VAASAN YLIOPISTO
TÄYDENNYSKOULUTUSKESKUS

PÄÄTÖKSENTEON JA ENNUSTAMISEN MATEMATIIKKAA

SANOMALEHTIYLIOPISTO

Täydennyskoulutuskeskus

Vaasan yliopisto

1999

Julkaisija: Vaasan yliopiston täydennyskoulutuskeskus

Käyntiosoite: Raastuvankatu 33

65100 Vaasa

Postiosoite: PL 297

65101 Vaasa

Puhelin: (06) 324 8485
(06) 324 8111 vaihde, Vaasan yliopisto

Telekopio: (06) 324 8488

Vaasan yliopiston täydennyskoulutuskeskuksen julkaisuja 18/1999
Toimittaja: Pertti Lehesvuo
Painopaikka: Ykkös-Offset Oy, Vaasa 1999

ISBN 951-683-800-6
ISSN 0789-6514

Sisältö

Päätöksenteon epävarmuuteen haetaan apua matematiikasta

Sanomalehtiyliopisto valottaa kaaosteoriaa ja ennustamisen mahdollisuuksia 7

Kaaoksesta löytyy matemaattista kurinalaisuutta

Tulokset voidaan esittää värikylläisinä, häkellyttävän kauniina kuvina 11

Pahimmat riskit ovat väärät osakkeet ja väärät osto- ja myyntiajankohdat

Oikea strategia auttaa välttämään suuret tappiot ja antaa mahdollisuuden myös suuriin voittoihin 21

Ennuste on odotus tulevasta tämän hetken tiedon perusteella

Epävarmuuden arviointi jää vielä käyttäjän varaan: tarvitaan laatusertifikaatti 33

Salakirjoitus on sähköisen viestin kirjekuori

Nykyaikainen kryptologia perustuu matemaattisiin funktioihin 45

Etätehtävät 56

Etätehtävän vastaus 57

Sisällysluettelo 72

ESIPUHE

Päätöksenteon ja ennustamisen matematiikkaa?

Eivätkö matematiikka ja tilastotiede ole juuri niitä tieteitä, jotka auttavat kuvaamaan ja mallintamaan meitä ympäröivää monimutkaista todellisuutta? Matematiikassa kaaos ei ole negatiivinen vaan dynaaminen sana, ennustamisen tärkeys ja tarpeellisuus on joka päiväistä, kuten salasanat ja tunnusluvutkin.

Vaasan yliopiston täydennyskoulutuskeskuksen ja sanomalehti Pohjalaisen kevään 1998 sanomalehtiyliopiston artikkelisarjassa päätöksenteon ja ennustamisen matematiikkaa esitellään matematiikan ja tilastotieteen sovelluksia mielenkiintoisella tavalla, josta huomaamme, kuinka nämä tieteet ja niiden tulokset ovat mukana meidän jokaisen arjessa.

Artikkelisarjojen kirjoittajina olivat Vaasan yliopiston kaupallis-teknisen-tiedekunnan menetelmätieteiden laitoksen asiantuntijat: talousmatematiikan professori Ilkka Virtanen, tilastotieteen professori (emeritus) Martti Luoma, tilastotieteen professori Seppo Pynnönen ja matematiikan professori Valtteri Niemi.

Vaasan yliopiston täydennyskoulutuskeskus kiittää lämpimästi kaikkia, jotka ovat kirjoittaneet artikkeleita tai muuten olleet myötävaikuttamassa sanomalehtiyliopiston toteutumiseen.

Vaasassa, 18. päivänä toukokuuta 1999

Helena Eteläaho
koulutuspäällikkö

POHJALAINEN VAASA

Päätöksenteon epävarmuuteen haetaan apua matematiikasta

Sanomalehtiyliopisto valottaa kaaosteoriaa ja ennustamisen mahdollisuuksia

Epäjärjestys hallintaan

Ilman ennustamista ei pärjää

Salaamista tarvitaan

Päätöksen teon epävarmuuteen haetaan apua matematiikasta

Sanomalehtiyliopisto valottaa kaaosteoriaa ja ennustamisen mahdollisuuksia

Kirjoittaja: toimittaja Sirpa Sainio

Julkaistu: Pohjalainen 15.04.1998

Sanomalehtiyliopisto tekee tänä keväänä uuden aluevaltauksen: maailma pannaan järjestykseen matematiikan keinoin. Kynnys voi tuntua korkealta. Professori Ilkka Virtanen rohkaisee kuitenkin yrittämään.

- Aluksi on helppoa, puolivälissä pitää ponnistella ja osa voi jäädä epäselväksikin, niin että innostuu ottamaan asiasta selvää.

Vaasan yliopiston täydennyskoulutuskeskuksen ja sanomalehti Pohjalaisen yhteistyönä on jo seitsemän vuotta tarjottu lehden lukijoille yleensä ja avoimessa yliopistossa opiskeleville erityisesti yliopiston tuoreinta tutkimustietoa Sanomalehtiyliopisto-sarjassa. Kirjoittajina ovat olleet yliopiston parhaat asiantuntijat.

Sanomalehtiyliopisto on yksi avoimen yliopiston etäopetuskeinoja. Ulkomaisissa seminaareissa se on herättänyt koulutuspäällikkö Auli Kinnusen mukaan ansaittua huomiota. Internetin välityksellä sanomalehtiyliopiston pari artikkelisarjaa ovat myös kansainvälisessä levityksessä.

Ensi lauantaina alkaa neliosainen artikkelisarja, Päätöksenteon ja epävarmuuden matematiikkaa.

Epäjärjestys hallintaan

Professori Ilkka Virtanen kaupallis-teknisen tiedekunnan menetelmätieteiden laitokselta aloittaa kirjoittamalla kaaosteoriasta, joka tähtää epäjärjestyksen hallintaan matematiikan keinoin.

Kaaosteoria tuo useimpien mieleen kysymyksen, mikä vaikutus Tyynen valtameren saarella liihottelevan perhosen siiveniskuilla on säätilan kehittymiseen Pohjois-Atlantilla?

Arkikielessä kaaos tarkoittaa sekasortoa ja hämminkiä. Matematiikassa sillä on kuitenkin toinen merkitys. Kaaosteorian avulla tutkitaan dynaamisia, ajassa eteneviä prosesseja ja yritetään löytää ilmiön rakenteita.

- Kiinnostavaa tietysti on, onko ilmiön tulevaa käyttäytymistä mahdollista ennustaa tai ymmärtää.

Virtasella on kansainvälisten tutkimusten ohella käytettävänä kaksi Vaasan yliopiston tuoretta väitöskirjaa. Irma Luhta on selvittänyt kaaosteorian avulla yrityksen mainontaa ja kuluttajien mainosalttiuden vaikutusta yrityksen maineeseen ja myyntiin. Martti Laaksonen taas on tutkinut yksittäisen sijoittajan osto tai myyntipäätöksen vaikutusta pörssikurssien kehitykseen.

Ilman ennustamista ei pärjää

Tilastotieteen apulaisprofessori (emeritus) Martti Luoma toteaa, että ennustaminen on vaikeaa, mutta välttämätöntä. Ilman ennustamista inhimillinen toiminta on mahdotonta.

Mitkä siis ovat hyvän ennusteen laatimisen lähtökohdat? Toinen asia on, miten ennusteisiin tulisi suhtautua ja miten ennustevirheistä koituvia riskejä voidaan arvioida.

Voidaanko jo yksinkertaisilla menetelmillä päästä käyttökelpoisiin tuloksiin?

Tilastotieteen apulaisprofessori Seppo Pynnönen pyrkii vastaamaan kysymykseen, mitä jokamiehen ja –naisen tulisi tietää sijoitusmarkkinoista. Tavallisia kysymyksiä ovat, kannattaako sijoittaminen, mihin sijoittaa, milloin sijoittaa. Sijoituksia täytyy myös seurata. Sen voi tehdä itse tai jättää muiden huoleksi. Erilaiset sijoitukset tuottavat eri tavoin, mutta myös riskit ovat erilaiset.

Salaamista tarvitaan

Neljännessä artikkelissa apulaisprofessori Valtteri Niemi, joka tällä erää työskentelee Nokian tutkimuslaitoksella, valottaa tietoliikenteen ja tietoverkkojen väärinkäytön mahdollisuuksia. Niistä saatava taloudellinen hyöty kasvaa. Asiattomat saadaan aisoihin vain luotettavan ja soveltamiskelpoisen salakirjoitus-menetelmän avulla.

Perimmäisiä kysymyksiä väärinkäytösten estämiseksi ovat, mistä tieto on peräisin, onko tieto muuttunut matkalla ja ketkä tietoon pääsevät käsiksi.

Tämänkertainen sanomalehtiyliopiston neljän artikkelin sarja on aineopinto-tasoinen ja vastaa kahta opintoviikkoa. Tentti järjestetään etätehtävänä, johon vastataan oheismateriaalia käyttäen. Kunkin artikkelin yhteydessä on tiedot etätehtävässä tarvittavasta kirjallisuudesta.

Etätehtävän saa toukokuun 11. päivästä lähtien avoimen yliopiston opiskelijapalvelusta. Siihen mennessä on myös ilmoittauduttava tenttiin henkilö-kohtaisesti. Ilmoittautumisen yhteydessä peritään 200 markkaa hallinnollisten kulujen kattamiseksi. Tehtävä on palautettava viimeistään kesäkuun 15.päivänä 1998.

POHJALAINEN

Sanomalehtiyliopisto

Kaaoksesta löytyy matemaattista kurinalaisuutta

Tulokset voidaan esittää värikylläisinä, häkellyttävän kauniina kuvina

Luvunlaskua kuului peiton altakin

Ilkka Virtasta viehättää matemaattisten mallien luominen

Arvonnan tulosta ei voi ennustaa

Rajaton kasvu tuskin koskaan mahdollista

Nurkkahuone Tervahovissa

Kunnan kuulosta kauniilta

Kiven olisi voinut heittää yliopistoon

Kaaosteorian hyväksikäyttö tutkittavana

Ilman mainontaa goodwill saattaa kuulua

Markka lisää mainontaan?

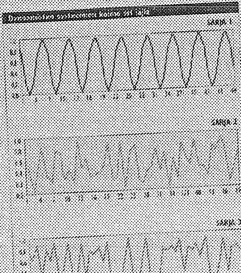
Yrityksille malli mainontapolitiikkaan

Tasapaino hyppii kahden arvon välillä

Työkalut suhdannevaihtelun arviointiin

Verotus voi tuoda kaaoksen

Matematiikan ja taiteen välille silta



Avoin yliopisto

Kirjallisuutta

Kaaoksesta löytyy matemaattista kurinalaisuutta

Tulokset voidaan esittää värikylläisinä, häkellyttävän kauniina kuvina

Kirjoittaja: professori Ilkka Virtanen

Julkaistu: Pohjalainen 18.04.1998

Sekä luonnossa että yhteiskunta- ja talouselämässä esiintyvät ilmiöt ovat luonteeltaan usein *dynaamisia systeemejä*: ne voidaan esittää peräkkäisinä ajan suhteen etenevinä tiloina. Systeemin tila tietyllä hetkellä yhdessä systeemin kehitykseen liittyvien lainalaisuuksien kanssa määrää systeemin tilan seuraavalla hetkellä.

Niinpä esimerkiksi vallitsevalla säätilalla on suuri vaikutus odotettavissa olevaan huomiseen säähän; kaupunkien ja kuntien tulevien väestömäärien keskeisenä perustana ovat nykyiset väestömäärät jne.

Tällaisia systeemejä voidaan usein kuvata yksinkertaisilla matemaattisilla malleilla, joissa on vain yksi tai muutama muuttuja ja näiden muutosta kuvaavat epälineaariset yhtälöt. Jos malli on herkkä systeemin alkutilalle, sitä sanotaan *kaoottiseksi*.

Kaoottisen mallin perusominaisuutena onkin levottomuus: havaittava käyttäytyminen on epäsäännöllistä ja jo erittäin pienet lähtöarvojen muutokset aikaansaavat käyttäytymisen täydellisen muuttumisen.

Tästä huolimatta kyse on matemaattisesti kurinalaisesta mallista. Arkikielen tapaista negatiivista arvonväritystä ei matemaattiseen kaaokseen liity.

Arvonnan tulosta ei voi ennustaa

Kuviossa 1 on esitetty kolmen eri dynaamisen systeemin kehitykset 50 peräkkäisenä ajanhetkenä.

Sarja 1 on esimerkki *deteministisestä,* säännöllisen kehityskulun omaavasta sarjasta. Kyseessä voisi olla esimerkiksi jousen päässä värähtelevän kappaleen sijainnin ajallista vaihtelua kuvaava sarja.

Sarjat 2 ja 3 taas ovat vahvasti epäsäännöllisiä. Niiden tarkka ennustaminen näyttäisi olevan mahdotonta. Näennäisestä samankaltaisuudesta huolimatta sarjat ovat kuitenkin luonteeltaan aidosti erilaiset.

Sarja 2 on *stokastinen* eli satunnainen, arpomalla muodostettu. Sen tulevien yksittäisten arvojen ennustaminen on siten mahdotonta.

Sarja 3 taas kuvaa ns. *logistisen kasvumallin* käyttäytymistä sellaisella kasvuparametrien arvolla, jolla käyttäytyminen on kaoottista. Sarjan arvot ovat kuitenkin ennustettavissa, vieläpä tarkasti laskettavissa, mikäli sarjan alkuarvo ja mallin kasvuparametrin arvo vain tunnetaan.

Ulkopuoliselle havainnoitsijalle sarja näyttää siis stokastiselta, todellisuudessa se on kuitenkin deterministinen. Herkkyys systeemin alkutilasta tekee mallista kuitenkin hyvin epävakaan: pienikin muutos sarjan ensimmäisessä arvossa (esimerkiksi 0,8 – 0,800001) tuottaa täysin erilaisen lukusarjan.

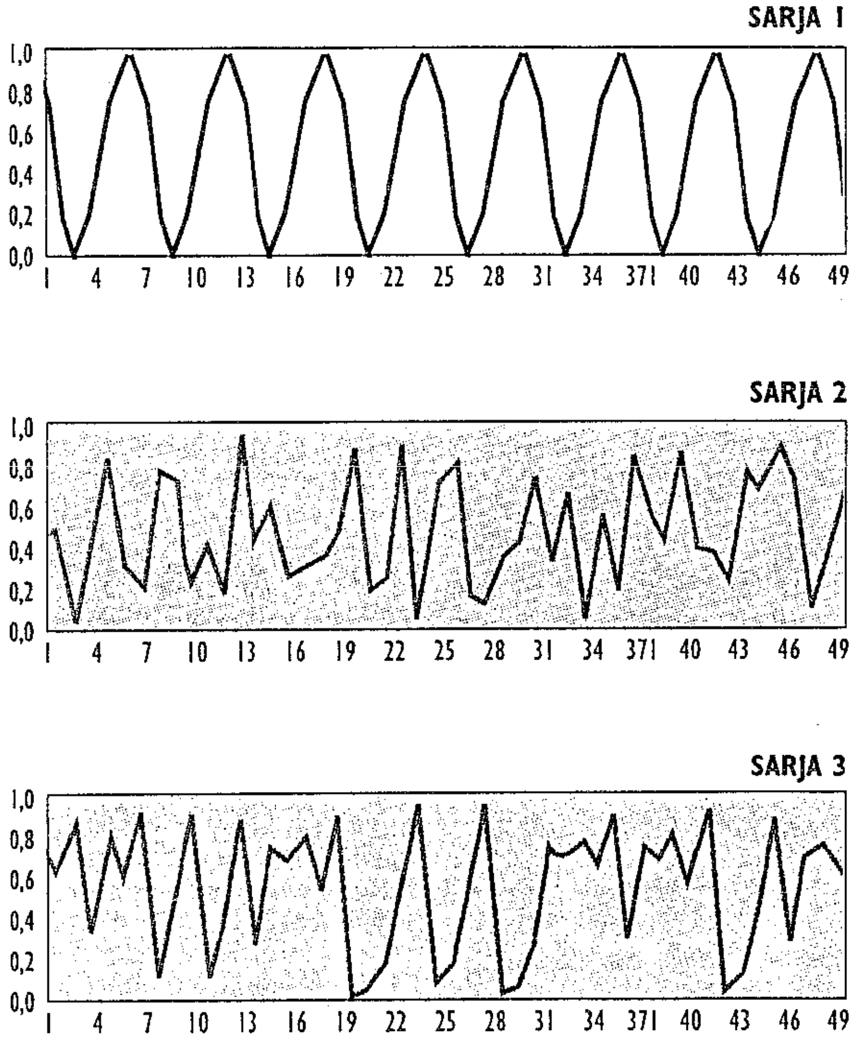
Rajaton kasvu tuskin koskaan mahdollista

Yksinkertaisimmassa kasvumallissa oletetaan, että systeemin tila, esimerkiksi eläinpopulaation koko, pankkitilillä oleva rahasumma hetkellä t, $(= xt)$, on edellisen kauden tilan tietty kerrannainen, ts. on voimassa

$$\boxed{x_t = a \cdot x_{t-1}.}$$

Mikäli esimerkiksi bakteeripopulaatio aina kaksinkertaistuu aikayksikössä, on $a = 2$ kaavassa (1). Tilillä viiden prosentin korkoa kasvava pääoman karttumista kuvaava malli taas saadaan, kun asetetaan $a = 1.05$.

Kuvio1: Dynaamisten systeemien kolme eri lajia



Taulukko 1: Logistisen mallin tasapainoratkaisut eri alkuarvoilla

t	$x_t(x_0=0.2)$	$x_t(x_0=0.4)$	$x_t(x_0=0.7)$
0	0.200000	0.400000	0.700000
1	0.240000	0.360000	0.315000
2	0.273600	0.345600	0.323663
3	0.298115	0.339241	0.330808
...	...	...	...
14	0.333312	0.333336	0.333331
15	0.333322	0.333335	0.333332

Yksinkertainen kasvumalli johtaa rajoittamattomaan ekspotentiaaliseen kasvuun (*x0* on systeemin tila hetkellä $t = 0$):

$$\boxed{x_t = x_0 \cdot a^t.}$$

Rajaton kasvu ei kuitenkaan ole juuri koskaan käytännössä mahdollinen. Belgialainen matemaatikko **Pierre Verhulst** kehitti noin 150 vuotta sitten matemaattisen mallin, jossa kasvun rajallisuus on yksinkertaisella tavalla otettu huomioon. Verhulstin logistisen kasvumallin dynamiikkaa kuvaa yhtälö

$$\boxed{x_t = a \cdot x_{t-1} \cdot (1 - x_{t-1}).}$$

Systeemin tilaan liittyvä mittayksikkö on (3):ssa normitettu niin, että systeemin tilan maksimiarvo = 1. Malliin (1) verrattuna malliin (3) on tullut korjaustekijäksi lauseke *(l-xt-l)*, joka huolehtii siitä, että kun systeemin tila lähestyy maksimiarvoaan 1, samanaikaisesti pienenevä tekijä *(l-xt-l)* pitää kasvun kurissa.

Mallia (3) ei voida ratkaista analyyttisesti mallin (1) tapaan; on tyydyttävä ratkaisuun iteroimalla. Tämä käy helposti esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmalla tai jopa laskimella.

Jos annetaan kasvukertoimelle a esimerkiksi arvo 1,5, saadaan alkutiloja x0 = 0.2, 0.4 ja 0.7 vastaavat taulukon 1 kehitysurat.

Tasapaino hyppii kahden arvon välillä

Taulukosta 1 käy selvästi ilmi tulos, jonka mukaan käyttäytymislakia (3) on noudattava systeemi saavytta alkutilastaan riippumatta aina saman tasapainotilan (=1/3), kun kasvukerroin $a = 1.5$. Systeemin sanotaan olevan *stabiili*.

Voidaan osoittaa, että tämä tilanne on voimassa kaikilla kasvukertoimen arvoilla $0<a<3$ (saavutettava tasapainotila luonnollisesti riippuu *a*:n arvosta).

Kun kasvukerroin ylittää arvon 3, muuttuu systeemin käyttäytyminen ratkaisevasti. Kiinteän tasapainotilan saavuttamisen sijasta systeemistä tulee *jaksollinen*: tasapainoratkaisu hyppii kahden eri arvon välillä. Kasvukertoimen arvolla $a = 3$ systeemillä on *bifrukaatiopiste*.

Mikäli *a*:ta edelleen kasvatetaan tapahtuu arvolla a = noin 3,45 uusi bifurkaatio, jakson kahdentuminen uudelleen: tasapainoratkaisussa toistuvat neljä eri tilaa säännöllisinä peräkkäin.

Nämä kahdentumiset jatkuvat tihenevästi, kunnes arvolla a = *noin 3,6* systeemin käyttäytyminen muuttuu kaoottiseksi, siis kuviossa 1 esitetyn sarjan 3 kaltaiseksi (kuviossa 2 on $a = 4$). Kaoottinen alue $3{,}6 < a < 4$ (logistisen funktion määrittely-yhtälö on tulkinnallisesti järkevä vain alueella $0 < a < 4$) ei ole kuitenkaan yhtenäinen, välillä on mm. sellaisia jaksollisen käyttäytymisen alueita, joissa jaksoina ovat 3 ja sen kerrannaiset.

Systeemin tasapainoratkaisun muodostamaa pistejoukkoa kutsutaan *attraktoriksi*. Kaoottisella systeemillä attraktorin muodostava pistejoukko on ääretön. Sitä kutsutaan *oudoksi* attraktoriksi.

Kaaosteorian hyväksikäyttö tutkittavana

Vaasan yliopiston menetelmätieteiden laitoksella on pitkät perinteet dynaamisten systeemien tutkimisessa. Tämän kirjoittajan 1970-luvulla laatimat lisensiaatti- ja väitöskirjatutkimukset käsittelivät teollisten järjestelmien kunnossapito- ja luotettavuuskysymyksiä. Teoreettisena viitekehyksenä toimivat *stokastiset dynaamiset systeemit.*

Kunnossapidon ja investointisuunnittelun yhteyksiä on tarkasteltu *optimiohjaus-* eli *kontrolliteorian* välineistöä hyväksi käyttäen. Viime vuosina kaaosteoria on ollut keskeinen tutkimusalue.

Laitoksen tutkimusperinteen mukaisesti kiinnostuksen kohteena ei ole niinkään itse kaaosteoria, vaan sen hyväksikäyttö erityisesti talouteen liittyvien ilmiöiden mallintamisessa.

Malli, jonka osana on kaoottinen käyttäyminen, voi antaa yksinkertaisen ja helposti ymmärrettävän kuvauksen levottomalle ja epäsäännölliselle ilmiölle.

Menetelmätieteiden laitoksella valmistui 1997 kaksi tohtorin väitöskirjaa, joissa molemmissa aiheena oli kaaosteoria tai sen lähialue.

Irma Luhdan väitöskirja (Luhta 1997) oli kaaosteoreettinen sovellus markkinointiin, **Matti Laaksosen** työn (Laaksonen 1997) aiheena taas olivat kansantalouden suhdannevaihtelut.

Ilman mainontaa goodwill saattaa kulua

Irman Luhdan väitöskirjassa on kehitetty dynaaminen mainontamalli, joka perustuu klassiseen Nerloven & Arrow:n mainontapääomamalliin. Mallissa mainonta ajatellaan investoinniksi, joka kasvattaa yrityksen mainontapääomaa eli goodwillia. Ajatellaan, että ellei yritys mainosta, sen goodwill kuluu pois tietyllä nopeudella.

Mainonta siis pitää yrityksen goodwillin dynamiikan liikkeellä.

Mainonnan ja goodwillin välinen monimutkainen yhteys kuvataan mallissa takaisinkytkettynä systeeminä. Tutkimuksessa tarkastellaan sekä mainonnan välitöntä että viivästettyä vaikutusta goodwilliin.

Pitkän aikavälin dynamiikka näissä kahdessa tapauksessa on hyvin erilaista. Viive lisää systeemin monimutkaisuutta. mallintamisessa käytetään differenssiyhtälöitä eli diskreettiä mallia, joka kuvaa talouden diskreettiä päätöksentekoa hyvin.

Markka lisää mainontaan?

Mallin dynamiikan formulointi perustuu olettamukseen markkinoiden kolmesta vaihtoehtoisesta käyttäytymismuodosta.

Yksinkertaisin vaihtoehto on, että markka mainontaan lisää yrityksen goodwilliä yhdellä yksiköllä. Tällainen lineaarinen yhteys jättää kuitenkin huomiotta ns. unohtamisefektin eli markka mainontaa saattaakin lisätä goodwilliä tietyn ajan kuluttua ykköstä pienemmällä määrällä eli mainonnan rajahyöty on vähenevä.

Kolmanneksi voidaan ajatella, että goodwillillä on jokin saturaatiotaso, jota ei voida ylittää millään mainonnan määrällä.

Yrityksille malli mainontapolitiikkaan

Yrityksen kannalta on tärkeää, että systeemin tasapainogoodvill on stabiili, jotta yritys pystyy arvioimaan goodvilliänsä ja suunnittelemaan siihen johtavaa mainontapolitiikkaa. Mallissa epästabiilisuus johtaa joko suoraan jakson kahdentumisfurkaatioiden (mainonnalla välitön vaikutus) tai Hopfin bifurkaatioiden (mainonnalla viivästetty vaikutus) kautta kaaoksen mallin parametrien muuttuessa yrityksen kannalta epäsuotuisaan suuntaan (esim. goodwillin kulumisnopeus kasvaa).

Hopfin bifurkaatiossa tapahtuu repellointi-ilmiö eli yrityksen goodwill alkaa heilahdella syklisesti. Tilanne on kuitenkin rakenteellisesti stabiili ja tulkinnallisesti mielekäs taloudellisten ilmiöiden syklisyyden perusteella.

Luhdan tutkimuksessa on kehitetty laaja diagnostinen välineistö mallin kvalitatiivisen käyttäymisen ja rakenteellisten muutosten kuvaamiseen numeerisesti ja graafisesti. Käytettyjä kaaosteorian menetelmiä ovat yksi- ja kaksiulotteiset bifurkaatiodiagrammit, Lyapunovin eksponentit sekä korrelaatiodimensio-tekniikat.

Analyysit perustuvat simulaatio-ohjelmiin, joista erityisesti värikkäät bifurkaatiokuvat ovat uusi välinen dynaamisen mallin käyttäytymisen visualisoinnissa.

Työkalut suhdannevaihtelun arviointiin

Matti Laaksosen väitöskirjatyön aiheena olivat kansantalouden suhdannevaihtelua kuvaavat mallit. Suhdannevaihtelu on yksinkertaistaen kuvattavissa muutaman päämuuttujan avulla.

Yksinkertaistuksista huolimatta malli on perustelu ja käyttökelpoinen: vaihtelun aiheuttajat ja muut keskeiset elementit ovat siinä mukana. Väitöskirjatyössä Laaksonen rajautui malleihin, jotka olivat voimakkaan epälineaarisia ja käyttäytymiseltään levottomia, mutta eivät kuitenkaan kaoottisia.

Työssä kehitettiin matemaattisia työkaluja, joilla voidaan arvioida esimerkiksi suhdannevaihtelun odotettavissa olevaa voimakkuutta ilman, että on olemassa kovin yksityiskohtaista tietoa vaihtelun aiheuttajan käyttäytymisestä.

Verotus voidaan tuoda kaaokseen

Väitöskirjan jatkotutkimuksessa malliin on tarkoitus lisätä uusia muuttujia, esimerkiksi verotus, jolloin malli voi saada myös kaoottisia käyttäytymismuotoja. Verotuksella täydennetty kansantulomalli voi esimerkiksi auttaa arvioimaan kansantuloa tai verokertymää eri suhdannevaiheissa tai eri voimakkuuksisten suhdanteiden vallitessa.

Tässä yhteydessä kaaokseen ei liity, kuten ei kaaosteoriassa yleensäkään, mitään suurta dramatiikkaa tai katastrofaalisuutta. Matemaattisessa mielessä kaaos merkitsee vain tietynlaista havainnoitsijalle näkyvää epäsäännöllisyyttä, jonka kulkua hallitsevat kuitenkin selvät lainalaisuudet.

Matematiikan ja taiteen välille silta

Kaaosteoria on yksi tämän päivän populaareimpia ja nopeimmin kehittyviä matematiikan osa-alueita. Suosio on helppo ymmärtää. Aihe kuuluu numeerisen, vieläpä kokeellisen matematiikan alueeseen.

Tutkiminen vaatii tehokkaan laskentakapasiteetin omaavan tietokoneen, mutta käytettävät algoritmit ovat verraten yksinkertaisia. Taulukkolaskentaohjelman hyvä tuntemus vie jo pitkälle.

Tulosten esittämiseen kehitetyt graafiset tekniikat: fraktaalit, *Mandelbrotin* ja *Julian joukot* sekä *Arnoldin kielet* ovat visuaalisesti näyttäviä, värikylläisessä kauneudessaan suorastaan häkellyttäviä. Niitä ihastellessa voi matematiikkaa täysin tuntematonkin kokea nautittavia taide-elämyksiä.

Matematiikan ja musiikin väliset yhteydet ovat vanhastaan tutut. Fraktaaligeometria on luonut uuden sillan matematiikan ja kuvaamataiteen välille.

Kirjallisuus

Alligood K.T., Sauer T.D. & Yorke J.A. (1996). Chaos; an Introduction to Dynamical Systems. New York: Springer.

Kangasaho J., Mäkinen J., Oikkonen J., Paasonen J. & Salmela M. (1996) Numeerinen matematiikka. Porvoo: WSOY.

Laaksonen M. (1997). A nice portrait of restless systems – Uniqueness of the limit cycle of some Linard equations. Acta Wasaensis, No 57.

Luhta I. (1997) Structural changes in a complex system: a chaos-analytic study of a nonlinear advertising policy. Acta Wasaensis, No 52.

ETÄTEHTÄVÄ:

Sanomalehtiartikkelissa tarkasteltiin logistisen funktion $f(x) = a \cdot x \cdot (1-x)$ käyttäytymistä, kun muuttuja x kuvasi jonkin systeemin tilaa hetkellä t (merkintä tällöin x_t). Hetkellä $t = 0$ systeemi oli jossakin alkutilassa x_0, seuraavat tilat määräytyivät rekursiivisesti tämän logistisen yhtälön mukaisesti, ts. $x_t = a \cdot x_{t-1} \cdot (1-x_{t-1})$, $t = 1,2,3,\ldots$

Tehtävän on nyt tarkastella sellaista systeemiä, jonka käyttäytyminen määräytyy sinimuotoisen funktion g(x) = a*sin piix perusteella, ts. on xt = a*sin piixt-1, t = 1,2,3,... Alkutilan x0 oletetaan olevan välillä [0,1], samoin parametrin a arvon oletetaan olevan väliltä [0,1].

1. Tarkastele systeemin käyttäytymistä parametrin a arvoilla a= 0.1, 0.2, 0.3, ..., 0.7, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 1. Käytä kullakin a:n arvolla useampaa eri lähtötilaa x_0, esim: $x_0 = 0.2$, $x_0 = 0.5$, $x_0 = 0.9$. Laske kutakin sarjaa riittävän pitkälle, jotta systeemin pitkän aikavälin kehitys tulee näkyviin.

2. Edellisessä kohdassa huomaat, että joillakin a:n arvoilla systeemin tila vakiintuu kohti yhtä arvoa, joillakintoisilla kahta, neljää jne. Määritä a:n arvoväliä sopivissa kohdissa tihentämällä kohdat, joissa kahdentumis-bifurkaatiot tapahtuvat. Määritä kolme ensimmäistä kahdentumiskohtaa ja näiden perusteella Feigenbaumin vakio.

3. Onko systeeminen käyttäytyminen kaoottista jollakin parametrin a arvolla?

Tehtävä on kätevintä käsitellä jollakin taulukkolaskentaohjelmalla (Excel tai vastaava), mutta onnistunee kehittyneellä laskimellakin.

Lähdeviite

Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkkonen, J., Paasonen, J. ja Salmela, M.: Numeerinen matematiikka (Pitkän matematiikan syventävä kurssi), WSOY, s. 123-137

Vaasan yliopisto

Kaupallis-tekninen tiedekunta / Menetelmätieteiden laitos

Vaasan yliopiston täydennyskoulutuskeskus,

avoin yliopisto

Sanomalehtiyliopisto:

PÄÄTÖKSENTEON JA ENNUSTAMISEN MATEMATIIKKAA

Artikkeliin

Kaaoksesta löytyy matemaattista kurinalaisuutta
Virtanen, Ilkka. Pohjalainen 18.4.1998

liittyvä erityistehtävä

Maarit Vesapuisto

Toukokuu 1998

Tehtävänä oli tarkastella sellaista systeemiä, jonka käyttäytyminen määräytyy sinimuotoisen funktion $g(x) = a{*}\sin \pi x$ perusteella, eli ts. $x_t = a{*}\sin \pi x_{t-1}$, kun $t = 1,2,3,...$
Alkutilan x_0 samoin kun parametrin a arvon oletetaan olevan väliltä [0, 1].

Systeemin käyttäytymistä tarkastelin useilla eri lähtötilanteen x_0 arvoilla, mutta tässä esitetyt tarkastelut koskevat arvoja 0.2, 0.5 ja 0.9.

Liitteessä 1 olevat graafiset esitykset tein Excel-ohjelmiston avulla.

Jakaantumispisteiden etsintää (iterointia) ja Feigenbaumin vakion määrittämistä varten laadin lyhyen C-kielisen ohjelman (varmistuksia epäkelpojen arvojen antamisen estämiseksi ei ole tehty eli oletusarvona: käyttäjä tietää, mitä tekee).
Kyseinen ohjelma löytyy liitteestä 2.

Systeemi stabiili

Parametrin a ollessa välillä 0.00... n.0.30 systeemi oli stabiili ja kaikilla tarkastelluilla lähtötilanteen x_0 arvoilla saatiin tasapainotilaksi pitkällä aikavälillä 0.
Esimerkki liitteen 1 kuvassa 1.

Parametrin a ollessa välillä 0.30... n.0.71 systeemi on edelleen stabiili. Kaikilla tarkastelluilla lähtötilanteen arvoilla saatiin pitkällä aikavälillä samalla a:n arvolla sama tasapainotila, ts. kun a:n arvo muuttui myös systeemin tasapainopisteen arvo muuttui.
Esimerkki liitteen 1. kuvassa 2.

Systeemi jaksollinen

Seuraavassa on tarkasteltu systeemiä lähtöarvolla $x_0 = 0.2$, 10 000 iteraatiokierroksen jälkeen, kun vertailtavat x_t ja x_{t+1} hyväksytään yhtäsuuriksi, jos $(x_t - x_{t+1})$:n itseisarvo on pienempi kuin $1{*}10^{-12}$.

Bifurgaatiopisteiden määrittäminen

Ko. systeemin ensimmäiset bifurgaatio- eli kahdentumispisteet on esitetty taulukossa 1. (löytyvät myös mm. liitteestä 3).
Esimerkkejä jaksollisista tapauksista liitteessä 1. kuvissa 3 - 7.

Taulukko 1. Bifurgaatiopisteet, kun $x_0 = 0.2$.

Jakaantumisen järj.luku n	Tasapainopisteiden lukumäärä muuttuu	Bifurgaatiopiste a
1	1->2	0.71953076172
2	2-> 4	0.83306513977
3	4->8	0.85850632439
4	8-> 16	0.86404580892
5	16->32	0.86524634440

Bifurgaatiopisteiden arvoon vaikutti voimakkaasti, kuinka monen iterointikierroksen jälkeen systeemin tilaa lähdettiin tarkastelemaan sekä tarkkuus, millä "perättäiset vertailtavat arvot" katsottiin yhtäsuuriksi/erisuuriksi.
Eli koneen laskentatarkkuus on oltava erinomainen, jotta päästään "oikeisiin" jakaantumiskohtiin.
Liiteessä 3 on esimerkki iterointikierrosten ja laskentatarkkuuden vaikutuksesta bifurgaatiopisteiden arvoon, kun lähtöarvona $x_0 = 0.2$

Lähtöarvon suuruudella ei ollut suurtakaan merkitystä jakaantumispisteen arvoon, kun iterointikierroksia ja tarkkuutta oli tarpeeksi. Liitteessä 4 on tutkittu bifurgaatiopisteitä lähtöarvoilla x_0 on 0.2, 0.5 ja 0.9.

Feigenbaumin vakion määrittäminen

Feigenbaumin vakion arvoa voidaan määrittää, jos tiedetään muutama ensimmäinen bifurgaatiopiste. Likiarvo saadaan kaavalla:

$$F = (a_{n+1} - a_n)/(a_{n+2} - a_{n+1})^{1},$$

jossa n = "jakaantumisen järjestysluku".

Taulukossa 1 esitetyillä bifurgaatiopisteiden arvoilla laskettuna saadaan taulukossa 2 esitetyt Feigenbaumin vakion likiarvot (löytyvät myös liitteestä 3.)

Koska iterointikierrokset ja laskentatarkkuus vaikuttavat bifurgaatiopisteisiin, ne tätä kautta vaikuttavat myös Feigenbaumin vakion likiarvoihin (ks. liite 3).

Kirjallisuudessa esitetty kokemusperäinen arvo Feigenbaumin vakiolle on 4.6692...., joten tässä kokeilemalla saadut arvot jäävät jonkin verran em. arvoa pienemmiksi. Syynä lienee laskentatarkkuus

[1] Peitgen, H-O - Jürgen, H - Saupe, D. 1992. Chaos and Fractals: New Frontiers of Science. Springler-Verlag. New York. s.585-653

Taulukko 2. Feigenbaumin vakion likiarvoja

"Järjestysluku" n	Feigenbaumin vakio F
1	4,462621....
2	4,592698...
3	4,61417...

Feigenbaumin vakio sai kokeiluissani arvoksi jopa 60.02.... (liite 3). Tällä perusteella voisin sanoa, että käyttämilläni laskentatarkkuuksilla sellaisiin iteroimiini bifurgaatiopisteisiin, joissa jako tapahtuu suuremmaksi kuin 64:ään, on suhtauduttava varauksella.

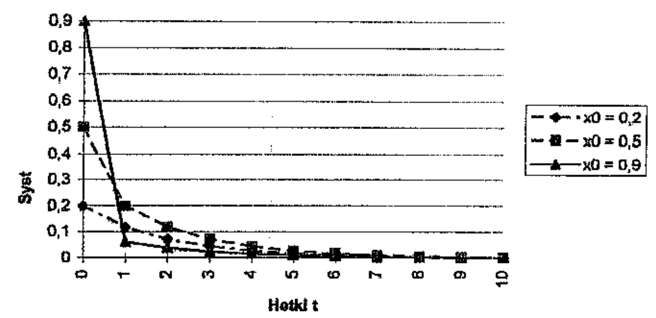
"Kaaoksesta" jaksollisuuden kautta todelliseen kaaokseen

Kahdentumiset esiintyvät yhä tiheämmin parametrin arvon a kasvaessa, ja a:n arvon ollessa n.0.90 sarja ainakin silmämääräisesti näyttää jaksottomalta ja kaoottiselta. Toisaalta systeemi ei vielä saa kaikkia mahdollisia arvoja väliltä 0.0...1.0, joten se ei ehkä ole "aidosti" kaoottinen.

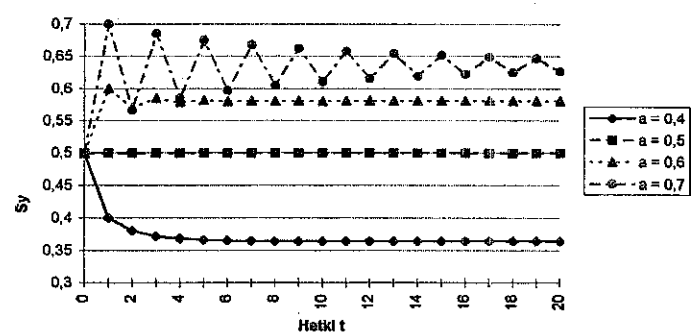
Parametrin a arvon lähestyessä 0.94:ää systeemi muuttuu uudelleen näkyvästi jaksolliseksi. Nyt tasapainopisteitä löytyy ensin kolme kappaletta, ja sitten parametrin a arvon hitaasti kasvaessa bifurgaatioiden kautta kuusi -> kaksitoista -> ... Esimerkkejä liitteessä 1. kuvat 9 ja 10

Parametrin a arvolla 0,95 systeemi alkaa taas näyttää kaottiselta. Ja arvon a lähestyessä 1.0:aa systeemi muuttuu aidosti kaoottiseksi, eli x voi saada arvokseen minkä tahansa arvon välillä 0.0...1.0.
Esimerkit liitteessä 1. kuvat 11 ja 12.

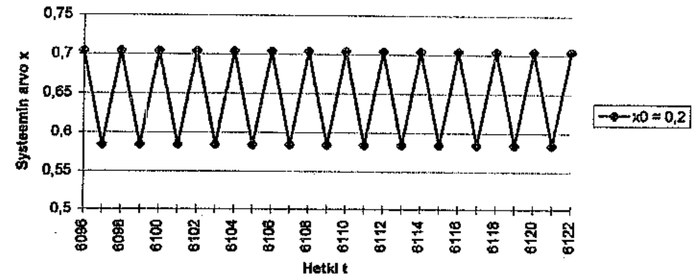
Liite 1: Systeemin käyttäytymiseen liittyviä kuvia



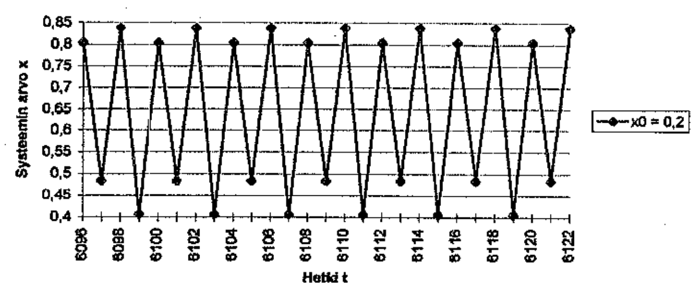
Kuva 1. Systeemin käyttäytyminen, kun parametri $a = 0.2$, ja lähtöarvoina x_0 on käytetty arvoja 0.2, 0.5 ja 0.9.



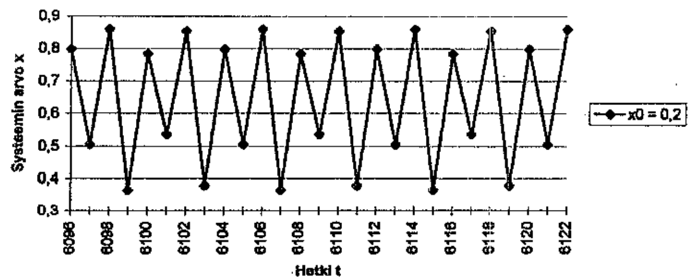
Kuva 2. Systeemin käyttäytyminen, kun lähtöarvona $x_0 = 0.5$ ja parametrin a arvo muuttuu:
$a = 0.4$ -> tasapainopiste $x =$ n. 0.3641
$a = 0.5$ -> tasapainopiste $x = 0.5$
$a = 0.6$ -> tasapainopiste $x =$ n. 0.5808
$a = 0.7$ -> tasapainopiste $x =$ n. 0.6366



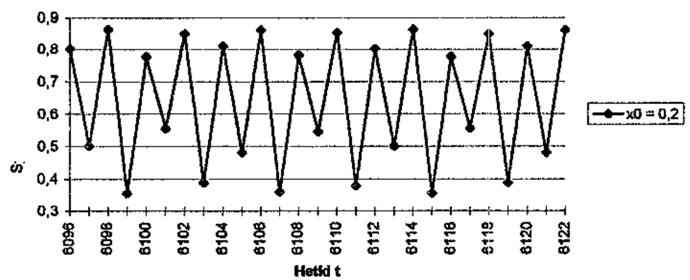
Kuva 3. Systeemin käyttäytyminen, kun parametri $a = 0.7300$ ja lähtöarvona $x_0 = 0.2$. Tasapainopisteet $x_a =$ n. 0.5848 ja $x_b =$ n. 0.7042.



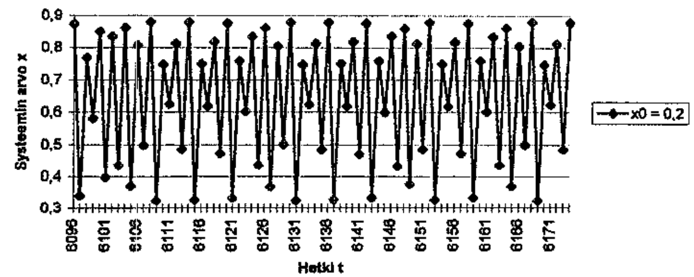
Kuva 4. Systeemin käyttäytyminen, kun parametri $a = 0{,}8400$ ja lähtöarvona $x_0 = 0.2$. Tasapainopisteet $x_a =$ n. 0.4071, $x_b =$ n. 0.4842, $x_c =$ n. 0.8045 ja $x_d =$ n. 0.8390



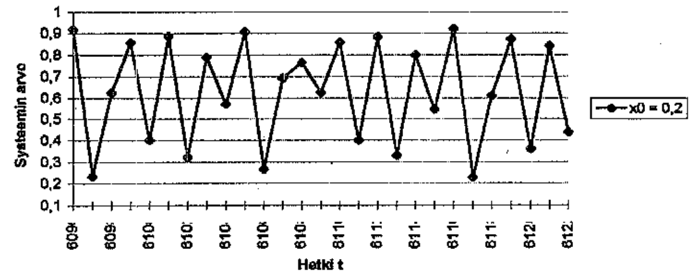
Kuva 5. **Systeemin käyttäytyminen, kun parameri a = 0,8600 ja lähtöarvona x_0 = 0.2. Tasapainopisteet x_a = n. 0.3666, x_b = n. 0.3799, x_c = n. 0.5066, x_d = n. 0.5364, x_e = n. 0.7856, x_f = n. 0.7995, x_g = n. 0.8544 ja x_h = n. 0.8598**



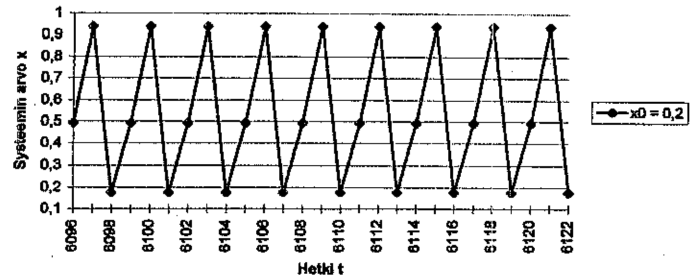
Kuva 6. **Systeemin käyttäytyminen, kun parameri a = 0.8650 ja lähtöarvona x_0 = 0.2. Tasapainopisteitä löytyy nyt 16 kpl.**



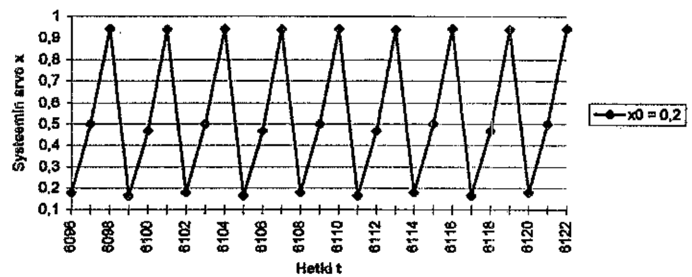
Kuva 7. **Systeemin käyttäytyminen, kun parameri a = 0.8800 ja lähtöarvona x_0 = 0.2. Tasapainopisteitä löytyy 32 kpl.**



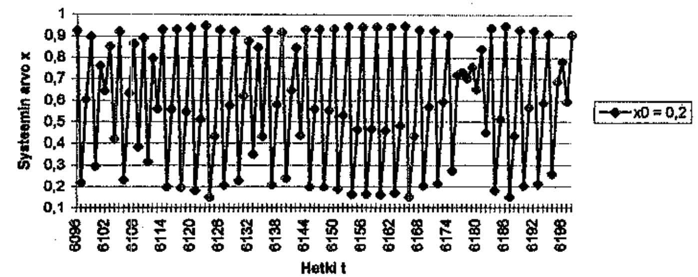
Kuva 8. **Systeemin käyttäytyminen, kun parameri a = 0.9300 ja lähtöarvona x_0 = 0.2. Sarja näyttää kaoottiselta.**



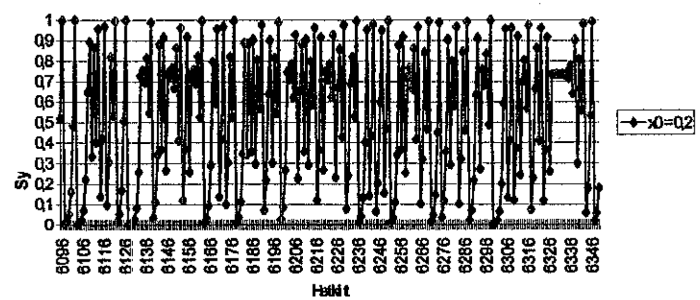
Kuva 9. **Systeemin käyttäytyminen, kun parameri $a = 0.9400$ ja lähtöarvona $x_0 = 0.2$. Tasapainopisteet x_a = n. 0.1765, x_b = n. 0.4949 ja x_c = n. 0.9399**



Kuva 10. **Systeemin käyttäytyminen, kun parameri $a = 0.9440$ ja lähtöarvona $x_0 = 0.2$. Tasapainopisteet x_a = n. 0.1653, x_b = n. 0.1787, x_c = n. 0.4685, x_d = n. 0.5025, x_e = n. 0.9394 ja x_f = n. 0.9440**



Kuva 11. **Systeemin käyttäytyminen, kun parameri $a = 0.9500$ ja lähtöarvona $x_0 = 0.2$. Sarja näyttää kaoottiselta.**



Kuva 12. **Systeemin käyttäytyminen, kun parameri $a = 0.99999$ ja lähtöarvona $x_0 = 0.2$. Sarja on kaoottinen.**

```
/* MADE BY MAARIT VESAPUISTO TOUKOKUU 1998

  SANOMALEHTIYLIOPISTON KAAOSTEORIAAN LIITTYVAA ITEROINTIA.*/

#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
#include<float.h>
#define PII 3.14159265358979
#define VIRHE 0.000000000001
#define MINJAK 1
#define MAXJAK 256
#define ITER 10000
#define ALA 0.001
#define YLA 0.999

void main(void)
{
	clrscr();
	double ala, yla, itala, ityla, x, a, vala, vali, vyla, feigen;
	double eka[MAXJAK], toka[MAXJAK], tark[MAXJAK], vakio[10];
	double alkux[1] = {0.2};
	int viela, sama, i, j, nytiter, jako, varvo = 0;
	itala = ALA;
	ityla = YLA;
	printf("Alkuarvo %2.1lf, iterointeja %d, tarkkuus %1.9lf", alkux[0], ITER,
VIRHE);
	for (jako = MINJAK; jako <= MAXJAK; jako = jako * 2)
	{
		printf("\nJakaantuminen %d -> ", jako);
		for (j = 0; j < 1; j++)
		{
			for (nytiter = ITER; nytiter <= 10000; nytiter = nytiter + 6000)
			{
				x = alkux[j];
				ala = itala;
				yla = ityla;
				viela = 1;
				while (viela == 1)
				{
					a = (ala + yla) / 2.0;
					for (i = 0; i < nytiter; i++)
						x = a* sin(PII * x);
					for (i = 0; i < jako; i++)
						eka[i] = x = a* sin(PII * x);
					for (i = 0; i < jako; i++)
						toka[i] = x = a* sin(PII * x);
					for (i = 0; i < jako; i++)
						tark[i] = x = a* sin(PII * x);
```



```
					sama = 1;
					for (i = 0; i < jako; i++)
						if ((VIRHE < fabs(eka[i]-toka[i])) ||
						(VIRHE < fabs(eka[i]-tark[i])) ||
						(VIRHE < fabs(tark[i]-toka[i])))
							sama = 0;
					if (VIRHE > fabs(ala-yla))
						viela = 0;
					if (sama == 1)
						ala = a;
					if (sama == 0)
						yla = a;
				}
				printf(": a = %1.11lf", a);
				vakio[varvo] = a;
				varvo++;
			}
		}
		itala = a;
	}
	printf("\n\nFeigenbaumin vakion määrittäminen:");
	varvo = 0;
	vala = vakio[varvo];
	vali = vakio[++varvo];
	vyla = vakio[++varvo];
	for (jako = MINJAK; jako <= (MAXJAK/2/2) ; jako = jako * 2)
	{
		feigen = (vali - vala)/(vyla - vali);
		printf("\nVali %d->%d->%d: F = %2.11lf", jako, jako*2, jako*4, feigen);
		vala = vali;
		vali = vyla;
		vyla = vakio[++varvo];
	}
}
```

Alkuarvo 0.2, iterointeja 10000, tarkkuus 0.000000000001
Jakaantuminen 1 -> a = 0.71953076172
Jakaantuminen 2 -> a = 0.83306513977
Jakaantuminen 4 -> a = 0.85850632439
Jakaantuminen 8 -> a = 0.86404580892
Jakaantuminen 16 -> a = 0.86524634440
Jakaantuminen 32 -> a = 0.86550452063
Jakaantuminen 64 -> a = 0.86556206530
Jakaantuminen 128 -> a = 0.86557514088
Jakaantuminen 256 -> a = 0.86557819474

Feigenbaumin vakion määrittäminen:
Väli 1 -> 2 -> 4: F = 4.46262152199
Väli 2 -> 4 -> 8: F = 4.59269892638
Väli 4 -> 8 -> 16: F = 4.61417809417
Väli 8 -> 16 -> 32: F = 4.65006202493
Väli 16 -> 32 -> 64: F = 4.48653621289
Väli 32 -> 64 -> 128: F = 4.40092395591
Väli 64 -> 128 -> 256: F = 4.28167008254

Alkuarvo 0.2, iterointeja 4000, tarkkuus 0.000000000001
Jakaantuminen 1 -> a = 0.71879980469
Jakaantuminen 2 -> a = 0.83263113403
Jakaantuminen 4 -> a = 0.85838256495
Jakaantuminen 8 -> a = 0.86399559000
Jakaantuminen 16 -> a = 0.86522335228
Jakaantuminen 32 -> a = 0.86549688241
Jakaantuminen 64 -> a = 0.86555799528
Jakaantuminen 128 -> a = 0.86555901337
Jakaantuminen 256 -> a = 0.86555926788

Feigenbaumin vakion määrittäminen:
Väli 1 -> 2 -> 4: F = 4.42038851074
Väli 2 -> 4 -> 8: F = 4.58779903095
Väli 4 -> 8 -> 16: F = 4.57175234933
Väli 8 -> 16 -> 32: F = 4.48858142921
Väli 16 -> 32 -> 64: F = 4.47581830022
Väli 32 -> 64 -> 128: F = 60.02750654499
Väli 64 -> 128 -> 256: F = 4.00003623913

Alkuarvo 0.2, iterointeja 10000, tarkkuus 0.000000001
Jakaantuminen 1 -> a = 0.71971350051
Jakaantuminen 2 -> a = 0.83315659437
Jakaantuminen 4 -> a = 0.85856351229
Jakaantuminen 8 -> a = 0.86406645545
Jakaantuminen 16 -> a = 0.86525033563
Jakaantuminen 32 -> a = 0.86550748323
Jakaantuminen 64 -> a = 0.86556298919
Jakaantuminen 128 -> a = 0.86557558698
Jakaantuminen 256 -> a = 0.86557836994

Feigenbaumin vakion määrittäminen:
Väli 1 -> 2 -> 4: F = 4.46504744327
Väli 2 -> 4 -> 8: F = 4.61696898302
Väli 4 -> 8 -> 16: F = 4.64822643945
Väli 8 -> 16 -> 32: F = 4.60389358709
Väli 16 -> 32 -> 64: F = 4.63279270282
Väli 32 -> 64 -> 128: F = 4.40600673281
Väli 64 -> 128 -> 256: F = 4.52677136269

Alkuarvo 0.2, iterointeja 10000, tarkkuus 0.000000000001
Jakaantuminen 1 -> a = 0.71953076172
Jakaantuminen 2 -> a = 0.83306513977
Jakaantuminen 4 -> a = 0.85850632439
Jakaantuminen 8 -> a = 0.86404580892
Jakaantuminen 16 -> a = 0.86524634440
Jakaantuminen 32 -> a = 0.86550452063
Jakaantuminen 64 -> a = 0.86556206530
Jakaantuminen 128 -> a = 0.86557514088
Jakaantuminen 256 -> a = 0.86557819474

Feigenbaumin vakion määrittäminen:
Väli 1 -> 2 -> 4: F = 4.46262152199
Väli 2 -> 4 -> 8: F = 4.59269892638
Väli 4 -> 8 -> 16: F = 4.61417809417
Väli 8 -> 16 -> 32: F = 4.65006202493
Väli 16 -> 32 -> 64: F = 4.48653621289
Väli 32 -> 64 -> 128: F = 4.40092395591
Väli 64 -> 128 -> 256: F = 4.28167008254

Alkuarvo 0.5, iterointeja 10000, tarkkuus 0.000000000001
Jakaantuminen 1 -> a = 0.71953076172
Jakaantuminen 2 -> a = 0.83306513977
Jakaantuminen 4 -> a = 0.85850632439
Jakaantuminen 8 -> a = 0.86405009645
Jakaantuminen 16 -> a = 0.86524441627
Jakaantuminen 32 -> a = 0.86550463717
Jakaantuminen 64 -> a = 0.86556167254
Jakaantuminen 128 -> a = 0.86557516175
Jakaantuminen 256 -> a = 0.86557821560

Feigenbaumin vakion määrittäminen:
Väli 1 -> 2 -> 4: F = 4.46262152199
Väli 2 -> 4 -> 8: F = 4.58914695505
Väli 4 -> 8 -> 16: F = 4.64178182086
Väli 8 -> 16 -> 32: F = 4.58963836218
Väli 16 -> 32 -> 64: F = 4.56244768072
Väli 32 -> 64 -> 128: F = 4.22822170159
Väli 64 -> 128 -> 256: F = 4.41711373348

Alkuarvo 0.9, iterointeja 10000, tarkkuus 0.000000000001
Jakaantuminen 1 -> a = 0.71953076172
Jakaantuminen 2 -> a = 0.83306513977
Jakaantuminen 4 -> a = 0.85850632439
Jakaantuminen 8 -> a = 0.86405009645
Jakaantuminen 16 -> a = 0.86524441627
Jakaantuminen 32 -> a = 0.86550463717
Jakaantuminen 64 -> a = 0.86556167254
Jakaantuminen 128 -> a = 0.86557512994
Jakaantuminen 256 -> a = 0.86557818379

Feigenbaumin vakion määrittäminen:
Väli 1 -> 2 -> 4: F = 4.46262152199
Väli 2 -> 4 -> 8: F = 4.58914695505
Väli 4 -> 8 -> 16: F = 4.64178182086
Väli 8 -> 16 -> 32: F = 4.58963836218
Väli 16 -> 32 -> 64: F = 4.56244768072
Väli 32 -> 64 -> 128: F = 4.23821749793
Väli 64 -> 128 -> 256: F = 4.40669496142