-u)B(u)du \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t \left[1 - \int_0^t B(u)du \right] + \int_0^t uB(u)du \right\} \\ &= \int_0^{\infty} uB(u)du = \bar{B}. \end{aligned}$$

¹ Final-value theorem, ks. Spiegel I, s. 20.

² $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du$, Spiegel I, s. 45.

$$\text{Lemma 4.5.} \quad \lim_{s \rightarrow 0} b(s) = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Todistus.} \quad \lim_{s \rightarrow 0} b(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{b(s)}{s} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b(s)}{s} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t B(u)du \\ &= \int_0^{\infty} B(u)du = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Lemma 4.6.} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1-b(s)c(s)}{s} = \bar{B} + \bar{C}.$$

Todistus.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1-b(s)c(s)}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[1-b(s)] + [1-c(s)] - [1-b(s)][1-c(s)]}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1-b(s)}{s} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1-c(s)}{s} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1-b(s)}{s} \cdot \lim_{s \rightarrow 0} [1-c(s)] \\ &= \bar{B} + \bar{C} + \bar{B} \cdot 0 = \bar{B} + \bar{C}. \end{aligned}$$

$$\text{Lemma 4.7.} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_k(s)}{s} = \frac{1-a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (H_i + M_i) \right\} \quad (k=1, 2, \dots, M)$$

Todistus.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_k(s)}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-a_k(s+\lambda)}{[s+\lambda]a_k(s+\lambda)} \cdot \frac{s+\lambda - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s)m_i(s)}{s} \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-a_k(s+\lambda)}{[s+\lambda]a_k(s+\lambda)} \left[1 + \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i [1-h_i(s)m_i(s)]}{s} \right] \right\} \\ &= \frac{1-a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} \left[1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (H_i + M_i) \right]. \end{aligned}$$

Lemma 4.8. $\lim_{s \rightarrow 0} Q(s, m) = 1 \quad (m=1, 2, \dots, M)$

Todistus.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} Q(s, m) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\prod_{k=1}^m s + \lambda - [1 - a_k(s + \lambda)] \prod_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{[s + \lambda] a_k(s + \lambda)} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^m \lambda - [1 - a_k(\lambda)] \prod_{i=1}^N \lambda_i}{\lambda a_k(\lambda)} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^m \lambda a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} = 1. \end{aligned}$$

Lemma 4.9.

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot D(s) = \left\{ \left[1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \sum_{k=1}^M \frac{1 - a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} + \bar{B} + \bar{C} \right\}^{-1}$$

Todistus.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot D(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{Q(s, M) - b(s)c(s)}{s} \right\}^{-1} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{Q(s, M) - 1}{s} + \frac{1 - b(s)c(s)}{s} \right\}^{-1} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \sum_{k=1}^M \frac{\xi_k(s)}{s} Q(s, k-1) + \frac{1 - b(s)c(s)}{s} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \left[1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \sum_{k=1}^M \frac{1 - a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} + \bar{B} + \bar{C} \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Otetaan seuraavassa käyttöön merkintä, jossa tilatodennäköisyyksien (4.72) - (4.76) raja-arvot, kun $t \rightarrow \infty$, ilmaistaan vastaavalla symbolilla ilman argumenttia. Merkitään siis esimerkiksi

$$P_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t).$$

Tilatodennäköisyyksille saadaan tällöin stationäärisen vaiheen arvot

$$\begin{aligned} (4.78) \quad P_m &= \lim_{t \rightarrow \infty} P_m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sp_m(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot D(s) [1 - a_{M-m}(s + \lambda)]}{[s + \lambda] a_{M-m}(s + \lambda)} Q(s, M-m-1) \\ &= \frac{1 - a_{M-m}(\lambda)}{\lambda a_{M-m}(\lambda)} \frac{1}{\left[1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \sum_{k=1}^M \frac{1 - a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} + \bar{B} + \bar{C}} \\ &= \frac{1 - a_{M-m}(\lambda)}{\lambda a_{M-m}(\lambda)} \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \\ & \quad (m=0, 1, \dots, M-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4.79) \quad P_W &= \lim_{t \rightarrow \infty} P_W(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sp_W(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - c(s)}{s} \cdot s \cdot D(s) \right\} \\ &= \frac{\bar{C} S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4.80) \quad P_R &= \lim_{t \rightarrow \infty} P_R(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sp_R(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - b(s)}{s} c(s) s D(s) \right\} \\ &= \frac{\bar{B} S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \end{aligned}$$

$$(4.81) \quad P_{wmi} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{wmi}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s P_{wmi}(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \lambda_i \frac{1-h_i(s)}{s} sp_m(s) \right\}$$

$$= \frac{1-a_{M-m}(\lambda)}{\lambda a_{M-m}(\lambda)} \frac{\lambda_i \bar{H}_i S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

(m=0, 1, ..., M-1; i=1, 2, ..., N)

$$(4.82) \quad P_{rmi} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{rmi}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sp_{rmi}(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \lambda_i h_i(s) \frac{1-m_i(s)}{s} sp_m(s) \right\}$$

$$= \frac{1-a_{M-m}(\lambda)}{\lambda a_{M-m}(\lambda)} \frac{\lambda_i \bar{M}_i S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

(m=0, 1, ..., M-1; i=1, 2, ..., N)

Yllä esitettyissä yhtälöissä on merkitty

$$(4.83) \quad S_M(\lambda) = \left\{ \prod_{k=1}^M \frac{1-a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} \right\}^{-1}$$

Myöskin stationäärinen vaiheen ratkaisussa on tilatodennäköisyyksien summan luonnollisesti oltava 1. Yhtälöistä (4.78) - (4.83) saadaankin helposti

$$\sum_{m=0}^{M-1} \left\{ P_m + \sum_{i=1}^N [P_{wmi} + P_{rmi}] \right\} = P_W + P_R$$

$$= \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + (\bar{B} + \bar{C}) S_M(\lambda)} \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1-a_{M-m}(\lambda)}{\lambda a_{M-m}(\lambda)} \left[1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] + (\bar{B} + \bar{C}) \right\}$$

$$= \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + (\bar{B} + \bar{C}) S_M(\lambda)} \left\{ \frac{1}{S_M(\lambda)} \left[1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] + \bar{B} + \bar{C} \right\} = 1$$

Tuloksia (4.78) - (4.82) tarkasteltaessa huomataan, että stationääriset ratkaisut ovat tosiaan systeemissä esiintyvien korjaus ja odotusaikojen jakautumatyypeistä riippumattomat, ratkaisuisa esiintyvät vain näiden jakautumien odotusarvot. Riippuvuus osasysteemin S_1 yksityisen komponentin häiriöttömän käyntiajan jakautumasta on sekin "välillistä", riippuvuus ilmenee läusekkeid $a_k(\lambda)$ ($k=1, 2, \dots, M$) välityksellä. Määritelmien mukaanhan on

$$(4.84) \quad a_k(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x_k} \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} dx \quad (k=1, 2, \dots, M)$$

Edellytyksenä stationäärinen vaiheen saavuttamiselle on siis vain odotusarvojen $\bar{B}, \bar{C}, \bar{H}_i$ ja \bar{M}_i , ($i=1, 2, \dots, N$), sekä integraalilausekkeiden $a_k(\lambda)$, ($k=1, 2, \dots, M$), olemassaolo. Kaikille tavallisimmille jakautumille, mm. kappaleessa 2.3 esitetyille, nämä aina ovat olemassa.

4.1.4. (A, P₁)-systeemin luotettavuudesta

Kappaleessa 2.1 tehdyn sopimuksen mukaisesti valitaan (A, P₁)-systeemin luotettavuutta kuvaavaksi tunnusluvuksi todennäköisyys, että systeemi tietyllä hetkellä t on sellaisessa tilassa, että se pystyy suoritutamaan sille asetetuista tehtävistä ja vaatimuksista. Valitun (A, P₁)-systeemin tilajoukon mukaan systeemin toiminnan edellytyksenä on että se on jossakin tiloista O_0, O_1, \dots, O_{M-1} . Todennäköisyys $P(t)$, että systeemi hetkellä t on toimintakykyinen, on siis

$$(4.85) \quad P(t) = \sum_{m=0}^{M-1} P_m(t)$$

Tämän Laplace-muunnos on

$$(4.86) \quad p(s) = \sum_{m=0}^{M-1} p_m(s) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{[1-a_{M-m}(s+\lambda)] Q(s, M-m-1)}{[s+\lambda] a_{M-m}(s+\lambda) [Q(s, M)-b(s)c(s)]}$$

$$= \frac{1}{s + \lambda - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)} \sum_{k=1}^M \frac{g_k(s) Q(s, k-1)}{[Q(s, M) - b(s)c(s)]}$$

$$= \frac{1}{s + \lambda - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)} \frac{Q(s, M) - 1}{Q(s, M) - b(s)c(s)}$$

Todennäköisyyslauseke $P(t)$ voidaan nyt määrittää, mikäli lausekkeen $p(s)$ käänteismuunnos löydetään. Tämä jää kussakin yksityistapauksessa luonnollisesti riippumaan jakautumien tiheysfunktioiden luonteesta.

Suuremman mielenkiinnon ja merkityksen omaa kuitenkin myös nyt stationäärinen vaihe. Tässä tapauksessa on

$$(4.87) \quad P = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{M-1} P_m(t) = \sum_{m=0}^{M-1} P_m$$

$$= \frac{\sum_{m=0}^{M-1} \frac{1 - a_{M-m}(\lambda)}{\lambda a_{M-m}(\lambda)} \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (H_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (H_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

Vastaavalla tavalla saadaan todennäköisyyksiksi, että systeemi odottaa korjauksen alkua tai on korjattavana, lausekkeet

$$(4.88) \quad W = P_W + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=1}^N P_{wmi}$$

$$= \frac{\bar{C} S_M(\lambda) + \sum_{i=1}^N \lambda_i H_i}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (H_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

$$(4.89) \quad R = P_R + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=1}^N P_{rmi}$$

$$= \frac{\bar{B} S_M(\lambda) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{M}_i}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (H_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

4.2. Korjauspolitiikkana täyskorjauspolitiikka P_2

4.2.1. (A, P_2) -systeemin tilat

(A, P_2) -systeemin olennaisena piirteenä systeemin tilamäärittelyjen kannalta on noudatettava täyskorjauspolitiikka P_2 .

(A, P_1) -systeemin yhteydessä määritelty tilajoukko ei ole tämän johdosta sellaisenaan käyttökelpoinen (A, P_2) -systeemin tapauksessa. Korjauspolitiikan P_2 mukaanhan osasysteemin S_2 jotakin komponenttia korjattaessa käytetään tilaisuutta hyväksi ja kunnostetaan myös S_1 :n mahdollisesti vialliset komponentit. Korjauksen suorituksen jälkeen on usein ollen tarpeetonta tietää, montako S_1 :n komponenttia oli ennen korjaustyöhön ryhtymistä viallista, systeemin tila työn jälkeen on joka tapauksessa O_0 , ts. systeemin kaikki komponentit ovat toimintakunnossa. Tarkoituksenmukainen (A, P_2) -systeemin tilajoukko onkin nyt seuraava:

O_m : systeemi on toimintakunnossa, S_1 :n komponenteissa on m kpl vioittuneita ($m=0, 1, \dots, M-1$)

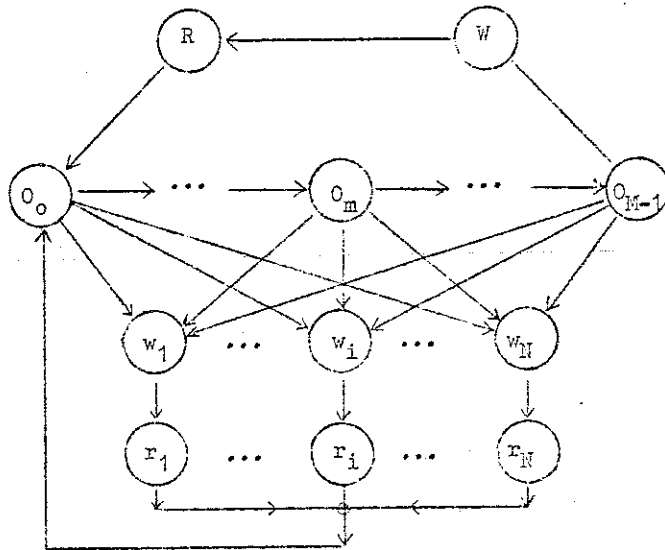
W : systeemi odottaa korjauksen alkua, toimintakyvyttömyyden syynä on S_1 :n kaikkien komponenttien vioittuminen

R : systeemi on korjauksen alaisena, S_1 :n vialliset komponentit (kaikki M kpl) korjataan

w_i : systeemi odottaa korjaustyön alkua, toimintakeskeytyksen syynä on S_2 :n komponentin i vioittuminen ($i=1, 2, \dots, N$)

r_i : systeemi on korjaustyön alaisena, korjausimpulssin on antanut S_2 :n komponentti i ($i=1, 2, \dots, N$); samalla kunnostetaan S_1 :n mahdollisesti vialliset komponentit ja toteutetaan S_1 :n ennakkohoito-ohjelma

(A, P_2) -systeemin tilat ja näiden väliset siirtymismahdollisuudet on esitetty kuviossa 4.2.



Kuva 4.2. (A, P_2) -systeemin tilat.

Kun verrataan (A, P_1) - ja (A, P_2) -systeemien tiloja keskenään, huomataan, että tilat $O_0, O_1, \dots, O_{M-1}, W$ ja R ovat täsmälleen samat, (A, P_1) -systeemin tilat $w_{0i}, w_{1i}, \dots, w_{M-1,i}$ sen sijaan on (A, P_2) -systeemin tapauksessa voitu yhdistää yhdeksi tilaksi w_i ($i=1,2,\dots, N$), samoin on tilat $r_{0i}, r_{1i}, \dots, r_{M-1,i}$ korvattu yhdellä tilalla r_i ($i=1,2,\dots, N$).

4.2.2. (A, P_2) -systeemin tilayhtälöt

4.2.2.1. Merkinmät

Merkintöjen suhteen noudatetaan niin paljon kuin mahdollista (A, P_1) -systeemin tarkastelun yhteydessä sovittua käytäntöä. Niinpä häiriöttömän toiminta-ajan, korjauksen odotusajan ja varsinaisen korjausajan jakautumiin liittyviä funktioita merkitään täsmälleen samoin kuin kohdassa 4.1.2.1. Yhtälöt (4.6) - (4.13) ovat siten voimassa myös (A, P_2) -systeemin yhteydessä. Kertymä- ja tiheysfunktio- sekä tilatodennäköisyyslausekkeiden määrittely-

säilyvät ennallaan tai muuttuvat sen mukaisesti, onko vastaavan tilan määrittely säilynyt ennallaan vai ei. Merkinmät $F_m(x, t)$, $P_m(x, t)$ ja $P_m(t)$, $m=0,1,\dots, M-1$, sekä $F_W(x, t)$, $P_W(x, t)$, $P_W(t)$, $F_R(x, t)$, $P_R(x, t)$ ja $P_R(t)$ otetaan siten käyttöön (A, P_1) -systeemin yhteydessä esitetyllä tavalla ja uusina funktioina määritellään:

- $F_{wi}(x, t)$: kertymäfunktio, joka ilmoittaa todennäköisyyden sille, että systeemi hetkellä t on tilassa w_i ja on ollut tässä tilassa korkeintaan ajan x ($i=1,2,\dots$)
- $P_{wi}(x, t)$: edellistä vastaava tiheysfunktio ($i=1,2,\dots, N$)
- $P_{wi}(t)$: todennäköisyys, että systeemi hetkellä t on tilassa w_i ($i=1,2,\dots, N$)
- $F_{ri}(x, t)$: kertymäfunktio, joka ilmoittaa todennäköisyyden sille, että systeemi hetkellä t on tilassa r_i ja on ollut tässä tilassa korkeintaan ajan x ($i=1,2,\dots$)
- $P_{ri}(x, t)$: edellistä vastaava tiheysfunktio ($i=1,2,\dots, N$)
- $P_{ri}(t)$: todennäköisyys, että systeemi hetkellä t on tilassa r_i ($i=1,2,\dots, N$)

Määritelmien mukana yhtälöt (4.1) - (4.3) säilyvät ennallaan, yhtälöt (4.4) ja (4.5) korvautuvat yhtälöillä

$$(4.90) \quad P_{wi}(t) = \int_0^{\infty} P_{wi}(x, t) dx$$

$$(4.91) \quad P_{ri}(t) = \int_0^{\infty} P_{ri}(x, t) dx \quad \left. \vphantom{\int_0^{\infty}} \right\} (i=1,2,\dots, N)$$

4.2.2.2. Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Systeemin käyttäytymistä kuvaavien osittaisdifferentiaaliyhtälöiden johto on täysin vastaavanlainen kuin (A, P_1) -systeemin tapauksessa. Tarkastellaan kahta lähekkäistä ajanhetkeä t ja $t + \Delta$, muodostetaan tilan säilymistä kuvaavat eteenpäin-differenssiyhtälöt ja siirrytään lopuksi rajatarkasteluihin, joissa $\Delta \rightarrow 0$ (vrt. yhtälöiden (4.19) - (4.23) johto kohdassa 4.1.2.2.). Tuloksena saadaan yhtälöt:

$$(4.92) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + (M-m)\alpha(x) + \lambda \right] P_m(x,t) = 0 \quad (m=0,1,\dots,M-1)$$

$$(4.93) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \gamma(x) \right] P_W(x,t) = 0$$

$$(4.94) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \beta(x) \right] P_R(x,t) = 0$$

$$(4.95) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \eta_i(x) \right] P_{wi}(x,t) = 0 \quad \left. \vphantom{\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \eta_i(x) \right]} \right\} (i=1,2,\dots,N)$$

$$(4.96) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \mu_i(x) \right] P_{ri}(x,t) = 0 \quad \left. \vphantom{\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \mu_i(x) \right]} \right\}$$

Yhtälöissä (4.92) - (4.96) esiintyvät funktiot on määritelty alueella Γ . Ratkaisuja etsittäessä on otettava huomioon alueen Γ reunoilla Γ_x ja Γ_t vallitsevat reunaehdot.

4.2.2.3. Reunaehdot

(A, P₂) -systeemin siirtymistä tilasta toiseen kuvaavat reunaehdot, reunan Γ_t ehdot, saavat muodon (vrt. alaviite (A, P₁) -systeemin tapauksessa s. 36):

$$(4.97) \quad P_0(0,t) = \int_0^\infty P_R(x,t) \beta(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^\infty P_{ri}(x,t) \mu_i(x) dx$$

$$(4.98) \quad P_m(0,t) = \int_0^\infty P_{m-1}(x,t) [M-m+1] \alpha(x) dx \quad (m=1,2,\dots,M-1)$$

$$(4.99) \quad P_W(0,t) = \int_0^\infty P_{M-1}(x,t) \alpha(x) dx$$

$$(4.100) \quad P_R(0,t) = \int_0^\infty P_W(x,t) \gamma(x) dx$$

$$(4.101) \quad P_{wi}(0,t) = \sum_{m=0}^{M-1} \lambda_i P_m(t) \quad \left. \vphantom{\sum_{m=0}^{M-1}} \right\} (i=1,2,\dots,N)$$

$$(4.102) \quad P_{ri}(0,t) = \int_0^\infty P_{wi}(x,t) \eta_i(x) dx \quad \left. \vphantom{\int_0^\infty} \right\}$$

Systeemin alkutilan määrittelevät ehdot, reunan Γ_x alkuehdot, ovat (A, P₂) -systeemin tapauksessa, kun alkutilaksi valitaan 0.

$$(4.103) \quad P_0(x,0) = \delta(x)$$

$$(4.104) \quad P_m(x,0) = 0 \quad (m=1,2,\dots,M-1)$$

$$(4.105) \quad P_W(x,0) = P_R(x,0) = 0$$

$$(4.106) \quad P_{wi}(x,0) = P_{ri}(x,0) = 0 \quad (i=1,2,\dots,N)$$

(A, P₂) -systeemin tilayhtälöt on näin muodostettu. Seuraavana tehtävänä on ratkaista yhtälöt (4.92) - (4.96) reunaehdot (4.97) - (4.106) huomioon ottaen.

4.2.3. Tilayhtälöiden ratkaisut

4.2.3.1. Tilayhtälöiden Laplace-muunnokset

Yhtälöiden (4.92) - (4.96) Laplace-muunnokset ovat nyt

$$(4.107) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + M\alpha(x) + \lambda \right] p_0(x,s) = \delta(x)$$

$$(4.108) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + (M-m)\alpha(x) + \lambda \right] p_m(x,s) = 0 \quad (m=1,2,\dots,M-1)$$

$$(4.109) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \gamma(x) \right] p_W(x,s) = 0$$

$$(4.110) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \beta(x) \right] p_R(x,s) = 0$$

$$(4.111) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \eta_i(x) \right] p_{wi}(x,s) = 0 \quad \left. \vphantom{\left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \eta_i(x) \right]} \right\} (i=1,2,\dots,N)$$

$$(4.112) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \mu_i(x) \right] p_{ri}(x,s) = 0 \quad \left. \vphantom{\left[\frac{\partial}{\partial x} + s + \mu_i(x) \right]} \right\}$$

Reunaehtoyhtälöiden (4.97) - (4.102) Laplace-muunnokset ovat

$$(4.113) \quad p_0(0,s) = \int_0^\infty p_R(x,s) \beta(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^\infty p_{ri}(x,s) \mu_i(x) dx$$

$$(4.114) \quad p_m(0,s) = \int_0^\infty p_{m-1}(x,s) [M-m+1] \alpha(x) dx \quad (m=1,2,\dots,M-1)$$

$$(4.115) \quad p_W(0,s) = \int_0^\infty p_{M-1}(x,s) \alpha(x) dx$$

$$(4.116) \quad p_R(0, s) = \int_0^{\infty} p_W(x, s) \mu(x) dx$$

$$(4.117) \quad p_{wi}(0, s) = \sum_{m=0}^{M-1} \lambda_i p_m(s)$$

$$(4.118) \quad p_{ri}(0, s) = \int_0^{\infty} p_{wi}(0, s) \gamma_i(x) dx \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

4.2.3.2. Muunnosyhtälöiden ratkaisut

Jakson 4.1.3.2. aputuloksia (lemmat 4.1 ja 4.2) soveltaen ja samanlaista käsittelyjärjestystä noudattaen saadaan ratkaisuksi aluksi (A, P_1) - systeemin yhtälöitä (4.57) - (4.62) vastaten:

$$(4.119) \quad p_0(0, s) = \frac{s+\lambda}{1-a_M(s+\lambda)} p_0(s) - 1$$

$$(4.120) \quad p_m(0, s) = \frac{s+\lambda}{1-a_{M-m}(s+\lambda)} p_m(s) \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(4.121) \quad p_w(s) = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda) [1-c(s)]}{s[1-a(s+\lambda)]} p_{M-1}(s)$$

$$(4.122) \quad p_R(s) = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda) [1-b(s)] c(s)}{s[1-a(s+\lambda)]} p_{M-1}(s)$$

$$(4.123) \quad p_{wi}(s) = \lambda_i \frac{1-h_i(s)}{s} \sum_{m=0}^{M-1} p_m(s)$$

$$(4.124) \quad p_{ri}(s) = \lambda_i h_i(s) \frac{1-m_i(s)}{s} \sum_{m=0}^{M-1} p_m(s) \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

Tilatodennäköisyyksien Laplace-muunnokset on jälleen kaikki esitetty lausekkeiden $p_m(s)$ ($m=0, 1, \dots, M-1$) avulla, jotka lausekkeet ovat toistaiseksi vielä tuntemattomat. Näiden tuntemattomien lausekkeiden määrittäminen sujuu samoin kuin (A, P_1) -systeemin yhteydessä esitettiin, lähtökohtana olevina yhtälöinä ovat nyt yhtälöt (4.113) ja (4.114). Suorittamalla yhtälöön (4.114) tarpeelliset sijoitukset saadaan:

$$\frac{s+\lambda}{1-a_{M-m}(s+\lambda)} p_m(s) = \int_0^{\infty} \frac{[s+\lambda] p_{m-1}(s)}{1-a_{M-m+1}(s+\lambda)} e^{-(s+\lambda)x} [M-m+1] \alpha(x) e^{-\int_0^x [M-m+1] \alpha(u) du} dx \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

eli sievennettynä

$$(4.125) \quad p_m(s) = \frac{1-a_{M-m}(s+\lambda)}{1-a_{M-m+1}(s+\lambda)} a_{M-m+1}(s+\lambda) p_{m-1}(s) \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

Yhtälön (4.125) yleinen ratkaisu on muotoa¹

$$(4.126) \quad p_m(s) = \frac{D(s) [1-a_{M-m}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_{M-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1), \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

missä $Q(s, m)$ on tulolauseke

$$(4.127) \quad \begin{cases} Q(s, m) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{a_k(s+\lambda)} \\ Q(s, 0) = 1 \end{cases} \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

ja $D(s)$ m:stä riippumaton s :n funktio. Yhtälön (4.126) mukaisen $p_m(s)$:n lausekkeen kelpaavuus differenssiyhtälön (4.125) ratkaisuksi todetaan suoralla laskulla:

$$\begin{aligned} & \frac{1-a_{M-m}(s+\lambda)}{1-a_{M-m+1}(s+\lambda)} a_{M-m+1}(s+\lambda) p_{m-1}(s) \\ &= \frac{1-a_{M-m}(s+\lambda)}{1-a_{M-m+1}(s+\lambda)} a_{M-m+1}(s+\lambda) \frac{D(s) [1-a_{M-m+1}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_{M-m+1}(s+\lambda)} Q(s, M-m) \\ &= \frac{D(s) [1-a_{M-m}(s+\lambda)]}{s+\lambda} Q(s, M-m) \end{aligned}$$

¹ Vrt. sivulla 42 ja sen alaviitteessä suoritetut tarkastelut.

$$= \frac{D(s)[1-a_{M-m}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_{M-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1) = p_m(s).$$

Tulomuotoisen ratkaisun (4.126) yleisyys on perusteltavissa samoin kuin yhtälön (4.64) tapauksessa (sivun 42 alaviittaus). Kerroin $D(s)$ määritetään yhtälön (4.113) perusteella. Sijoitusten ja sievennysten jälkeen on ensin

$$\frac{s+\lambda}{1-a_M(s+\lambda)} p_0(s) = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda) b(s)c(s)}{1-a(s+\lambda)} P_{M-1}(s) + \left[\sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] \left[\sum_{m=0}^{M-1} P_m(s) \right] + 1,$$

josta yhtälön (4.126) perusteella saadaan edelleen

$$\frac{s+\lambda}{1-a_M(s+\lambda)} \frac{D(s)[1-a_M(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_M(s+\lambda)} Q(s, M-1) = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda) b(s)c(s)}{1-a(s+\lambda)} \cdot \frac{D(s)[1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} Q(s, 0) + \left[\sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] \left[\frac{D(s)}{s+\lambda} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1-a_{M-m}(s+\lambda)}{a_{M-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1) \right] + 1$$

ja sieventämällä

$$D(s) \left\{ Q(s, M) - b(s)c(s) - \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s+\lambda} [Q(s, M) - 1] \right\} = 1.$$

Lausekkeella $D(s)$ on näin muoto

$$(4.128) \quad D(s) = \frac{1}{Q(s, M) - b(s)c(s) - \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s+\lambda} [Q(s, M) - 1]}.$$

Edellä on käytetty hyväksi lemmän 4.10 tulosta:

Lemma 4.10.

$$\sum_{m=0}^{M-1} \frac{1-a_{M-m}(s+\lambda)}{a_{M-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1) = Q(s, M) - 1$$

Todistus. $Q(s, M)$:n määritelmän perusteella saadaan

$$\begin{aligned} Q(s, M) &= \frac{Q(s, M-1)}{a_M(s+\lambda)} \\ &= \frac{1-a_M(s+\lambda)}{a_M(s+\lambda)} Q(s, M-1) + Q(s, M-1) \\ &= \frac{1-a_M(s+\lambda)}{a_M(s+\lambda)} Q(s, M-1) + \frac{1-a_{M-1}(s+\lambda)}{a_{M-1}(s+\lambda)} Q(s, M-2) + Q(s, M-2) \\ &= \dots \\ &= \frac{1-a_M(s+\lambda)}{a_M(s+\lambda)} Q(s, M-1) + \frac{1-a_{M-1}(s+\lambda)}{a_{M-1}(s+\lambda)} + \dots \\ &\quad + \frac{1-a(s+\lambda)}{a(s+\lambda)} Q(s, 0) + Q(s, 0) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1-a_{M-m}(s+\lambda)}{a_{M-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1) + 1. \end{aligned}$$

Yllä olevan yhtälökettjun viimeinen yhtälö on lemmän väite toiseen muotoon kirjoitettuna, joten lemma on osoitettu oikeaksi.

Tilatodennäköisyyksien Laplace-muunnoksille saadaan tämän jälkeer lausekkeet

$$(4.129) \quad p_m(s) = \frac{D(s)[1-a_{M-m}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a_{M-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1) = \frac{D(s)[1-a_{M-m}(s+\lambda)]}{[s+\lambda] \prod_{k=1}^{M-m} a_k(s+\lambda)} \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

$$(4.130) \quad p_W(s) = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)[1-c(s)]}{s[1-a(s+\lambda)]} \frac{D(s)[1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)}$$

$$= D(s) \frac{1-c(s)}{s}$$

$$(4.131) \quad p_R(s) = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)[1-b(s)]c(s)}{s[1-a(s+\lambda)]} \frac{D(s)[1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)}$$

$$= D(s) \frac{[1-b(s)]c(s)}{s}$$

$$(4.132) \quad p_{wi}(s) = \lambda_i \frac{1-h_i(s)}{s} \frac{D(s)}{s+\lambda} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1-a_{M-m}(s+\lambda)}{a_{M-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1)$$

$$= D(s) \frac{\lambda_i [1-h_i(s)] [Q(s, M)-1]}{s [s+\lambda]} \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

$$(4.133) \quad p_{ri}(s) = \lambda_i h_i(s) \frac{1-m_i(s)}{s} \frac{D(s)}{s+\lambda} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1-a_{M-m}(s+\lambda)}{a_{M-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m)$$

$$= D(s) \frac{\lambda_i h_i(s) [1-m_i(s)] [Q(s, M)-1]}{s [s+\lambda]} \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

4.2.3.3. Tilayhtälöiden ratkaisut muunnosyhtälöiden ratkaisujen käänteismuunnoksina

Tarkasteltavassa (A, P_2) -systeemin tapauksessa valittiin systeemin tilajoukko (A, P_1) -systeemin tiloista poikkeavalla, tätä yksinkertaisemmalla tavalla. Jakson aluksi osoitetaan tilajoukko hyvin määritellyksi, ts. osoitetaan, että kaikilla t :n arvoilla on voimassa identiteetti

$$(4.134) \quad \sum_{m=0}^{M-1} p_m(t) + p_W(t) + p_R(t) + \sum_{i=1}^N [p_{wi}(t) + p_{ri}(t)] = 1.$$

Tämän kanssa yhtäpitävä on yhtälö

$$(4.135) \quad \sum_{m=0}^{M-1} p_m(s) + p_W(s) + p_R(s) + \sum_{i=1}^N [p_{wi}(s) + p_{ri}(s)] = \frac{1}{s},$$

joka seuraavassa osoitetaan voimassa olevaksi. Yhtälöiden (4.129) - (4.133) mukaan on

$$\sum_{m=0}^{M-1} p_m(s) + p_W(s) + p_R(s) + \sum_{i=1}^N [p_{wi}(s) + p_{ri}(s)]$$

$$= D(s) \left\{ \frac{1}{s+\lambda} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1-a_{M-m}(s+\lambda)}{a_{M-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1) + \frac{1-c(s)}{s} + \frac{[1-b(s)]c(s)}{s} \right.$$

$$\left. + \frac{Q(s, M)-1}{s+\lambda} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i [1-h_i(s)] + \lambda_i h_i(s) [1-m_i(s)]}{s} \right\}$$

$$= \frac{D(s)}{s} \left\{ \frac{s[Q(s, M)-1]}{s+\lambda} + 1-b(s)c(s) + \frac{Q(s, M)-1}{s+\lambda} \sum_{i=1}^N \lambda_i [1-h_i(s)m_i(s)] \right\}$$

$$= \frac{D(s)}{s} \left\{ \frac{[s+\lambda] [Q(s, M)-1]}{s+\lambda} + 1-b(s)c(s) - \frac{Q(s, M)-1}{s+\lambda} \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s)m_i(s) \right.$$

$$\left. = \frac{D(s)}{s} \left\{ Q(s, M) - b(s)c(s) - \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s)m_i(s)}{s+\lambda} [Q(s, M)-1] \right\} \right.$$

$$\left. = \frac{D(s)}{s} \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{s}, \right.$$

joten (4.135) ja samalla (4.134) on osoitettu oikeaksi.

Tilatodennäköisyyksien lausekkeet saadaan nyt lausekkeiden (4.12) - (4.133) käänteismuunnoksina, eli on

$$(4.136) \quad p_m(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ p_m(s) \right\} \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

$$(4.137) \quad P_W(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ P_W(s) \}$$

$$(4.138) \quad P_R(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ P_R(s) \}$$

$$(4.139) \quad P_{wi}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ P_{wi}(s) \}$$

$$(4.140) \quad P_{ri}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ P_{ri}(s) \}$$

(i=1,2,...,N)

Kysymys käänteismuunnosten löytymisestä jää yleisessä muodossa avoimeksi, sen ratkaisee kussakin yksittäistapauksessa systeemin tiheysfunktioiden luonne. Yksittäistapausten käsittelyyn ei nytkään mennä, vaan siirrytään tarkastelemaan systeemin saavuttamaa stationääristä vaihetta, jolloin tilatodennäköisyydet voidaan määrittää myös yleisessä tapauksessa, jakautumatyyppejä yksityiskohtaisesti tuntematta.

4.2.3.4. Stationäärisen vaiheen ratkaisut

Stationäärinen vaihe saavutetaan samoilla verraten lievillä ehdoilla kuin (A, P₁) -systeeminkin tapauksessa: systeemissä esiintyvien jakautumien odotusarvojen ja lausekkeiden a_k(λ) (k=1,2,...,M) olemassaolo. Samoin ratkaisut voidaan osoittaa jakautumatyypeistä riippumattomiksi, niissä esiintyvät vain jakautumien tietyt tunnusluvut: odotus- ja korjausaikojen odotusarvot sekä lausekkeet a_k(λ).

Aluksi esitetään eräs aputuloks:

Lemma 4.11. Kun merkitään

$$(4.141) \quad S_M(\lambda) = \frac{\lambda}{Q(0, M) - 1},$$

on voimassa

$$\lim_{s \rightarrow 0} sD(s) = \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

Todistus. $\lim_{s \rightarrow 0} sD(s)$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{Q(s, M) - \frac{b(s)c(s)}{s} - \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s[s + \lambda]}}{[Q(s, M) - 1]} \right\}^{-1}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ [Q(s, M) - 1] \left[\frac{s + \lambda - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s[s + \lambda]} \right] + \frac{1 - b(s)c(s)}{s} \right\}^{-1}$$

$$= \left\{ [Q(0, M) - 1] \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s + \sum_{i=1}^N \lambda_i [1 - h_i(s)] + \sum_{i=1}^N \lambda_i [1 - m_i(s)] - \sum_{i=1}^N \lambda_i [1 - h_i(s)] [1 - m_i(s)]}{s[s + \lambda]} + \frac{1 - b(s)c(s)}{s} \right\}^{-1}$$

$$= \left\{ [Q(0, M) - 1] \frac{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i)}{\lambda} + \bar{B} + \bar{C} \right\}^{-1}$$

$$= \left\{ \frac{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i)}{S_M(\lambda)} + \bar{B} + \bar{C} \right\}^{-1}$$

$$= \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

Yllä esitetyn todistusketjun eri vaiheet perustuvat pääasiassa lemmojen 4.4 - 4.6 tuloksiin.

Tilatodennäköisyyksien raja-arvoksi, kun t kasvaa rajatta, ts. stationäärisen vaiheen ratkaisuksi saadaan loppuarvoteoreeman nojalla tämän jälkeen

$$(4.142) \quad P_m = \lim_{t \rightarrow \infty} P_m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sp_m(s)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ sD(s) \frac{1 - a_{M-m}(s+\lambda)}{[s+\lambda] \prod_{k=1}^{M-m} a_k(s+\lambda)} \right\} \\
&= \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \frac{1 - a_{M-m}(\lambda)}{\lambda \prod_{k=1}^{M-m} a_k(\lambda)} \quad (m=0, 1, \dots, M-1)
\end{aligned}$$

$$(4.143) \quad P_W = \lim_{t \rightarrow \infty} P_W(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sp_W(s)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ sD(s) \frac{1-c(s)}{s} \right\} \\
&= \frac{\bar{C} S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}
\end{aligned}$$

$$(4.144) \quad P_R = \lim_{t \rightarrow \infty} P_R(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sp_R(s)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ sD(s) \frac{1-b(s)}{s} c(s) \right\} \\
&= \frac{\bar{B} S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}
\end{aligned}$$

$$(4.145) \quad P_{wi} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{wi}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sp_{wi}(s)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ sD(s) \lambda_i \frac{1-h_i(s)}{s} \frac{Q(s, M)-1}{s+\lambda} \right\} \\
&= \frac{\lambda_i \bar{H}_i}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \quad (i=1, 2, \dots, N)
\end{aligned}$$

$$(4.146) \quad P_{ri} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ri}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sp_{ri}(s)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ sD(s) \lambda_i h_i(s) \frac{1-m_i(s)}{s} \frac{Q(s, M)-1}{s+\lambda} \right\} \\
&= \frac{\lambda_i \bar{M}_i}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \quad (i=1, 2, \dots, N)
\end{aligned}$$

Tilatodennäköisyyksien summan huomataan myös stationäärisessä tapauksessa olevan = 1. Tämän seikan toteaminen vaatii vain yhtälöissä (4.142) - (4.146) esiintyvien todennäköisyyksien yhteenlaskun. Laskuissa otetaan erityisesti huomioon lemma 4.10 sekä merkinnät (4.127) ja (4.141):

$$\frac{1}{S_M(\lambda)} = \frac{Q(0, M)-1}{\lambda} = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1-a_{M-m}(\lambda)}{\lambda a_{M-m}(\lambda)} Q(0, M-m-1) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1-a_{M-m}(\lambda)}{\lambda \prod_{k=1}^{M-m} a_k(\lambda)}$$

Stationäärinen vaiheen ratkaisuja lähemmin tarkasteltaessa huomataan, että tämän vaiheen saavuttamisen edellytyksistä sekä ratkaisujen luonteesta ja ominaisuuksista on voimassa kaikki se, mitä (A, P_1) -systemin tapauksessa jaksossa 4.1.3.4 on esitetty.

4.2.4. (A, P_2) -systemin luotettavuudesta

Systemin luotettavuutta mittaavaksi suureeksi valittu todennäköisyys (vrt. kappale 2.1) saadaan nytkin summana

$$(4.147) \quad P(t) = \sum_{m=0}^{M-1} P_m(t).$$

Tämän Laplace-muunnos on

$$\begin{aligned}
(4.148) \quad p(s) &= \sum_{m=0}^{M-1} P_m(s) = \frac{D(s)}{s+\lambda} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1-a_{M-m}(s+\lambda)}{a_{M-m}(s+\lambda)} Q(s, M-m-1) \\
&= \frac{D(s)}{s+\lambda} [Q(s, M)-1]
\end{aligned}$$

$$= \frac{Q(s, M) - 1}{[Q(s, M) - b(s)c(s)] [s + \lambda] - [Q(s, M) - 1] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}$$

Todennäköisyyden (4.147) löytyminen jää tässäkin riippumaan $p(s)$: lausekkeen käänteismuunnoksen löytymisestä. Tämä on kysymys, joka voidaan ratkaista vasta kussakin yksittäistapauksessa erikseen sen perusteella, minkä luonteisia esiintyvät tiheysfunktiot ovat. Mutta stationäärisessä vaiheessa tämä todennäköisyys löydetään yleisessäkin tapauksessa:

$$(4.149) \quad P = \sum_{m=0}^{M-1} P_m$$

$$= \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1 - a_{M-m}(\lambda)}{\lambda^{a_{M-m}(\lambda)}} Q(0, M-m-1)$$

$$= \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})} \frac{Q(0, M) - 1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

Systeemin odotus- ja korjaustiloissa oloa kuvaavat stationäärisessä vaiheessa todennäköisyyslausekkeet

$$(4.150) \quad W = P_W + \sum_{i=1}^N P_{Wi} = \frac{\bar{C} S_M(\lambda) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{H}_i}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

$$(4.151) \quad R = P_R + \sum_{i=1}^N P_{Ri} = \frac{\bar{B} S_M(\lambda) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \bar{M}_i}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

Vaikka (A, P_1) - ja (A, P_2) -systemit määrittelevissä ominaisuuksissa ja sitä kautta niiden käyttäytymisissä on eräitä ratkaisevia peruseroja, voidaan varsinkin toisiaan vastaavista yhtälöistä (4.87) - (4.89) ja (4.149) - (4.151) todeta myös pitkälle ulottuvaa yhdenmukaisuutta. Määrittelemällä lausekkeet $Q(s, m)$ ja $S_M(\lambda)$ kummassakin tapauksessa tarkoitukseen sopivalla tavalla on todennäköisyydet P , W ja R voitu esittää täsmälleen samassa muodossa. Eri systeemeihin kohdistuvat vertailut tulevat näin huomattavan selkeiksi: ratkaisevaksi tekijäksi muodostuu lauseke $S_M(\lambda)$. Näihin kysymyksiin palataan kuitenkin tarkemmin myöhemmin, sen jälkeen kun myös passiivisen rinnankytkennän systemit on käsitelty.

5. SYSTEEMIN KÄYTTÄYTYMINEN, KUN OSASYSTEEMI S_1 ON PASSIIVISESTI RINNANKYTKETTY

Luvussa 5 tarkastellaan kuvan 3.1 esittämää systeemiä siten tarkemmin spesifioituna, että osasysteemi S_1 on passiivisesti rinnankytketty. Noudatettava korjauspolitiikka tuo mukanaan vielä kaksi eri tapausta; kappaleen 5.1 tarkasteluissa on korjauspolitiikkana minimikorjauspolitiikka ja kappaleessa 5.2 täyskorjauspolitiikka. Näin täsmennettyä systeemiä kutsutaan jäljempänä (P, P_1) -systeemiksi (minimikorjauspolitiikka) tai (P, P_2) -systeemiksi (täyskorjauspolitiikka).

Luvussa 4 suoritetuille tarkasteluille oli ominaista merkintöjen, ratkaisujen johtojen ja lauseiden todistusten varsin yksityiskohtainen selostaminen. Kun nyt luvussa 5 käytetään valtaosaltaan samoja symboleja ja tarkastelun eteneminen on perusratkaisuiltaan samanlainen kuin edellä, tyydytään tarkasteluissa vain päävaiheittain esittelyyn. Näin vältetään tekstin paisumiselta kohtuuttoman laajaksi esityksen seurattavuuden kuitonkaan sanottavasti kärsimättä. Olennaiset erot ja poikkeamat lukuun 4 verrattuna tuodaan luonnollisesti selvästi esiin.

5.1. Korjauspolitiikkana minimikorjauspolitiikka P_1

5.1.1. (P, P_1) -systeemin tilat

Osasysteemin S_1 täsmennetty rakenne määrittelee ne puitteet, joissa systeemin tilajoukko on tarkoituksenmukaista konstruoida. (P, P_1) -systeemin tilat valitaankin näin samoin kuin (A, P_1) -systeemin tilat jaksossa 4.1.1. Tilajoukkoa ja systeemin mahdollisuuksia siirtyä tilasta toiseen esittää siis tässäkin tapauksessa kuva 4.1. Siirtymätodennäköisyydet tilojen välillä sen sijaan ovat toiset kuin (A, P_1) -systeemissä. Tämä tulee näkyviin tilayhtälöiden erilaisuutena.

5.1.2. (P, P_1) -systeemin tilayhtälöt

Noudattamalla jaksossa 4.1.2.1 sovittuja merkintöjä, konstruoidamalla systeemin tilojen säilymistä kuvaavat eteenpäin-differenssiyhtälöt ja siirtymällä näissä raja-arvotarkasteluihin saadaan ehdollisten tiheysfunktioiden määrittämiseksi seuraavat, alueessa T määritellyt osittaisdifferentiaaliyhtälöt:

$$(5.1) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \alpha(x) + \lambda \right] P_m(x, t) = 0 \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

$$(5.2) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \gamma(x) \right] P_w(x, t) = 0$$

$$(5.3) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \beta(x) \right] P_R(x, t) = 0$$

$$(5.4) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_i(x) \right] P_{wmi}(x, t) = 0$$

$$(5.5) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \mu_i(x) \right] P_{rmi}(x, t) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} (m=0, 1, \dots, M-1; \\ i=1, 2, \dots, N) \end{array} \right\}$$

Verrattavassa (A, P_1) - ja (P, P_1) -systeemien vastaavia yhtälöitä (4.19) - (4.23) ja (5.1) - (5.5) toisiinsa huomataan eroa ainoastaan ensimmäisten yhtälöiden välillä. Eron alkuperä on selvä: tilassa O_m ($m=0, 1, \dots, M-1$) toimivan (A, P_1) -systeemin kunnossa olevista $(M-m)$:stä S_1 -komponentista voi mikä tahansa rikkoontua ja aiheuttaa systeemin tilanmuutoksen; (P, P_1) -systeemissä on tilassa O_m käytössä vain yksi S_1 -komponentti, muut ovat reservissä eivätkä näin ole alttiina vioittumiselle.

Systeemin siirtymistä tilasta toiseen kuvaavat reunan T_t reunaehdot:

$$(5.6) \quad P_0(0, t) = \int_0^{\infty} P_R(x, t) \beta(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} P_{roi}(x, t) \mu_i(x) dx$$

$$(5.7) \quad P_m(0, t) = \int_0^{\infty} P_{m-1}(x, t) \alpha(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} P_{rmi}(x, t) \mu_i(x) dx$$

($m=1, 2, \dots, M-1$)

$$(5.8) \quad P_W(0, t) = \int_0^{\infty} P_{M-1}(x, t) \alpha(x) dx$$

$$(5.9) \quad P_R(0, t) = \int_0^{\infty} P_W(x, t) \beta(x) dx$$

$$(5.10) \quad P_{wmi}(0, t) = \lambda_i P_m(t)$$

$$(5.11) \quad P_{rmi}(0, t) = \int_0^{\infty} P_{wmi}(x, t) \gamma_i(x) dx \quad \left. \begin{array}{l} (m=0, 1, \dots, M-1; \\ i=1, 2, \dots, N) \end{array} \right\}$$

Systemin alkutilan määrittävät reunan \bar{T}_x reunaehdot. Nämä ovat kun alkutilana on O_0 , muotoa:

$$(5.12) \quad P_0(x, 0) = \delta(x)$$

$$(5.13) \quad P_m(x, 0) = 0 \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(5.14) \quad P_W(x, 0) = P_R(x, 0) = 0$$

$$(5.15) \quad P_{wmi}(x, 0) = P_{rmi}(x, 0) = 0 \quad (m=0, 1, \dots, M-1; i=1, 2, \dots, N)$$

(A, P_1) - ja (P, P_1) -systemien huomataan reunaehdoiltaan poikkeavan toisistaan vain yhtälöparien (4.28) ja (5.7) osalta. Ero on samanlainen ja samasta syystä johtuva kuin yhtälöparien (4.19) ja (5.1) kohdalla esitettiin.

5.1.3. Tilayhtälöiden ratkaisut

Tilayhtälöiden ratkaisujen etsiminen noudattaa aluksi jaksossa 4.1.3 esitettyjä vaiheita. Tilayhtälöistä siirrytään niitä vastaa viin Laplace-muunnos-yhtälöihin ja muunnosyhtälöistä ratkaistaan lausekkeet $p_W(s)$, $p_R(s)$, $p_{wmi}(s)$ ja $p_{rmi}(s)$, ($m=0, 1, \dots, M-1$; $i=1, 2, \dots, N$) muotoon, jossa ne on lausuttu lausekkeiden $p_m(s)$ ($m=0, 1, \dots, M-1$) avulla. Tuloksiksi saadaan tarkalleen muotoa (4.59) - (4.62) olevat yhtälöt.

Funktioiden $p_m(s)$ määrittämiseksi saadaan yhtälö (joka vastaa (A, P_1) -systemin tapauksessa yhtälöä (4.63)):

$$(5.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{s+\lambda}{1-a(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] p_m(s) \\ = \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)}{1-a(s+\lambda)} p_{m-1}(s) \end{array} \right. \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

Yhtälöiden (4.63) ja (5.16) ulkonaisesta samannuotoisuudesta huolimatta niillä on kuitenkin eräs varsin ratkaiseva ero. Yhtälö (5.16) on kiinteällä s :n arvolla muuttujan m suhteen vakiokertoiminen, joten sen ratkaisu muodostuu yksinkertaisemmaksi ja selväpiirteisemmäksi kuin vastaavan muuttuvakertoimisen yhtälön (4.63). Kertoimet yhtälössä (5.16) ovat kuitenkin vielä s :n funktioita, joten ratkaisu ei silti ole aivan triviaali. Tietyn analogian säilyttämiseksi (A, P_1) -systemin tarkasteluihin verrattuna kirjoitetaan (5.16):n ratkaisu muotoon¹:

$$(5.17) \quad p_m(s) = \frac{D(s) [1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} Q(s, m+1), \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

missä

$$(5.18) \quad Q(s, m) = \left\{ \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)}{s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)} \right\}^m \quad (m=1, 2, \dots, M)$$

Yhtälön (5.17) mukainen lauseke on todellakin ratkaisu, sillä sijoittamalla se (5.16):een saadaan:

$$\left\{ \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)}{1-a(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right\} \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)}{s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)} - \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)}{1-a(s+\lambda)} \left\{ \frac{D(s) [1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} \right\} Q(s, m)$$

¹ Ratkaisun yleinen muoto on: $p_m(s) = C(s)g(s)^m$, vrt. Spiegel II, luku 5. "Ratkaisuehdokas" (5.77) on selvästikin tätä muotoa.

$$\frac{\left[s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] [s+\lambda] a(s+\lambda)}{\left[s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] \frac{D(s) [1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)}} = 0.$$

Toistaiseksi tuntemattoman lausekkeen $D(s)$ määrittäminen tapahtuu yhtälön (5.19) perusteella; (yhtälö (5.19) on yhtälön (5.6) johdannainen, vrt. yhtälön (4.66) johto (A, P_1) -systeemin tapauksessa). Ensin on

$$\left[\frac{s+\lambda}{1-a(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] p_0(s) - \frac{a(s+\lambda)b(s)c(s)[s+\lambda]}{1-a(s+\lambda)} p_{M-1}(s) = 0$$

josta saadaan (5.17):n ja (5.18):n perusteella

$$\frac{\left[\frac{s+\lambda}{1-a(s+\lambda)} - \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right] \frac{D(s) [1-a(s+\lambda)]}{s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}}{\frac{a(s+\lambda)b(s)c(s) [s+\lambda]}{1-a(s+\lambda)} \frac{D(s) [1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)}} Q(s, M) = 1$$

$$\text{eli } D(s) \left\{ 1 - b(s)c(s)Q(s, M) \right\} = 1$$

ja viimein

$$(5.19) \quad D(s) = \frac{1}{1-b(s)c(s)Q(s, M)}.$$

Tilatodennäköisyyksien Laplace-muunnosten lausekkeet voidaan esittää tämän jälkeen yhteen koottuina:

$$(5.20) \quad p_m(s) = \frac{1-a(s+\lambda)}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} \frac{Q(s, m+1)}{1-b(s)c(s)Q(s, M)} \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

$$(5.21) \quad p_W(s) = \frac{[1-c(s)] Q(s, M)}{s[1-b(s)c(s)Q(s, M)]}$$

$$(5.22) \quad p_R(s) = \frac{[1-b(s)] c(s)Q(s, M)}{s[1-b(s)c(s)Q(s, M)]}$$

$$(5.23) \quad p_{wmi}(s) = \frac{\lambda_i [1-h_i(s)] [1-a(s+\lambda)]}{s [s+\lambda] a(s+\lambda)} \frac{Q(s, m+1)}{1-b(s)c(s)Q(s, M)}$$

$$(5.24) \quad p_{rmi}(s) = \frac{\lambda_i h_i(s) [1-m_i(s)] [1-a(s+\lambda)]}{s [s+\lambda] a(s+\lambda)} \frac{Q(s, m+1)}{1-b(s)c(s)Q(s, M)}$$

$$(m=0, 1, \dots, M-1; i=1, 2, \dots, N)$$

Tilatodennäköisyydet saadaan tämän jälkeen yllä esitettyjen lausekkeiden käänteismuunnoksina yhtälöiden (4.72) - (4.76) tapaan. Näitä varten on kuitenkin tiheysfunktioiden ja niiden Laplace-muunnosten lausekkeet tunnettava. Sen sijaan stationäärisen vaiheen ratkaisut ovat jälleen yleisessäkin muodossa, tiheysfunktioiden tyyppiä tarkemmin tuntematta, johdettavissa. Ratkaisujen etsimiseksi esitetään aluksi kolme aputulosta.

Lemma 5.1. $\lim_{s \rightarrow 0} Q(s, m) = 1, \quad (m=1, 2, \dots, M).$

Todistus. $\lim_{s \rightarrow 0} Q(s, m)$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)}{s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)} \right\}^m$$

$$= \left\{ \frac{\lambda a(\lambda)}{\lambda - [1-a(\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i} \right\}^m = \left\{ \frac{\lambda a(\lambda)}{\lambda - [1-a(\lambda)] \lambda} \right\}^m = 1.$$

Lemma 5.2. $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1-Q(s, 1) \cdot 1-a(\lambda)}{s} = \frac{1-a(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (H_i + M_i) \right\}.$

Todistus. $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1-Q(s, 1)}{s}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{[s+\lambda] a(s+\lambda)}{s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)} \right\} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) - [s+\lambda] a(s+\lambda)}{s \left\{ s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right\}} \right\} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{[1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s \left\{ s+\lambda - [1-a(s+\lambda)] \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s) \right\}} \right\} \\
&= \frac{1-a(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ 1 + \frac{\lambda \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s} \right\} \\
&= \frac{1-a(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} \left\{ 1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i [1-h_i(s) m_i(s)]}{s} \right\} \\
&= \frac{1-a(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right\}
\end{aligned}$$

Lemma 5.3. Merkitsemällä

$$(5.25) \quad S_M(\lambda) = \frac{\lambda a(\lambda)}{M[1-a(\lambda)]}$$

on voimassa

$$(5.26) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \{sD(s)\} = \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}$$

Todistus. $\lim \{sD(s)\}^{-1}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-b(s)c(s)}{s} \frac{Q(s, M)}{s} \right\} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-b(s)c(s)}{s} + b(s)c(s) \frac{1-Q(s, M)}{s} \right\} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-b(s)c(s)}{s} + b(s)c(s) \frac{1-Q(s, 1)}{s} [1+Q(s, 1)+\dots+Q(s, M-1)] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{B} + \bar{C} + \frac{1-a(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} \left[1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] M \\
&= \frac{M[1-a(\lambda)]}{\lambda a(\lambda)} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + \frac{\lambda a(\lambda)}{M[1-a(\lambda)]} (\bar{B} + \bar{C}) \right\} \\
&= \frac{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}{S_M(\lambda)}
\end{aligned}$$

mikä tulos osoittaa lemmän väitteen oikeaksi.

Stationäärisen vaiheen tilatodennäköisyyksille saadaan tämän jälkeen arvot

$$\begin{aligned}
(5.27) \quad P_m &= \lim_{t \rightarrow \infty} P_m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \text{sp}_m(s) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-a(s+\lambda)}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} Q(s, m+1) sD(s) \right\} \\
&= \frac{1-a(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} \frac{S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})} \\
&= \frac{1/M}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})} \quad (m=0, 1, \dots, M-1)
\end{aligned}$$

$$(5.28) \quad P_W = \lim_{t \rightarrow \infty} P_W(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \text{sp}_W(s)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-c(s)}{s} sD(s) Q(s, M) \right\} \\
&= \frac{\bar{C} S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}
\end{aligned}$$

$$(5.29) \quad P_R = \lim_{t \rightarrow \infty} P_R(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sp_R(s)$$

$$= \left\{ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1-b(s)}{s} c(s) sD(s) Q(s, M) \right\}$$

$$= \frac{\bar{B}S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

$$(5.30) \quad P_{wmi} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{wmi}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sp_{wmi}(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\lambda_i [1-h_i(s)]}{s} \frac{1-a(s+\lambda)}{[s+\lambda]a(s+\lambda)} Q(s, m+1) sD(s) \right\}$$

$$= \frac{\lambda_i \bar{H}_i / M}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \quad \begin{array}{l} (m=0, 1, \dots, M-1; \\ i=1, 2, \dots, M) \end{array}$$

$$(5.31) \quad P_{rmi} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{rmi}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sp_{rmi}(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\lambda_i h_i(s) [1-m_i(s)]}{s} \frac{1-a(s+\lambda)}{[s+\lambda]a(s+\lambda)} Q(s, m+1) sD(s) \right\}$$

$$= \frac{\lambda_i \bar{M}_i / M}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})} \quad \begin{array}{l} (m=0, 1, \dots, M-1; \\ i=1, 2, \dots, M) \end{array}$$

Yllä esitettyjä tilatodennäköisyyksiä tarkasteltaessa kiinnittyy huomio erityisesti lausekseen (5.27). Tilatodennäköisyydet P_m ($m=0, 1, \dots, M-1$) ovat m :stä riippumattomat, ts. tilat, joissa (P, P_1) -systeemi on toimintakykyinen, ovat kaikki keskenään yhtä todennäköisiä. Saman toteamuksen voidaan todeta pätevän vastaavie odotustilojen P_{wmi} ja P_{rmi} kohdalla. Muilta osin tilatodennäköisyydet (5.27) - (5.31) muistuttavat ulkonaisesti vastaavia (A, P_1) ja (A, P_2) -systeemien lausekkeita.

5.1.4. (P, P_1) - systeemin luotettavuudesta

Systeemin luotettavuuden mittariksi valitun todennäköisyyslausekkeen Laplace-muunnos on (P, P_1) -systeemin tapauksessa

$$(5.32) \quad p(s) = \sum_{m=0}^{M-1} P_m(s) = \frac{D(s) [1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} \sum_{m=0}^{M-1} Q(s, m+1)$$

$$= \frac{D(s) [1-a(s+\lambda)]}{[s+\lambda] a(s+\lambda)} \frac{Q(s, 1) [1-Q(s, M)]}{1-Q(s, 1)}$$

$$= \frac{D(s)}{s+\lambda - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)} [1-Q(s, M)]$$

$$= \frac{1}{s+\lambda - \sum_{i=1}^M \lambda_i h_i(s) m_i(s)} \frac{1-Q(s, M)}{1-b(s)c(s) Q(s, M)}$$

Itse todennäköisyyslauseke $P(t)$ voidaan tämän jälkeen määrittää, mikäli systeemin jakautumat ovat tunnetut ja käänteismuunnos $P(t) = \mathcal{L}^{-1}\{p(s)\}$ kyetään löytämään.

Stationäärissä tapauksessa on luotettavuudella lauseke

$$(5.33) \quad P = \sum_{m=0}^{M-1} P_m = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

Odotus- ja korjaustilojen todennäköisyyksiksi saadaan yhtälöiden (4.88) ja (4.89) tapaan

$$(5.34) \quad W = \frac{\bar{C}S_M(\lambda) + \sum_{i=1}^M \lambda_i \bar{H}_i}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

$$(5.35) \quad R = \frac{\bar{B}S_M(\lambda) + \sum_{i=1}^M \lambda_i \bar{M}_i}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

5.2. Korjauspolitiikkana täyskorjauspolitiikka P_2

5.2.1. (P, P_2) -systeemin tilat

Kuten jo edellä on todettu, osasysteemissä S_1 vallitseva rinnan-
kytkennän laatu määrittää systeemin tilat. (P, P_2) -systeemin
tilajoukko on näin sellainen kuin (A, P_2) -systeemin tapauksessa
esitettiin (vrt. kuva 4.2). Siirtymätodennäköisyydet vastaavien
 (A, P_2) - ja (P, P_2) -systeemien tilaparien kesken ovat kuitenkin
tietyissä kohdin toisistaan poikkeavat. Nämä erot täsmentyvät
systeemin tilayhtälöissä, jotka esitetään seuraavaksi.

5.2.2. (P, P_2) -systeemin tilayhtälöt

Systeemin käyttäytymistä kuvaavat osittaisdifferentiaaliyhtälöt
ovat nyt

$$(5.36) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \alpha(x) + \lambda \right] P_m(x, t) = 0 \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

$$(5.37) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \gamma(x) \right] P_W(x, t) = 0$$

$$(5.38) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \beta(x) \right] P_R(x, t) = 0$$

$$(5.39) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_i(x) \right] P_{wi}(x, t) = 0 \quad \left. \vphantom{\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_i(x) \right]} \right\} (i=1, 2, \dots, N)$$

$$(5.40) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \mu_i(x) \right] P_{ri}(x, t) = 0 \quad \left. \vphantom{\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + \mu_i(x) \right]} \right\}$$

Yllä esitetyt yhtälöt on ratkaistava ottaen huomioon seuraavat
reunaehdot:

$$(5.41) \quad P_0(0, t) = \int_0^{\infty} P_R(x, t) \beta(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} P_{ri}(x, t) \mu_i(x) dx$$

$$(5.42) \quad P_m(0, t) = \int_0^{\infty} P_{m-1}(x, t) \alpha(x) dx \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(5.43) \quad P_W(0, t) = \int_0^{\infty} P_{M-1}(x, t) \alpha(x) dx$$

$$(5.44) \quad P_R(0, t) = \int_0^{\infty} P_W(x, t) \gamma(x) dx$$

$$(5.45) \quad P_{wi}(0, t) = \sum_{m=0}^{M-1} \lambda_i P_m(t) \quad \left. \vphantom{\sum_{m=0}^{M-1}} \right\} (i=1, 2, \dots, N)$$

$$(5.46) \quad P_{ri}(0, t) = \int_0^{\infty} P_{wi}(x, t) \gamma_i(x) dx$$

$$(5.47) \quad P_0(x, 0) = \delta(x)$$

$$(5.48) \quad P_m(x, 0) = 0 \quad (m=1, 2, \dots, M-1)$$

$$(5.49) \quad P_W(x, 0) = P_R(x, 0) = 0$$

$$(5.50) \quad P_{wi}(x, 0) = P_{ri}(x, 0) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

Reunaehdot (5.47) - (5.50) määrittelevät systeemin alkutilaksi
hetkellä $t = 0$ tilan O_0 .

5.2.3. Tilayhtälöiden ratkaisut

Tilatodennäköisyyksien Laplace-muunnoksille saadaan samojen vai-
heiden jälkeen kuin kolmessa edeltävässäkin tapauksessa muodolli-
sesti näitä hyvin paljon muistuttavat lausekkeet. Kun merkitään

$$(5.51) \quad Q(s, m) = [a(s + \lambda)]^m \quad (m=1, 2, \dots, M)$$

$$(5.52) \quad D(s) = \left\{ 1 - Q(s, M) b(s) c(s) - \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}{s + \lambda} [1 - Q(s, M)] \right\}^{-1},$$

voidaan nämä lausekkeet esittää muodossa

$$(5.53) \quad P_m(s) = \frac{D(s) [1 - a(s + \lambda)]^m}{[s + \lambda] a(s + \lambda)} Q(s, m+1) \\ = D(s) \frac{[a(s + \lambda)]^m [1 - a(s + \lambda)]}{s + \lambda} \quad (m=0, 1, \dots, M-1)$$

$$(5.54) \quad P_W(s) = D(s) \frac{[1 - c(s)] Q(s, M)}{s} \\ = D(s) \frac{[1 - c(s)] [a(s + \lambda)]^M}{s}$$

$$(5.55) \quad P_R(s) = D(s) \frac{[1-b(s)]c(s) Q(s,M)}{s}$$

$$= D(s) \frac{[1-b(s)]c(s)[a(s+\lambda)]^M}{s}$$

$$(5.56) \quad P_{wi}(s) = D(s) \frac{\lambda_i [1-h_i(s)] [1-Q(s,M)]}{s [s+\lambda]}$$

$$= D(s) \frac{\lambda_i [1-h_i(s)] [1-[a(s+\lambda)]^M]}{s[s+\lambda]} \quad (i=1,2,\dots,N)$$

$$(5.57) \quad P_{ri}(s) = D(s) \frac{\lambda_i h_i(s) [1-m_i(s)] [1-Q(s,M)]}{s[s+\lambda]}$$

$$= D(s) \frac{\lambda_i h_i(s) [1-m_i(s)] [1-[a(s+\lambda)]^M]}{s[s+\lambda]} \quad (i=1,2,\dots,N)$$

Stationäärin vaiheen ratkaisujen johtamiseksi tarvitaan ensin yksi aputuloks, joka esitetään lemmassa 5.4.

Lemma 5.4. Kun merkitään

$$(5.58) \quad S_M(\lambda) = \frac{\lambda [a(\lambda)]^M}{1-[a(\lambda)]^M},$$

on voimassa

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left\{ sD(s) \right\} = \frac{\lambda}{1-[a(\lambda)]^M} \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}.$$

Todistus. $\lim_{s \rightarrow 0} \left\{ sD(s) \right\}^{-1}$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-Q(s,M)b(s)c(s)}{s} + \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s)m_i(s)}{s[s+\lambda]} [1-Q(s,M)] \right\}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-Q(s,M)b(s)c(s)}{s} + \frac{1-Q(s,M)}{s+\lambda} \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i [1-h_i(s)m_i(s)]}{s} \right.$$

$$\left. - \frac{[1-Q(s,M)]\lambda}{s[s+\lambda]} \right\}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-Q(s,M)}{s+\lambda} \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i [1-h_i(s)m_i(s)]}{s} \right.$$

$$\left. + \frac{s+\lambda - [s+\lambda] Q(s,M)b(s)c(s) - \lambda + \lambda Q(s,M)}{s[s+\lambda]} \right\}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1-Q(s,M)}{s+\lambda} \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i [1-h_i(s)m_i(s)]}{s} + \frac{1-Q(s,M)}{s+\lambda} \right.$$

$$\left. + Q(s,M) \frac{1-b(s)c(s)}{s} \right\}$$

$$= \frac{1-[a(\lambda)]^M}{\lambda} \left\{ \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + 1 \right\} + [a(\lambda)]^M (\bar{B} + \bar{C})$$

$$= \frac{1-[a(\lambda)]^M}{\lambda} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + \frac{\lambda [a(\lambda)]^M}{1-[a(\lambda)]^M} (\bar{B} + \bar{C}) \right\}.$$

Merkintä (5.58) huomioon ottamalla nähdään lemmän väite välittömästi oikeaksi.

Stationääriset ratkaisut ovat tämän jälkeen

$$(5.59) \quad P_m = \lim_{s \rightarrow 0} sP_m(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ sD(s) \frac{[a(s+\lambda)]^m [1-a(s+\lambda)]}{s+\lambda} \right\}$$

$$= \frac{[a(\lambda)]^m [1-a(\lambda)]}{1-[a(\lambda)]^m} \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})}$$

(m=0,1,\dots,M-1)

$$\begin{aligned}
 (5.60) \quad P_W &= \lim_{s \rightarrow 0} sp_W(s) \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ sD(s) \frac{1-c(s)}{s} [a(s+\lambda)]^M \right\} \\
 &= \frac{\bar{C}S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{E} + \bar{C})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.61) \quad P_R &= \lim_{s \rightarrow 0} sp_R(s) \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ sD(s) \frac{1-b(s)}{s} c(s) [a(s+\lambda)]^M \right\} \\
 &= \frac{\bar{E}S_M(\lambda)}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{E} + \bar{C})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.62) \quad P_{wi} &= \lim_{s \rightarrow 0} sp_{wi}(s) \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ sD(s) \lambda_i \frac{1-h_i(s)}{s} \frac{1-[a(s+\lambda)]^M}{s+\lambda} \right\} \\
 &= \frac{\lambda_i \bar{H}_i}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{E} + \bar{C})} \quad (i=1, 2, \dots, N)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.63) \quad P_{ri} &= \lim_{s \rightarrow 0} sp_{ri}(s) \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ sD(s) \lambda_i h_i(s) \frac{1-m_i(s)}{s} \frac{1-[a(s+\lambda)]^M}{s+\lambda} \right\} \\
 &= \frac{\lambda_i \bar{M}_i}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{E} + \bar{C})} \quad (i=1, 2, \dots, N)
 \end{aligned}$$

5.2.4. (P, P_2) -systeemin luotettavuudesta

(P, P_2) -systeemin luotettavuutta kuvaavan todennäköisyyslausekkeen Laplace-muunnos on yhtälöiden (5.51) - (5.53) perusteella

$$\begin{aligned}
 (5.64) \quad p(s) &= \sum_{m=0}^{M-1} P_m(s) = \frac{D(s)[1-a(s+\lambda)]}{s+\lambda} \sum_{m=0}^{M-1} [a(s+\lambda)]^m \\
 &= \frac{D(s) \{1-[a(s+\lambda)]^M\}}{s+\lambda} \\
 &= \frac{1-[a(s+\lambda)]^M}{\{1-[a(s+\lambda)]^M b(s)c(s)\} [s+\lambda] - \{1-[a(s+\lambda)]^M\} \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i(s) m_i(s)}
 \end{aligned}$$

Todennäköisyyslauseke $P(t)$ saadaan tämän jälkeen (5.64):n käänteismuunnoksena: $P(t) = \mathcal{L}^{-1}\{p(s)\}$. Tämä kuitenkin edellyttää jakautumien tiheysfunktioiden (ja niiden muunnosten) tuntemista.

Stationääriseen vaiheeseen luotettavuudella on arvo

$$\begin{aligned}
 (5.65) \quad P &= \sum_{m=0}^{M-1} P_m = \frac{1-a(\lambda)}{1-[a(\lambda)]^M} \frac{\sum_{m=0}^{M-1} [a(\lambda)]^m}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{E} + \bar{C})} \\
 &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda)(\bar{E} + \bar{C})}
 \end{aligned}$$

Odotus- ja korjaustilojen todennäköisyyksille W ja R saadaan jälleen (5.34):n ja (5.35):n muotoiset lausekkeet sillä luonnollisella erotuksella, että $S_M(\lambda)$ on nyt (P, P_2) -systeemin mukainen, siis yhtälön (5.58) määrittämä.

6. VARMISTUSMENETELMÄN JA KORJAUSPOLITIIKAN
VAIKUTUS SYSTEMIN LUOTETTAVUUTEEN

Edellä esitettyissä luvuissa on tarkasteltu perusrakenteeltaan kuvan 3.1 mukaista systeemiä, jonka toimintaan ja käyttäytymiseen ovat vaikuttamassa useat stokastiset tekijät: vian syntyminen, korjausaika, korjauksen odotus- ja valmistelu-aika. Osasysteemin S_1 tarkemman rakenteen ja systeemin korjauksessa noudatettavan politiikan perusteella päädyttiin systeemin neljään erikoistapaukseen, joita kutsuttiin (A, P_1) -, (A, P_2) -, (P, P_1) - ja (P, P_2) -systeemeiksi. Kunkin erityissysteemin kohdalla suoritettiin samat tarkastelut systeemin käyttäytymisestä ajan funktiona ja johdettiin systeemin luotettavuutta kuvaavat todennäköisyyslausekkeet.

Tässä luvussa suoritetaan luotettavuuslausekkeiden yksityiskohtaisempi analysointi. Erityisesti päästään vertaamaan eri systeemejä toisiinsa. Näin saadaan käsitys toisaalta osasysteemin S_1 rakenteen (eli tietyn komponentin varmistusmenetelmän), toisaalta harjoitettavan korjauspolitiikan vaikutuksesta systeemin luotettavuuteen. Edelleen voidaan tarkastella, mikä vaikutus osasysteemin S_1 komponenttien lukumäärällä on systeemin toimintaan.

Luotettavuusfunktiot on kunkin systeemin osalta yleisessä tapauksessa saatettu näiden funktioiden Laplace-muunnoksiin saakka, vrt. yhtälöt (4.36), (4.148), (5.32) ja (5.64). Siirtyminen näistä käännteismuunnosten kautta varsinaisiin luotettavuusfunktioihin vaatii jo systeemin jakautumatyyppien yksityiskohtaista tuntemista ja jää siten kussakin yksittäistapauksessa erikseen ratkaistavaksi. Sen sijaan stationääriseen vaiheen luotettavuuslausekkeet voidaan muodostaa jakautumatyyppejä tuntematta: yhtälöt (4.87), (4.149), (5.33) ja (5.65). Seuraavassa rajoitutaankin tämän johdosta pelkästään stationääriseen vaiheeseen. Tarkastelut voidaan suorittaa näin mahdollisimman yleisillä oletuksilla.

6.1. Merkintöjä ja eräitä aputuloksia

Stationääriseen vaiheen luotettavuuden on kussakin tapauksessa osoitettu olevan muotoa

$$(6.1) \quad P = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + S_M(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})},$$

missä

$$\begin{aligned} \lambda_i &= S_2:n \text{ komponentin } i \text{ vikataajuus} \\ \bar{H}_i &= S_2:n \text{ komponentin } i \text{ korjauksen odotusajan odotusarvo} \\ \bar{M}_i &= S_2:n \text{ komponentin } i \text{ korjausajan odotusarvo} \\ \bar{B} &= S_1:n \text{ korjausajan odotusarvo} \\ \bar{C} &= S_1:n \text{ korjauksen odotusajan odotusarvo} \\ S_M(\lambda) &= S_1:n \text{ komponenttien lukumäärästä } M \text{ ja vikataajuudesta } \\ &\quad \alpha(x) \text{ sekä } S_2:n \text{ komponenttien vikataajuuksien summasta } \lambda \\ &\quad \text{riippuva lauseke; } S_M(\lambda):t \text{ on määriteltäyt yhtälöissä (4.83),} \\ &\quad \text{(4.141), (5.25) ja (5.58).} \end{aligned}$$

Luotettavuuslausekkeen ulkonainen muoto on siis kaikissa neljässä tapauksessa lausekkeen $S_M(\lambda)$ sopivalla määrittelyllä saatu täsmälleen samanlaiseksi. Tällä lausekkeella $S_M(\lambda)$ on näin ollen jatkossa varsin keskeinen asema. Sen vuoksi esitetäänkin aluksi eräitä sitä koskevia tuloksia.

Tähän asti on eri systeemien vastaavia suureita merkitty samoilla symboleilla. Sekaannuksen vaaraa ei ole ollut, koska tarkastelut ovat olleet toisistaan erilliset. Pääin vastoin analogia eri systeemien kesken on säilynyt ja systeemien toisaalta samanlaiset, toisaalta erilaiset ominaisuudet ovat korostuneet. Nyt, kun tarkasteluja suoritetaan eri systeemien kesken rinnakkain, on symbolit erotettava toisistaan. Otetaan käyttöön merkintätapa, jossa kyseessä oleva systeemi ilmaistaan suureeseen liitettävällä yläindeksillä. Olkoon tämän indeksin arvo sama kuin systeemien esiintymisjärjestys edellä, ts. (A, P_1) - systeemiin liittyviä suureita merkitään 1:llä, (A, P_2) :een 2:lla jne. Lausekkeen $S_M(\lambda)$ osalta on tällöin erityisesti

$$(6.2) \quad S_{H_i}^{(1)}(\lambda) = \left\{ \frac{M}{\sum_{k=1}^M \frac{1 - a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)}} \right\}^{-1}$$

$$(6.3) \quad S_M^{(2)}(\lambda) = \left\{ \sum_{k=1}^M \frac{1-a_k(\lambda)}{\lambda a_k(\lambda)} Q^{(2)}(0, k-1) \right\}^{-1}$$

$$= \left\{ \frac{Q^{(2)}(0, M)-1}{\lambda} \right\}^{-1}$$

$$= \frac{\lambda \prod_{k=1}^M a_k(\lambda)}{1 - \prod_{k=1}^M a_k(\lambda)}$$

$$(6.4) \quad S_M^{(3)}(\lambda) = \frac{\lambda a(\lambda)}{M[1-a(\lambda)]}$$

$$(6.5) \quad S_M^{(4)}(\lambda) = \frac{\lambda [a(\lambda)]^M}{1 - [a(\lambda)]^M}$$

Aluksi tarkastellaan eräitä funktioiden $a_k(\lambda)$ ($k=1, 2, \dots, M$) ominaisuuksia.

Lemma 6.1. Kaikilla positiivisilla λ :n arvoilla on voimassa

$$(6.6) \quad 0 < a_k(\lambda) < 1 \quad (k=1, 2, \dots, M)$$

$$(6.7) \quad a_1(\lambda) < a_2(\lambda) < \dots < a_{M-1}(\lambda) < a_M(\lambda).$$

Todistus. Todistetaan ensin väite (6.6). Sovittujen merkintöjen mukaan on (vrt. yhtälö (4.84)):

$$(6.8) \quad a_k(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} k \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} dx \quad (k=1, 2, \dots, M)$$

Olkoon nyt λ mielivaltainen kiinnitetty positiiviluku. Yhtälöstä (6.8) saadaan määrättyjen integraalien väliarvolausetta¹ soveltaen tulos

$$(6.9) \quad a_k(\lambda) = e^{-\lambda \int_0^{\infty} k \alpha(x) dx} \int_0^{\infty} k \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} dx, \quad (k=1, 2, \dots, M)$$

missä $0 < \int_0^{\infty} k \alpha(x) dx < \infty$. Yhtälöstä (6.9) saadaan edelleen (2.11):n perusteella

$$(6.10) \quad a_k(\lambda) = e^{-\lambda \int_0^{\infty} k \alpha(x) dx}, \quad (k=1, 2, \dots, M)$$

joka suoraan osoittaa väitteen (6.6) oikeaksi.

¹ Lindelöf II, s. 302.

Toiseksi osoitetaan, että kiinteällä λ :n arvolla $a_k(\lambda)$ on k :n mukana kasvava. Vaikka lausekkeilla $a_k(\lambda)$ ei olekaan nyt käsitellyissä olevien tarkastelujen kannalta mielekästä tulkintaa muilla kuin kokonaislukuarvoilla, ei määrittely-yhtälö (6.8) millään tavalla aseta k :lle tällaista vaatimusta. Oletetaankin siksi todistukseen ajaksi k :n voivan muuttua jatkuvasti. Väite (6.7) voidaan näin ollen osoittaa oikeaksi näyttämällä, että $\frac{d}{dk} \{a_k(\lambda)\} > 0$ kaikilla k :n positiiviarvoilla.

Yhtälön (2.11) perusteella on, kun $k > 0$

$$(6.11) \quad \int_0^{\infty} k \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} dx = 1.$$

Derivoimalla (6.11) k :n suhteen saadaan

$$\frac{d}{dk} \left\{ \int_0^{\infty} k \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} dx \right\} = 0,$$

eli

$$\int_0^{\infty} \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} dx + \int_0^{\infty} k \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} \left[-\int_0^x \alpha(u) du \right] dx = 0$$

ja edelleen

$$(6.12) \quad \int_0^{\infty} \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du \right] dx = 0$$

Yhtälössä (6.12) on integroitavan alkuosa

$$(6.13) \quad \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du}$$

positiivinen kaikilla x :n arvoilla. Hakasuluissa oleva lauseke

$$(6.14) \quad 1 - k \int_0^x \alpha(u) du$$

on puolestaan monotonisesti vähenevä x :n funktio. Lauseke (6.14) on aluksi positiivinen ($=1$, kun $x=0$), riittävän suurilla x :n arvoilla se on negatiivinen (vrt. yhtälö (2.10)). Lausekkeen (6.13) positiivisuudesta ja (6.14):n monotonisuudesta sekä yllä esitettyistä seikoista seuraa nyt, että

$$(6.15) \quad \alpha(x) e^{-\int_0^x k \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du \right] \begin{cases} \geq 0, & \text{kun } x \leq x_k \\ \leq 0, & \text{kun } x \geq x_k \end{cases}$$

missä x_k on yhtälön

$$(6.16) \quad 1 - k \int_0^x \alpha(u) du = 0$$

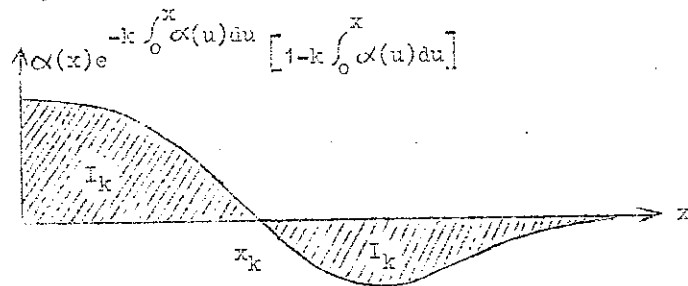
ratkaisu. Yhtälö (6.12) voidaan kirjoittaa tämän jälkeen muotoon

$$(6.17) \quad \begin{cases} \int_0^{x_k} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du \right] dx \\ + \int_{x_k}^{\infty} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du \right] dx = 0 \end{cases}$$

Yhtälön (6.17) ensimmäinen yhteenlaskettava on (6.15):n nojalla positiivinen, jälkimmäinen vastaavasti negatiivinen. Koska summa on = 0, ovat yhteenlaskettavat itseisarvoltaan yhtäsuuret, eli voidaan merkitä

$$(6.18) \quad \begin{cases} \int_0^{x_k} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du \right] dx = I_k \\ \int_{x_k}^{\infty} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du \right] dx = -I_k \end{cases}$$

missä $I_k > 0$. Saatua tulosta havainnollistaa kuva 6.1



Kuva 6.1. Yhtälön (6.17) pinta-aratulkinta

Saadun välituloksen (6.18) ja määrättyjen integraalien väliarvolauseen nojalla voidaan $a_k(\lambda)$:n derivaatalle viimein johtaa lauseke:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left\{ a_k(\lambda) \right\} &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} dx \\ &\quad + k \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[- \int_0^x \alpha(u) du \right] dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du \right] dx \\ &= \int_0^{x_k} e^{-\lambda x} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du \right] dx \\ &\quad + \int_{x_k}^{\infty} e^{-\lambda x} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du \right] dx \\ &= e^{-\lambda \int_0^{x_k} \alpha(u) du} \int_0^{x_k} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du \right] dx \\ &\quad + e^{-\lambda \int_0^{\infty} \alpha(u) du} \int_{x_k}^{\infty} \alpha(x) e^{-k \int_0^x \alpha(u) du} \left[1 - k \int_0^x \alpha(u) du \right] dx \\ &= e^{-\lambda \int_0^{x_k} \alpha(u) du} I_k - e^{-\lambda \int_0^{\infty} \alpha(u) du} I_k \\ &= (e^{-\lambda \int_0^{x_k} \alpha(u) du} - e^{-\lambda \int_0^{\infty} \alpha(u) du}) I_k, \end{aligned}$$

missä $0 < \int_0^{x_k} \alpha(u) du < \int_0^{\infty} \alpha(u) du < \infty$. Näin on saatu tulos

$$(6.19) \quad \frac{d}{d\lambda} \left\{ a_k(\lambda) \right\} = (e^{-\lambda \int_0^{x_k} \alpha(u) du} - e^{-\lambda \int_0^{\infty} \alpha(u) du}) I_k > 0,$$

mikä osoittaa väitteen (6.7) paikkansa pitäväksi. Lemma 6.1 on siten kokonaisuudessaan todistettu.

Lemma 6.2. Kaikilla positiivisilla λ :n arvoilla on voimassa

$$(6.20) \quad S_M^{(1)}(\lambda) > S_M^{(2)}(\lambda) > S_M^{(4)}(\lambda)$$

$$(6.21) \quad S_M^{(1)}(\lambda) > S_M^{(3)}(\lambda) > S_M^{(4)}(\lambda).$$

Todistus. Olkoon λ mielivaltainen kiinnitetty positiiviluku. Otetaan lemmän 6.2 todistuksen ajaksi käyttöön lyhennetty merkintätapa, jossa funktioiden $a_k(\lambda)$ argumenttia ei merkitä näkyviin; siis seuraavassa on $a_k = a_k(\lambda)$ ($k=1,2,\dots,M$) ja $a = a(\lambda)$

Osoitetaan ensin, että $S_M^{(1)}(\lambda) > S_M^{(2)}(\lambda)$. Yhtälöistä (6.2) ja (6.1) seuraa

$$S_M^{(1)}(\lambda) - S_M^{(2)}(\lambda) = \frac{\lambda}{\sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{a_k}} - \frac{\lambda}{\sum_{k=1}^M \left[\frac{1-a_k}{a_k} + \prod_{j=1}^{k-1} a_j \right]}$$

$$> \frac{\lambda}{\sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{a_k}} - \frac{\lambda}{\sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{a_k}} = 0,$$

sillä lemmän 6.1 mukaanhan on $a_k(\lambda) < 1$, eli $1 / \left(\prod_{j=1}^{k-1} a_j \right) > 1$.

(Edellytyksenä aidolle epäyhtälölle on, että $M \geq 2$. Tämä oletetaan kaikkialla seuraavassa, sillä tapauksessa $M = 1$ varmistusmenetelmän ja korjauspolitiikan vaikutukset häviävät ja kaikki neljä erityissysteemiä supistuvat yhdeksi).

Väitteen (6.20) jälkimmäinen osa nähdään myös helposti oikeaksi lemmän 6.1 perusteella:

$$S_M^{(2)}(\lambda) - S_M^{(4)}(\lambda) = \frac{\lambda \prod_{k=1}^M a_k}{1 - \prod_{k=1}^M a_k} - \frac{\lambda a^M}{1 - a^M}$$

$$= \lambda \frac{\prod_{k=1}^M a_k - a^M}{(1 - \prod_{k=1}^M a_k)(1 - a^M)} > 0.$$

Vastaavalla tavalla lemmän 6.1 tuloksia käyttäen voidaan todistaa epäyhtälöiden (6.21) voimassaolo:

$$S_M^{(1)}(\lambda) - S_M^{(3)}(\lambda) = \frac{\lambda}{\sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{a_k}} - \frac{\lambda}{M \frac{1-a}{a}}$$

$$= \lambda \left\{ \frac{1}{\sum_{k=1}^M \frac{1}{a_k} - M} - \frac{1}{\frac{M}{a} - M} \right\}$$

$$= \lambda \left\{ \frac{\frac{M}{a} - \sum_{k=1}^M \frac{1}{a_k}}{\left(\sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{a_k} \right) M \frac{1-a}{a}} \right\}$$

$$= \frac{\lambda \sum_{k=1}^M \frac{a_k - a}{a_k}}{\left(\sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{a_k} \right) M(1-a)} > 0$$

$$S_M^{(5)}(\lambda) - S_M^{(4)}(\lambda) = \frac{\lambda a}{M(1-a)} - \frac{\lambda a^M}{1-a^M}$$

$$= \frac{\lambda a}{1-a^M} \left\{ \frac{1+a+\dots+a^{M-1}}{M} - a^{M-1} \right\}$$

$$> \frac{\lambda a}{1-a^M} \left\{ \frac{Ma^{M-1}}{M} - a^{M-1} \right\} = 0.$$

Lausekkeiden $S_M^{(i)}(\lambda)$ ($i=1,2,3,4$) keskinäiset suuruussuhteet on näin määritetty lukuunottamatta $S_M^{(2)}(\lambda)$:n ja $S_M^{(3)}(\lambda)$:n välillä vallitsevaa relaatiota. Osoittautuu, että näiden kahden lausekkeen välistä suuruusjärjestystä ei yleisessä tapauksessa voidakaan määrittää. Jakautumatyypinkään tunteminen ei tässä yhteydessä vielä riitä, jakautumat on tunnettava parametreineen. Tätä havainnollistaa seuraava yksinkertainen eksponentiaali-jakautumaan liittyvä esimerkki.

Olkoon

$$(6.22) \quad A(x) = \alpha e^{-\alpha x}$$

ja $M = 2$. Tällöin on

$$(6.23) \quad a_k(\lambda) = k\alpha \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} e^{-k\alpha x} dx$$

$$= \frac{k\alpha}{\lambda + k\alpha} \quad (k=1,2)$$

Tarkastettavat lausekkeet ovat tässä tapauksessa

$$(6.24) \quad S_2^{(2)}(\lambda) = \frac{\lambda}{Q^{(2)}(0,2)-1} = \frac{\lambda}{\frac{\lambda+\alpha}{\alpha} \frac{\lambda+2\alpha}{2} - 1}$$

$$= \frac{\lambda}{(1+\delta)(1+\frac{\delta}{2}) - 1},$$

$$(6.25) \quad S_2^{(3)}(\lambda) = \frac{\lambda \frac{\alpha}{\lambda+\alpha}}{2 \frac{\lambda}{\alpha}} = \frac{\lambda}{2\delta},$$

kun on merkitty $\lambda/\alpha = \delta$. Edelleen on

$$(6.26) \quad S_2^{(2)}(\lambda) - S_2^{(3)}(\lambda) = \lambda \frac{2\delta - (1-\delta)(1+\delta/2) + 1}{2\delta[(1+\delta)(1+\delta/2) - 1]}$$

$$= \frac{\lambda(1-\delta)}{4[(1+\delta)(1+\delta/2) - 1]}$$

Erotuksen (6.26) etumerkki jää nyt riippumaan suureen δ arvosta, ts. vikataajuuksien λ ja α suhteesta. Esimerkitapauksessa on siis voimassa

$$(6.27) \quad \begin{cases} S_2^{(2)}(\lambda) > S_2^{(3)}(\lambda), & \text{jos } \lambda < \alpha \\ S_2^{(2)}(\lambda) < S_2^{(3)}(\lambda), & \text{jos } \lambda > \alpha \end{cases}$$

Esimerkin valossa on selvää, että lemmän 6.2 tuloksia ei yleisessä tapauksessa voida $S_M^{(2)}(\lambda)$:n ja $S_M^{(3)}(\lambda)$:n osalta täydentää.

6.2. Luotettavuuden komponentit: tilatodennäköisyydet P_m .

Yhtälöissä (4.87), (4.149), (5.33) ja (5.65) on esitetty eri systeemien stationäärin vaiheen luotettavuudet. Niinkuin systeemien tilojen määrittelyn yhteydessä ja myöhemmissäkin tarkasteluissa on käynyt ilmi, koostuu kukin näistä luotettavuuslausekkeista M :stä eri komponentista, nimittäin tilatodennäköisyyksistä P_0, P_1, \dots, P_{M-1} . Näiden tilatodennäköisyyksien keskinäisiin suuruussuhteisiin ja luotettavuuden muodostumiseen näistä komponenteista liittyy eräitä mielenkiintoisia ominaisuuksia, joita seuraavassa tarkastellaan.

Lause 6.1. Kaikilla positiivisilla λ :n arvoilla on voimassa

$$(6.28) \quad P_0^{(1)} < P_1^{(1)} < \dots < P_{M-1}^{(1)}$$

$$(6.29) \quad P_0^{(3)} = P_1^{(3)} = \dots = P_{M-1}^{(3)}$$

$$(6.30) \quad P_0^{(4)} > P_1^{(4)} > \dots > P_{M-1}^{(4)}$$

missä $P_m^{(1)}$:n lauseke on esitetty yhtälössä (4.78), $P_m^{(3)}$:n yhtälössä (5.27) ja $P_m^{(4)}$:n yhtälössä (5.59).

Todistus. Yhtälön (4.78) nojalla on ($m=0,1,\dots,M-2$)

$$(1) \quad \frac{P_m^{(1)}}{P_{m-1}^{(1)}} = \frac{1-a_{M-m}}{a_{M-m}} \frac{a_{M-m-1}}{1-a_{M-m-1}} = \frac{a_{M-m-1}^{M-m-1} a_{M-m}^{M-m-1}}{a_{M-m}^{M-m} a_{M-m-1}^{M-m-1}} < 1,$$

sillä lemmän 6.1 mukaan on $a_{M-m-1} < a_{M-m}$. Näin on väite (6.28) osoitettu oikeaksi. Tulos (6.29) on itse asiassa todettu jo aiemmin, vrt. yhtälö (5.27) ja sen kommentointi sivulla 80. Väitteen (6.30) todistamiseksi saadaan yhtälön (5.59) perusteella ($m=0,1,\dots,M-2$):

$$(4) \quad \frac{P_m^{(4)}}{P_{m+1}^{(4)}} = \frac{1}{a} > 1,$$

mikä osoittaa väitteen todeksi. Lause on näin kokonaisuudessaan todistettu.

Lauseesta 6.1 voidaan vielä todeta, että siinä ei ole mitään tilatodennäköisyyksiä $P_m^{(2)}$ koskevia tuloksia. Näitä koskevat tulokset vaatisivat jälleen tiheysfunktion $A(x)$ yksityiskohtaista tuntemista (parametrien arvoineen). Yleisessä muodossa on ($m=0,1,\dots,M-2$):

$$(6.31) \quad \frac{P_m^{(2)}}{P_{m+1}^{(2)}} = \frac{1-a_{M-m}}{a_{M-m}} \frac{\prod_{k=1}^{M-m-1} a_k}{\prod_{k=1}^{M-m} a_k} = \frac{1-a_{M-m}}{(1-a_{M-m-1})^{M-m}}$$

Eksponentiaalijakautuman tapauksessa suhde (6.31) saa arvon (vrt. yhtälö (6.23)):

$$(6.32) \quad \frac{P_m^{(2)}}{P_{m+1}^{(2)}} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+(M-m)\alpha}}{\frac{\lambda}{\lambda+(M-m-1)\alpha}} = \frac{(M-m)\alpha + (\lambda - \alpha)}{(M-m)\alpha}$$

Yhtälöstä (6.32) nähdään suoraan, että $P_m^{(2)}$ on m :n mukana kasvava, vakio tai vähenevä sen mukaan, onko $\lambda < \alpha$, $\lambda = \alpha$ vai $\lambda > \alpha$. Siis epäyhtälöiden (6.28) - (6.30) kaltaisia tuloksia ei (A, P_2) -systeemin tapauksessa voida esittää.

Seuraavaksi tarkastellaan eri systeemien luotettavuuksia rinnakkain ja suoritetaan systeemien välisiä vertailuja. Osasysteemiin S_1 liittyviä suureita \bar{B} ja \bar{C} voidaan pitää S_1 :n kytkennästä ja noudatettavasta korjauspolitiikasta riippumattomina; S_1 :n synnyttämän korjaustarpeen tapauksessahan on kysymyksessä sen kaikkien komponenttien kuntoon saattaminen. Voidaan siis rajoituksesta olettaa ja merkitä

$$(6.33) \quad \bar{B}^{(1)} = \bar{B}^{(2)} = \bar{B}^{(3)} = \bar{B}^{(4)} = \bar{B}$$

$$(6.34) \quad \bar{C}^{(1)} = \bar{C}^{(2)} = \bar{C}^{(3)} = \bar{C}^{(4)} = \bar{C}.$$

Sen sijaan suureiden \bar{H}_i ja \bar{M}_i ($i=1,2,\dots,N$) kohdalla tilanne on jossakin määrin toinen. Minimikorjauspolitiikkaa noudatettaessa suureet \bar{H}_i ja \bar{M}_i liittyvät S_2 :n komponenttien korjaus- ja odotus-aikoihin sekä S_1 :n ennakkohuolto-ohjelman toteuttamiseen. Käyskorjauspolitiikan tapauksessa on tämän lisäksi otettava huomioon suoritettavat S_1 :n viallisten komponenttien korjaukset. Seuraavia tarkasteluja varten oletetaan kuitenkin, että S_1 :n komponenttien korjaukset on mahdollista toteuttaa sen ajan puitteissa, joka kuluu S_2 :n komponenttien kunnostukseen. Tämä on yleensä saatavissa aikaan lisäkustannuksin (suurempi korjausmiehistö, tehokkaampi korjauspaja jne.). Oletetaan ja merkitään siis

$$(6.35) \quad \left. \begin{aligned} \bar{H}_i^{(1)} &= \bar{H}_i^{(2)} = \bar{H}_i^{(3)} = \bar{H}_i^{(4)} = \bar{H}_i \\ \bar{M}_i^{(1)} &= \bar{M}_i^{(2)} = \bar{M}_i^{(3)} = \bar{M}_i^{(4)} = \bar{M}_i \end{aligned} \right\} \quad (i=1,2,\dots,N)$$

$$(6.36) \quad \left. \begin{aligned} \bar{H}_i^{(1)} &= \bar{H}_i^{(2)} = \bar{H}_i^{(3)} = \bar{H}_i^{(4)} = \bar{H}_i \\ \bar{M}_i^{(1)} &= \bar{M}_i^{(2)} = \bar{M}_i^{(3)} = \bar{M}_i^{(4)} = \bar{M}_i \end{aligned} \right\} \quad (i=1,2,\dots,N)$$

Eri systeemejä toisiinsa verrattaessa on kuitenkin pidettävä mielessä ne kuhunkin systeemiin liittyvät taloudelliset panokset, joilla (6.35):n ja (6.36):n mukainen tilanne on saatu aikaan.

Lause 6.2. Yleisesti on voimassa

$$(6.37) \quad P_o^{(1)} < P_o^{(2)} < P_o^{(4)}$$

$$(6.38) \quad P_o^{(1)} < P_o^{(3)} < P_o^{(4)}$$

$$(6.39) \quad P_{M-1}^{(1)} > P_{M-1}^{(2)} > P_{M-1}^{(4)}$$

$$(6.40) \quad P_{M-1}^{(1)} > P_{M-1}^{(3)} > P_{M-1}^{(4)}$$

Todistus. Todistus suoritetaan vain epäyhtälöiden (6.37) osalta. Käytetty menetelmä sopii hyvin myös muiden väitteiden (6.38) - (6.40) todistamiseen. Koska todistukset ovat kuitenkin paljolti nyt esitettävää muistuttavia, ne sivuutetaan.

Yhtälöiden (4.78) ja (4.142) perusteella on

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_o^{(1)}} - \frac{1}{P_o^{(2)}} &= \frac{\lambda a_M}{1-a_M} \left\{ \left[1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \left[\frac{1}{S_M^{(1)}(\lambda)} - \frac{1}{S_M^{(2)}(\lambda) Q^{(2)}(0, M-1)} \right] \right. \\ &\quad \left. + (\bar{B} + \bar{C}) \left[1 - \frac{1}{Q^{(2)}(0, M-1)} \right] \right\} \\ &> \frac{a_M}{1-a_M} \left[1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \left\{ \sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{a_k} \left[1 - \frac{Q^{(2)}(0, k-1)}{Q^{(2)}(0, M-1)} \right] \right\} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Yllä olevaan epäyhtälöketjuun on johtanut osittain lemma 6.1 suoraan, osittain sen seuraukset:

$$1 - \frac{1}{Q^{(2)}(0, M-1)} = 1 - \prod_{k=1}^{M-1} a_k > 1 - 1 = 0$$

$$1 - \frac{Q^{(2)}(0, k-1)}{Q^{(2)}(0, M-1)} = \begin{cases} 1 - \prod_{j=k}^{M-1} a_j > 0 & (k=1, 2, \dots, M-1) \\ 1 - 1 = 0 & (k=M) \end{cases}$$

Vastaavasti on (4.142):n ja (5.59):n perusteella

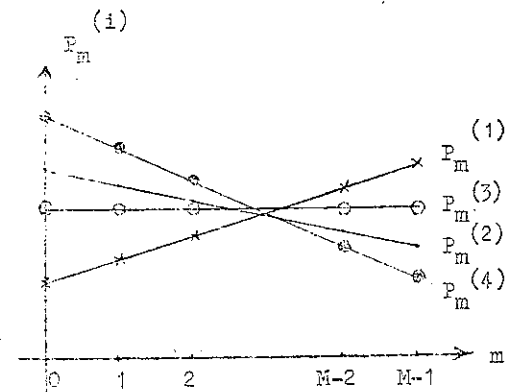
$$\begin{aligned} \frac{1}{P_o^{(2)}} - \frac{1}{P_o^{(4)}} &= \frac{\lambda a_M}{(1-a_M) Q^{(2)}(0, M-1)} \left\{ \frac{1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i)}{S_M^{(2)}(\lambda)} + (\bar{B} + \bar{C}) \right\} \\ &\quad - \frac{1-a_M}{1-a} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + \frac{\lambda a_M}{1-a_M} (\bar{B} + \bar{C}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \left\{ \frac{\lambda a_M}{1-a_M} \sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{\lambda a_k} \frac{Q^{(2)}(0, k-1)}{Q^{(2)}(0, M-1)} - \frac{1-a^M}{1-a} \right\} \\
&+ (\bar{B} + \bar{C}) \left\{ \frac{\lambda a_M}{1-a_M} \frac{1}{Q^{(2)}(0, M-1)} - \frac{\lambda a^M}{1-a} \right\} \\
&= \left[1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \left\{ \sum_{k=1}^M \left[\frac{a_M}{a_k} \frac{1-a_k}{1-a_M} \frac{Q^{(2)}(0, k-1)}{Q^{(2)}(0, M-1)} - a^{M-k} \right] \right\} \\
&+ (\bar{B} + \bar{C}) \lambda \left\{ \frac{a_M}{1-a_M} \sum_{k=1}^{M-1} a_k - \frac{a}{1-a} a^{M-1} \right\} \\
&> \left[1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \left\{ \sum_{k=1}^M \left[\frac{Q^{(2)}(0, k-1)}{Q^{(2)}(0, M-1)} - a^{M-k} \right] \right\} \\
&+ (\bar{B} + \bar{C}) \lambda \left\{ \frac{a}{1-a} \sum_{k=1}^{M-1} a_k - a^{M-1} \right\} \\
&> \left[1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) \right] \left\{ \sum_{k=1}^{M-1} \left[\sum_{j=k}^{M-1} a_k - a^{M-k} \right] \right\} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Todistusketjussa esiintyvät yhtälöt on jälleen saatu lemmän 6.1 tuloksiin nojautuen. Siirtymällä nyt tilatodennäköisyyksien käänteisarvoista itse tilatodennäköisyyksiin määhdään (6.37) välittömästi oikeaksi. Muiden epäyhtälöparien todistus on hyvin samantapainen.

Lauseessa 6.2 on jälleen "aukko" todennäköisyyksien P_0 ja $P_0^{(3)}$ sekä $P_{M-1}^{(2)}$ ja $P_{M-2}^{(3)}$ keskinäisessä vertailussa. Eksponentiaalijakautumaan liittyvän esimerkin avulla voitaisiin osoittaa, että tämä aukkoa ei yleisessä tapauksessa saadakaan poistetuksi (eksponentiaalijakautuman tapauksessa esim. suuruussuhteet jäävät riippumaan parametrien α ja λ keskinäisestä suuruusjärjestyksestä).

Lauseiden 6.1 ja 6.2 tulokset yhdistäen voidaan luotettavuuksien muodostumista komponenteistaan havainnollistaa kuvalla 6.2.



Kuva 6.2. Luotettavuuden muodostuminen komponenteistaan.

6.3. Luotettavuuden riippuvuus osajärjestelmien S_i komponenttien lukumäärästä.

Tarkastelut on tähän asti suoritettu kiinteällä M :n arvolla, ts. osajärjestelmien S_i komponenttien lukumäärä on ollut ennalta määrätty. Koska nyt kuitenkin rinnankytkemän ensisijaisena tehtävänä on systeemin luotettavuuden parantaminen varmistamalla tietyn strategisen komponentin toiminta toisilla samanlaisilla komponenteilla, on luonnollisesti mielenkiintoista tutkia, miten systeemin luotettavuus riippuu näiden komponenttien lukumäärästä.

Yhtälön (6.1) mukaisesti voidaan systeemin luotettavuus kussakin tapauksessa lausua muodossa

$$P = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M S_i(\lambda) (\bar{B} + \bar{C})},$$

missä lauseke $S_i(\lambda)$ on kyseessä olevasta erityissysteemistä riippuen jokin lausekkeista (6.2) - (6.5). Todistetaan ensin seuraava lause, joka on intuitiivisesti selvä, mutta jota ei ole toistaiseksi formaalisesti esitetty.

Lause 6.3. Kunkin tarkasteltavan systeemin luotettavuus on S_1 :n komponenttien lukumäärän mukana kasvava.

Todistus. Lauseen todistamiseksi riittää yhtälön (6.1) perusteella osoittaa, että $S_M(\lambda)$ on kaikilla positiivisilla λ :n arvoilla M :n suhteen vähenevä. Olkoon siksi λ mielivaltainen, kiinteä positiiviluku. Tällöin saadaan lemmän 6.1 perusteella seuraavat tulokset,

$$\frac{1}{S_{M+1}^{(1)}} - \frac{1}{S_M^{(1)}} = \sum_{k=1}^{M+1} \frac{1-a_k}{\lambda a_k} - \sum_{k=1}^M \frac{1-a_k}{\lambda a_k} = \frac{1-a_{M+1}}{\lambda a_{M+1}} > 0$$

$$\frac{S_{M+1}^{(2)}}{S_M^{(2)}} = \frac{\lambda \prod_{k=1}^{M+1} a_k}{1 - \prod_{k=1}^{M+1} a_k} \cdot \frac{1 - \prod_{k=1}^M a_k}{\lambda \prod_{k=1}^M a_k} = \frac{a_{M+1} - \prod_{k=1}^{M+1} a_k}{1 - \prod_{k=1}^{M+1} a_k} < 1$$

$$\frac{S_{M+1}^{(3)}}{S_M^{(3)}} = \frac{\lambda a}{(M+1)(1-a)} \cdot \frac{M(1-a)}{\lambda a} = \frac{M}{M+1} < 1$$

$$\frac{S_{M+1}^{(4)}}{S_M^{(4)}} = \frac{\lambda a^{M+1}}{1-a^{M+1}} \cdot \frac{1-a^M}{\lambda a^M} = \frac{a-a^{M+1}}{1-a^{M+1}} < 1$$

Yllä olevat tulokset ovat voimassa kaikilla positiivisilla M :n arvoilla, joten lause 6.3 on näin todistettu.

Lisättäessä S_1 :n komponenttien lukumäärää systeemin luotettavuus siis kasvaa. Rajatapauksessa, kun komponenttien lukumäärä tulee hyvin suureksi, saadaan

$$(6.41) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} S_M^{(1)}(\lambda) = s^{(1)}(\lambda) \geq 0$$

$$(6.42) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} S_M^{(2)}(\lambda) = s^{(2)}(\lambda) \geq 0$$

$$(6.43) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} S_M^{(3)}(\lambda) = s^{(3)}(\lambda) = 0$$

$$(6.44) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} S_M^{(4)}(\lambda) = s^{(4)}(\lambda) = 0$$

Raja-arvojen (6.43) ja (6.44) olemassaolo nähdään suoraan lausekkeista (6.4) ja (6.5), kun otetaan huomioon, että $0 < a(\lambda) < 1$.

Raja-arvot (6.41) ja (6.42) puolestaan ovat olemassa, koska lauseen 6.3 mukaan lukujonot $\{S_M^{(1)}(\lambda)\}$ ja $\{S_M^{(2)}(\lambda)\}$ ovat (kiinteällä λ :n arvolla) monotonisesti väheneviä ja alaspäin rajoitettuja (positiivisia).¹ Ovatko raja-arvot $s^{(1)}(\lambda)$ ja $s^{(2)}(\lambda)$ positiivisia vai = 0, jää riippumaan summien

$$(6.45) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-a_k}{a_k}$$

ja tulon

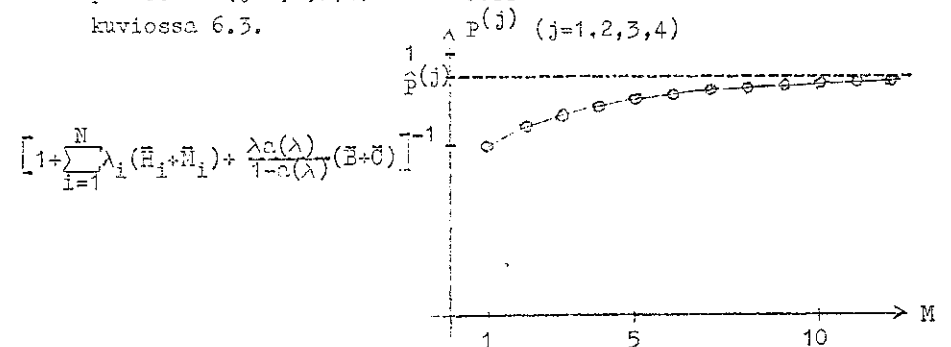
$$(6.46) \quad \prod_{k=1}^{\infty} a_k$$

suppenevuudesta tai hajaantumisesta. Mikäli (6.45) suppenee, on $s^{(1)}(\lambda) > 0$, muulloin $s^{(1)}(\lambda) = 0$. Samalla tavalla (6.46):n suppeneminen merkitsee $s^{(2)}(\lambda)$:n positiivisuutta ja hajaantuminen $s^{(2)}(\lambda)$:n häviämistä. Suppenevuuskysymykset jäävät kussakin yksittäistapauksessa erikseen ratkaistavaksi.

Raja-arvojen (6.41) - (6.44) olemassaolo merkitsee, että myöskin systeemin luotettavuudella on raja-arvo, joka samalla on luotettavuuden yläraja. Voidaan näin merkitä

$$(6.47) \quad \hat{P}^{(j)} = \lim_{M \rightarrow \infty} P^{(j)} = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + s^{(j)}(\lambda) (\bar{B} + \bar{C}) \right\}^{-1} \quad (j=1,2,3,4)$$

Systeemillä, joka todella voittuu ($\lambda > 0$), tämä raja-arvo on aina yksiköstä pienempi, sillä onhan tällöin $\sum_{i=1}^N \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) > 0$ ja aaltosuluissa oleva lauseke > 1 . S_1 :n komponenttien lukumäärän lisäyksen myötä syntyvä systeemin luotettavuuden kasvu on kussakin tapauksessa ($j=1,2,3,4$) samantyyppinen ja on esitetty kaavamaisesti kuviossa 6.3.



Kuva 6.3. Systeemin luotettavuus osasysteemin S_1 komponenttien lukumäärän funktiona.

¹ Monotonisen, rajoitetun lukujonon suppenevuudesta ks. Lindelöf I, s. 199.

Kuvaa 6.3 tarkasteltaessa on muistettava, että siinä esitetty luotettavuuden kasvu on saavutettavissa vain tietyin taloudellisin panoksin (lisäkomponenttien hankinta-, käyttö- ja kunnossapitokustannukset jne.). Tässä yhteydessä tarjoutuisikin nyt tilaisuus optimointiin komponenttien lukumäärän suhteen: toisaalta komponenttien lisäys aikaansaa luotettavuuden kasvun ja sitä kautta tuotannon tehostumisen, häiriöiden vähenemisen jne., toisaalta tämä aiheuttaa edellä mainitut lisäkustannukset. Suurimpana vaikeutena tämän tyyppisessä optimoinnissa on luotettavuuden kasvun kautta syntyvän hyödyn ja aiheutettujen kustannusten seattaminen yhteismitallisiksi ts. sopivan optimoitavan kohdefunktion löytäminen. Yllä esitetyn kaltaiset optimointikysymykset eivät kuitenkaan kuulu tämän tutkimuksen tavoitteisiin, joten niihin ei tätä laajemmalti puututa. Optimointikysymykset vaativat verraten yksityiskohtaisia oletuksia mm. kustannusfunktioiden ja luotettavuuden puutteen ja syntyvien tappioiden välisiä riippuvuuksia kuvaavien funktioiden luonteesta ja näin jouduttaisiin poikkeamaan tähän asti mm. jakautumien suhteen noudatetusta verraten yleisestä linjasta.

6.4. Luotettavuus ja varmistusmenetelmä

Yhtälön (6.1) ja lemmän 6.2 tuloksien perusteella nähdään suoraan, että komponenteiltaan, korjauspolitiikaltaan ja muilta relevanteilta tekijöiltään samanlaisista systeemeistä passiivisesti rinnankytketyn osasynteen S_1 omaava systeemi on luotettavampi kuin systeemi, jossa S_1 on aktiivisesti rinnankytketty. Voidaan siis todeta

Lause 6.4. Yhdenmukaisissa olosuhteissa on

$$(6.48) \quad P(3) > P(1)$$

$$(6.49) \quad P(4) > P(2)$$

Todennäköisyysvertailuja (6.48) ja (6.49) suoritettaessa on jälleen huomattava ne reaalisysteemin ominaisuudet, jotka vaikuttavat eri rinnankytkentämuotojen konstruointiin. Passiivinen rinnankytkentä mm. edellyttää ylimääräistä ohjauslaitetta (tai -henkilöä), joka komponentin vioittuessa kytkee sen tilalle

toimivan komponentin. Aktiivisen ja passiivisen rinnankytkennän toteuttamis- ja kunnossapitokustannukset poikkeavat myös muilta osin toisistaan (esim. S_1 :n ennakkohuolto-ohjelman osalta). Lopullisia vertailuja tehtäessä kaikki tämän tyyppiset näkökohdat on luonnollisesti pidettävä mielessä.

Lause 6.4 koski tiettyä, olosuhteiltaan täysin spesifioitua tilannetta. Tarkastelut voidaan kuitenkin ulottaa myös laajemmalle. Erityisesti voidaan tällöin tarkastella passiivisen rinnankytkennän tuomaa lisäystä luotettavuuteen (aktiiviseen kytkentään verrattuna) S_1 :n komponenttien lukumäärän funktiona. Merkitään

$$(6.50) \quad \Delta_M^{31} = P(3) - P(1)$$

$$(6.51) \quad \Delta_M^{42} = P(4) - P(2)$$

kun S_1 :ssä on M rinnakkaista komponenttia. Ensiksikin on yhtälöiden (6.1) - (6.5) perusteella

$$(6.52) \quad \Delta_1^{31} = \Delta_1^{42} = 0.$$

Yhtälöiden (6.48) ja (6.49) perusteella on

$$(6.53) \quad \begin{cases} \Delta_M^{31} > 0 \\ \Delta_M^{42} > 0 \end{cases} \quad \text{kun } M \geq 2.$$

Merkitä (6.47) huomioon ottaen saadaan vielä

$$(6.54) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \Delta_M^{31} = \hat{P}(3) - \hat{P}(1)$$

$$= \frac{s^{(1)}(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})}{\left\{ 1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{R}_i + \bar{M}_i) \right\} + s^{(1)}(\lambda)(\bar{B} + \bar{C})} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{R}_i + \bar{M}_i) \right\}$$

$$(6.55) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \Delta_M^{42} = \hat{P}(4) - \hat{P}(2)$$

$$= \frac{s^{(2)}(\lambda)(\bar{B}+\bar{C})}{\left\{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + s^{(2)}(\lambda)(\bar{B}+\bar{C})\right\} \left\{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i)\right\}}$$

Tulokset (6.52) - (6.55) yhdistäen voidaan lopuksi todeta, että S_1 :n komponenttien lukumäärän kasvaessa erot passiivisen ja aktiivisen rinnankytkennän luotettavuuksissa aluksi kasvavat, kunnes ne vakiintuvat tietylle tasolle (tasolle (6.54) minimikorjauspolitiikan tapauksessa ja tasolle (6.55) täyskorjauspolitiikka kyseessä ollessa). Mikäli erityisesti raja-arvot $s^{(1)}(\lambda)$ ja $s^{(2)}(\lambda)$ ovat = 0, häviävät erot kytkentämuotojen väliltä riittävän suurilla M :n arvoilla (näin on laita mm. silloin, kun S_1 :n komponenttien vikataajuus on vakio eli häiriöttömän käytöajan jakautuma on eksponentiaalinen). Näissä tapauksissa on olemassa tietty äärellinen M :n arvo, jolla erot luotettavuuksissa ovat suurimmillaan.

6.5. Luotettavuus ja korjauspolitiikka

Tässä kappaleessa tarkastellaan rinnakkain systeemejä, jotka poikkeavat toisistaan vain noudatettavan korjauspolitiikan osalta. Niinkuin intuitiivisestikin on selvää, johtaa täyskorjauspolitiikka suurempaan luotettavuuteen kuin vastaavissa olosuhteissa toteutettu minimikorjauspolitiikka. Formaalisesti tämä nähdään yhtälöstä (6.1) soveltaen siihen lemmän 6.2 tuloksia. Voidaan todeta

Lause 6.5. Yhdenmukaisissa olosuhteissa on

$$(6.56) \quad P(2) > P(1)$$

$$(6.57) \quad P(4) > P(3).$$

Täyskorjauspolitiikalla saavutettu suurempi luotettavuus minimikorjauspolitiikkaan verrattuna on luonnollisesti tulosta korjaustoimintaan sijoitetuista suuremmista panoksista. Näiden panoksien ja luotettavuuden kasvun kautta saavutettavan hyödyn keskinäisestä suhteesta jää siten viime kädessä riippumaan korjauspolitiikkojen lopullinen edullisuus toisiinsa verrattuna.

Edellisen kappaleen 6.4 tapaan voidaan nytkin tarkastella korjauspolitiikan vaikutusta luotettavuuteen eri S_1 :n komponenttien lukumäärillä. Merkitään (komponenttien lukumäärää M vastaavasti)

$$(6.58) \quad \Delta_M^{21} = P(2) - P(1)$$

$$(6.59) \quad \Delta_M^{43} = P(4) - P(3).$$

Yhtälöiden (6.1) - (6.5) perusteella on

$$(6.60) \quad \Delta_1^{21} = \Delta_1^{43} = 0$$

ja epäyhtälöiden (6.48) - (6.49) perusteella

$$(6.61) \quad \begin{cases} \Delta_M^{21} > 0 \\ \Delta_M^{43} > 0 \end{cases} \quad \text{kun } M \geq 2$$

Raja-arvotuloksina saadaan vielä

$$(6.62) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \Delta_M^{21} = \hat{P}(2) - \hat{P}(1)$$

$$(6.63) \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \Delta_M^{43} = \hat{P}(4) - \hat{P}(3) = 0.$$

$$= \frac{[s^{(1)}(\lambda) - s^{(2)}(\lambda)](\bar{B}+\bar{C})}{\left\{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + s^{(1)}(\lambda)(\bar{B}+\bar{C})\right\} \left\{1 + \sum_{i=1}^M \lambda_i (\bar{H}_i + \bar{M}_i) + s^{(2)}(\lambda)(\bar{B}+\bar{C})\right\}}$$

Luotettavuuden kasvu siirryttäessä minimikorjauspolitiikasta täyskorjauspolitiikkaan on siis eri M :n arvoilla yhtälöiden (6.60) - (6.63) mukainen. Passiivisen rinnankytkennän tapauksessa (suure Δ_M^{43}) tilanne on täysin yksiselitteinen. Suureen Δ_M^{43} positiivisuudesta yksöstä suuremmilla M :n arvoilla ja sen häviämistä, kun $M=1$ tai kun $M \rightarrow \infty$, seuraa, että on olemassa tietty M :n arvo ($M \geq 2$), jolla erotus Δ_M^{43} on suurimmillaan, ts. jolla täyskorjauspolitiikan aikaansaama luotettavuuden absoluuttinen lisäys on maksimissaan. Aktiivisen rinnankytkennän tapauksessa (suure Δ_M^{21}) tilanne jää riippumaan raja-arvoista $s^{(1)}(\lambda)$ ja $s^{(2)}(\lambda)$. Lausekkeiden (6.45) ja (6.46) hajaantuessa

$s^{(1)}(\lambda)$:n ja $s^{(2)}(\lambda)$:n hävitessä tai $s^{(1)}(\lambda)$:n ja $s^{(2)}(\lambda)$:n ollessa muuten yhtä suuria toistuu yllä kuvattu tilanne: Δ_{M}^{21} :llä on maksimikohta äärellisellä M :n arvolla. Lausekkeiden $s^{(1)}(\lambda)$ ja $s^{(2)}(\lambda)$ ollessa erisuuria lähestyy Δ_{M}^{21} M :n kasvaessa asymptoottisesti arvoa (6.62), joko koko ajan kasvaen tai maksimikohdan omaten (ainakin aluksi tapahtuva kasvu on seurausta ehdoista (6.60) ja (6.61)). Pelkästään luotettavuutta kriteerinä pitäen on näin eräillä edellytyksillä olemassa M :n arvo, jolla täyskorjauspolitiikan tuoma luotettavuuden kasvu on suurimmillaan.

7. YHTEENVETO TUTKIMUKSEN KESKEISISTÄ TULOKSISTA

Tutkimuksen alussa, luvussa 2, luodaan katsaus kirjallisuudessa esiintyvään, ongelman asettelun ja myöhempien tarkastelujen kannalta keskeiseen matemaattisen luotettavuusteorian peruskäsitteistöön. Erityisesti paneudutaan käsitteeseen luotettavuus ja sen määrittelyyn. Luotettavuuden yleiseksi määritelmäksi valitaan matemaattisen täsmällinen systeemin tiloja kuvaavien stokastisten prosessien avaruudessa määritellyn funktionaalien odotusarvo. Tämän erikoistapauksena saadaan systeemin luotettavuudeksi hetkellä t todennäköisyys, että systeemi tuolla hetkellä on toimintakunnossa. Valitun todennäköisyyslausekkeen osoitetaan mielekkäällä tavalla kuvaavan systeemin toimintakykyä; erityisesti näin on tutkimuksessa tarkasteltavien stationäärisen vaiheen omaavien systeemien tapauksessa.

Peruskäsitteiden yhteydessä tarkastellaan vielä vikojen esiintymiseen liittyvien satunnaissuureiden kuvauksessa käytettäviä funktioita ja näiden välisiä yleisiä riippuvuuksia. Keskeiseksi funktioksi myöhempien tarkastelujen kannalta osoittautuu vika-
taajuusfunktio (tai odotusajan päättymisintensiteettifunktio tai korjauksen valmistumisintensiteettifunktio kyseessä olevasta satunnaissuureesta riippuen); jakautumien identifiointi suoritetaan tutkimuksessa pääasiassa tämän funktion perusteella.

Luvun lopuksi esitellään tavallisimmat luotettavuusteoriassa esiintyvät jakautumatyyppit ja niille luonteelliset niin teoreettisesti johdetut kuin empiirisesti todetut erityispiirteet. Yksityisten jakautumien kautta päädytään jaksossa 2.5.9 viimein yleiseen jakautumaan. Tällä jakautumalla suoritettavat tarkastellut osoitetaan huomattavan yleispäteviksi, ne kattavat erikoistapauksenaan mm. kaikki mainitut keskeiset jakautumatyyppit ja niiden yhdistelmät.

Luvussa 3 suoritetaan tutkimuksen varsinainen rajaus ja täsmennys. Peruslähtökohdanna olleita Kulshresthan esittämiä systeemi-malleja on kehitetty useaan suuntaan. Tutkimuksen yleisyyttä rajoittavia lähtöolettauksia on ensinnäkin karsittu. Merkittävimpiä kohteena on tässä yhteydessä pidettävä osasysteemin S_1

(päämielenkiinnon omaavan systeemin osan) komponenttien vika-
taajuutta; tälle on sallittu yleinen aikariippuvuus entisen
vakion sijasta (samalla häiriöttömän käyntiajan jakautumalle on
sallittu mikä tahansa jatkuva jakautuma eksponentiaalijakautuman
asemesta). Edelleen malleihin on otettu mukaan uusia stokastisia
aineksia. Komponentin normaalin toiminnan ja korjaukseen kuluva
ajan lisäksi on otettu huomioon korjauksen odotukseen ja valmis-
teluun kuluva aika. Tälle stokastiseksi oletetulle suureelle ei
aseteta rajoituksia jakautumatyyppin suhteen.

Näillä Kulshresthan alunperin esittämiin malleihin tehdyillä
yleistyksillä voidaan todeta olevan merkitystä ainakin kolmella
taholla. Ensiksikin sovellutuksia ajatellen nyt esitetyt ylei-
semmät mallit vastaavat entistä paremmin kuvattavia reaalisys-
teemejä. Samalla tarkastelun kohteena mahdollisten reaalisys-
teemien joukko laajenee. Toiseksi saaduissa tuloksissa nousee
keskeiselle sijalle ns. stationäärinen vaihe, jonka merkitys
esim. jakautumien estimointikysymyksiä ajatellen on huomattava.
Kolmantena merkittävänä alueena on perussysteemin neljän erikois-
tapauksen, systeemin (A, P_1) , (A, P_2) , (P, P_1) ja (P, P_2) , tarkas-
telu yhdenmukaisten oletusten vallitessa. Ainoastaan näin
voidaan saada merkittäviä tuloksia mielenkiinnon kohteena ole-
vien korjauspolitiikkojen ja komponenttien varmistusmenetelmien
vaikutuksista systeemin luotettavuuteen.

Luvuissa 4 ja 5 suoritetaan mainittujen neljän korjauspoliti-
kaltaan ja varmistusmenetelmältään spesifioidun systeemin yksi-
tyiskohtainen tarkastelu. Näissä luvuissa onkin nähtävä tutki-
muksen keskeisimmät tulokset: tilatodennäköisyyksien ja niiden
perusteella systeemin luotettavuuden lausekkeet on ratkaistu
Kulshresthan tapaan, nyt vain edellä kuvatuissa yleisemmissä
puitteissa. Tarkasteluissa on noudatettu Kulshresthan viitoitta-
mia peruslinjoja, mutta yleisyyttä rajoittavien lähtöolettamus-
ten karsinta ja mallin laajennukset ovat paljolti muuttaneet
eri käsittelyvaiheita, useissa yksityiskohtissa on jouduttu
täysin uusien kysymysten eteen (vrt. esim. sivulla 42 esitetty
systeemin tilayhtälöiden luonteen ratkaiseva muuttuminen). Tar-
koituksenmukaisella muuttujien ja apufunktioiden valinnalla
ratkaisut on kaikissa tapauksissa saatettu suljetussa muodossa
loppuun asti.

Merkittävänä tuloksena on edelleen pidettävä osoitusta siitä,
että systeemi näissä yleisemmissäkin puitteissa saavuttaa sta-
tionääriseen vaiheeseen. Tämän vaiheen ratkaisusta osoitetaan edel-
leen korjausajan ja odotusajan jakautumatyyppin vaikutuksen hä-
viävän, ratkaisuisissa esiintyvät ainoastaan näiden suureiden
odotusarvot. Ratkaisujen riippuvuus S_1 :n yksityisen komponentin
häiriöttömän toiminta-ajan jakautumatyyppistä on sekin vain vä-
lillistä, integraalilausekkeen (4.64) kautta ilmenevää. Tulok-
sella on sekä puhtaasti teoreettista mielenkiintoa että erityi-
sesti sovellutuksia ajatellen tärkeä merkitys: muuttuvathan esi-
merkiksi estimointiongelmät jakautumatyyppin ja sen yksityisen
jakautuman selvittämisestä pelkästään tunnuslukua koskevaksi
estimoinniksi.

Vielä on mainittava tässä tutkimuksessa käyttöön otettu syste-
min tila-käsite. Tällä on erityistä merkitystä systeemin yksi-
tyiskohtaisen kuvauksen yhteydessä. Systeemin havainnollistami-
nen tilojensa ja niiden välisen siirtymismahdollisuuksien avulla
muodostaa samalla vanhan perustan systeemin käyttäytymistä ku-
vaavien yhtälöiden laadinnassa.

Luvun 6 vertailutarkasteluihin ryhdyttäessä huomataan luvuissa
4 ja 5 käyttöön otettujen merkintöjen tarkoituksenmukaisuus. Eri
systeemin luotettavuuslausekkeet voidaan näin esittää yhdenmu-
kaisessa muodossa, josta ilmenee niiden riippuvuus samoista sys-
teemin suureista ja jossa systeemin väliset erot on kiteytetty
yhteen, kullekin systeemille ominaiseen lausekkeeseen $S_M(\lambda)$.
Pääasiassa tätä lauseketta tarkastelemalla saadaan esiin useita
tuloksia, jotka koskettelevat S_1 :n komponenttien lukumäärän,
noudatettavan korjauspolitiikan sekä S_1 :n komponentin varmistus-
menetelmän vaikutusta systeemin luotettavuuteen.

Edellä esitetyssä tutkimuksessa on kokonaisvaltaista lähestymis-
tapaa noudattaen pyritty valottamaan perusominaisuuksiltaan auto-
maattisen, laajan ja runsaasti sisäisiä riippuvuusuhteita sisäl-
tävän tuotanto- tms. laitesysteemin luotettavuuteen liittyvää
probleemakenttää. Tarkastelut ovat olleet puhtaasti teoreettisia,
joskin eräitä viittauksia sovellutusten suuntaan on tehty. Riit-
tävän yleisessä muodossa ja täsmällisesti suoritettut teoreetti-
set tarkastelut luovat kuitenkin aina sen perustan, jolle menes-
tyksellisten ja luottamusta herättävien sovellutusten on rakon-
nuttava.

ON THE OPERATIONAL BEHAVIOUR AND RELIABILITY OF A MULTICOMPONENT,
STOCHASTICALLY FAILING, REPAIRABLE SYSTEM

Summary

This study examines a system with a given basic structure. The behaviour of the system depends on several stochastic factors. Thus, the time between failures of the components of the system, the repair time of the components and the time spent waiting for repair facilities cannot with certainty be known in advance. All that is known is the probability laws governing these values. Examinations are carried out on the basis of systems theory principles, using a stochastic process model. In this way is discovered the behaviour the system and the dependence of the reliability it achieves on, on the one hand, a particular part of the structure of the system, and, on the other, the repair policy of the system.

At the beginning of the study, in Chapter 2, there is a survey of the basic concepts of reliability theory. The pointwise availability of the system is chosen as the value which measures its reliability and this is shown to be a good representation of its operational ability. Chapter 2 goes on to examine the various possible types to describe the distribution of a random variable and the connections between these functions. From the point of view of this study the principal function is seen to be the intensity function or rate function. Distributions are identified on the basis of the failure, repair or waiting rate (depending on the random variable in question). At the end of the chapter there is an account of the most common distribution types in reliability theory and their principal characteristics. Finally, by means of individual distributions, a general distribution is arrived at, which covers (by a suitable rate function choice) all the known distributions that fulfill the regularity conditions.

In Chapter 3, a detailed description of the system is made and assumptions regarding the random variables of the system are introduced. The system consists of two classes of components, i.e. of two subsystems S_1 and S_2 . The subsystem S_1 contains M identical

redundantly-connected components while S_2 is composed of N independent (, in general, different) components connected in series (see the reliability diagram of the system in figure 3.1 on page 23). Components in S_1 are assumed to fail according to some general distribution (the failure rate of components is an arbitrary function of time) while in S_2 the components have constant failure rates, i.e. the time between failures for a S_2 -component is exponentially distributed, each component in S_2 has a failure rate of its own. A failed component has to wait for repair facilities, and the waiting time has some general distribution such that each component has a distribution of its own. All the repair time distributions in the system are also governed by general probability laws.

The operational behaviour and reliability properties of the system are studied under four different conditions. The conditions are specified by two policy variables: the type of redundancy and the policy to be followed in the system repair. Two types of redundancy are considered. Chapter 4 illustrates parallel redundancy in S_1 : all the M components in S_1 start operating together as soon as the system is put into operation and the system fails due to S_1 only when all the M components in S_1 fail. In Chapter 5 stand-by redundancy is considered: out of the M components in S_1 only one takes part in the operation and the rest are kept as stand-by arrangements; the system is assumed to switch over to the next component automatically when the operating component fails.

After a complete failure of S_1 all the M failed components are repaired; S_2 is not touched. With regard to system failure due to the failure of an S_2 -component two different repair policies are considered: 1. Opportunistic policy: along with the repair of the failed component in S_2 , repair of all the failed components in S_1 is also completed, and 2. Minimum policy: repair of the failed component in S_2 is carried out and the components in S_1 are left unattended.

Thus the treatment of the system is divided into four sections. Section 4.1 deals with the system with parallel redundancy in S_1 and with minimum repair policy, in section 4.2 there is parallel

redundancy in S_1 and opportunistic repair policy, in 5.1 stand-by redundancy and minimum policy, and in 5.2 stand-by redundancy and opportunistic policy. In each case a method based on supplementary variables and Laplace transforms is used to formulate a mathematical model for the system. The first step in the formulation of the model is to specify the set of states for the system. Then the supplementary variable technique is used to obtain the model's state equations, which consist of simultaneous partial differential-difference equations with their boundary conditions. With the help of Laplace transforms and generating functions both transient and steady-state solutions for these state equations are found. From these solutions the steady-state availability and the Laplace transform of the transient state availability are derived.

Furthermore it is shown that the steady-state solutions (and therefore the steady-state availability) are independent of the type of waiting time and repair time distributions and in their expressions only the expected values of these distributions appear. It is also shown that the steady-state is achieved under quite general conditions (the expected values of the distributions must exist) and that the solutions for the steady-state can be found without any exact knowledge about the distributions of the system.

In Chapter 6 there is a detailed analysis of the availability expressions obtained and, in particular, a comparison of the availabilities obtained in different circumstances. In this way an understanding is obtained of the influence of, on the one hand, the structure of subsystems S_1 (types of redundancy in components) and, on the other, the repair policy on the reliability characteristics of the system. It is shown that in the case of stand-by redundancy availability is always greater than with parallel redundancy and that the opportunistic repair policy produces greater availability than the minimum policy. Exact expressions are calculated for the availability differences. Finally there is an examination of the influence of the number of redundant components in subsystem S_1 on availability.

LÄHDEKIRJALLISUUS

- BARLOW, R.E. - Mathematical Theory of Reliability.
PROSCHAN, F. New York 1965.
- FORSSTRÖM, N.-A. Keskitettyyn luotettavuusparametrien
valvontaan perustuva huolto-organisaatio
elektronisessa järjestelmässä. Insinööri-
järjestöjen koulutuskeskuksen julkaisu
19-66: Luotettavuus. Helsinki 1966.
- GNEBENKO, B.V. - Mathematical Methods of Reliability
BELYAYEV, Y.K. - Theory. New York 1969.
SOLOVYEV, A.D.
- JORGENSEN, D.W. - Optimal Replacement Policy.
McCALL, J.J. - Amsterdam 1967.
RADNER, R.
- KEILSON, J. - On Time Dependent Queuing Processes,
KOOCHARIAN, A. Annals of Mathematical Statistics 31,
1960 ss. 104-112.
- KULSHRESTHA, D.K. (I) Analytical Study of a Stand-by Redundant
Complex System with General Repair Time
Distribution, Opsearch 13, 1966 ss. 139-
150.
- KULSHRESTHA, D.K. (II) Reliability of a Parallel Redundant
Complex System, Operations Research
Vol. 16, No 1, 1967 ss. 28-35.
- KULSHRESTHA, D.K. (III) Operational Behaviour of a Multicompo-
nent System having Stand-by Redundancy
with Opportunistic Repairs. Unternehmens
forschung, Band 12, Heft 3, 1968 ss. 159
172.
- KULSHRESTHA, D.K. (IV) Operational Behaviour of a Complex
System. Unternehmensforschung, Band 12,
Heft 4, 1968 ss. 232-241.

- KULSHRESTHA, D.K. (V) Reliability of a Repairable Multicomponent System with Redundancy in Parallel, IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-19, No 2, May 1970 ss. 50-52.
- LINDELÖF, E. (I) Johdatus korkeampaan analyysiin. Porvoo 1961.
- LINDELÖF, E. (II) Differentiaali- ja integraalilaskenta ja sen sovellutukset 1. Porvoo 1965.
- LLOYD, D.K. -
LIPOW, M. Reliability: Management, Methods and Mathematics. Englewood Cliffs 1962.
- LOKKI, O. Uusiutumisprosessi luotettavuuden määrittelyssä. Insinöörijärjestöjen koulutuskeskuksen julkaisu 19-66: Luotettavuus. Helsinki 1966.
- PIERUSCHKA, E. Principles of Reliability. Englewood Cliffs 1963.
- POLOVKO, A.M. Fundamentals of Reliability Theory. New York 1968.
- PRABHU, N.U. Stochastic Processes, Basic Theory and Its Applications. New York 1965.
- RAU, J.G. Optimization and Probability in Systems Engineering. New York 1970.
- SINGPURWALLA, N.D. Statistical Fatigue Models. A Survey, IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-20, No 3, August 1971 ss. 185-189.
- SPIEGEL, M.R. (I) Theory and Problems of Laplace Transform. New York 1965.
- SPIEGEL, M.R. (II) Theory and Problems of Calculus of Finite Differences and Difference Equations. New York 1971.

- TURUNEN, O. Elektroniikkakomponenttien luotettavuus. Insinöörijärjestöjen koulutuskeskuksen julkaisu 19-66: Luotettavuus. Helsinki 1966.
- VENHO, J. Virtauskaaviomenetelmä luotettavuuden tutkimisessa. Diplomityö, Helsingin Teknillinen Korkeakoulu, Teknillisen fysiikan osasto, 1971 (julkaisematon).
- ZADEH, L.A. -
DESCER, C.A. Linear System Theory, the State Space Approach. New York/San Francisco 1963.
- ZIELEN, M. (ed.) Statistical Theory of Reliability. St. Paul, Minnesota 1965.