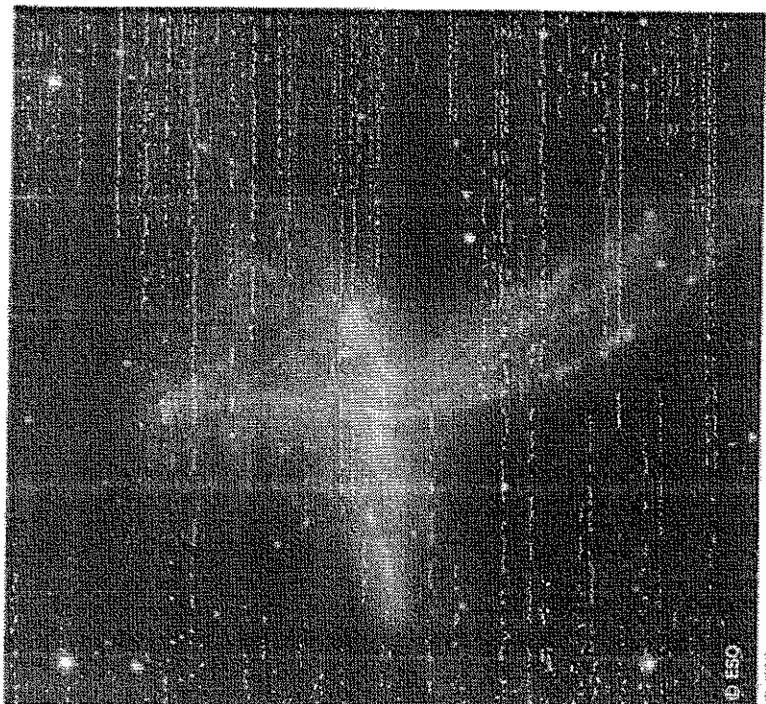
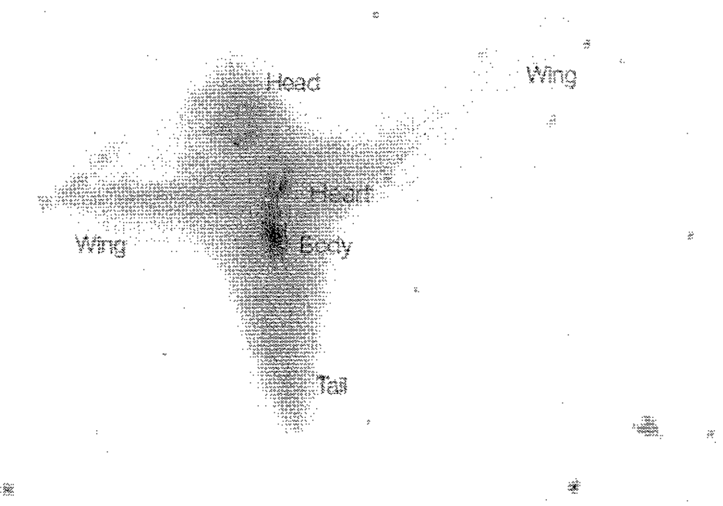
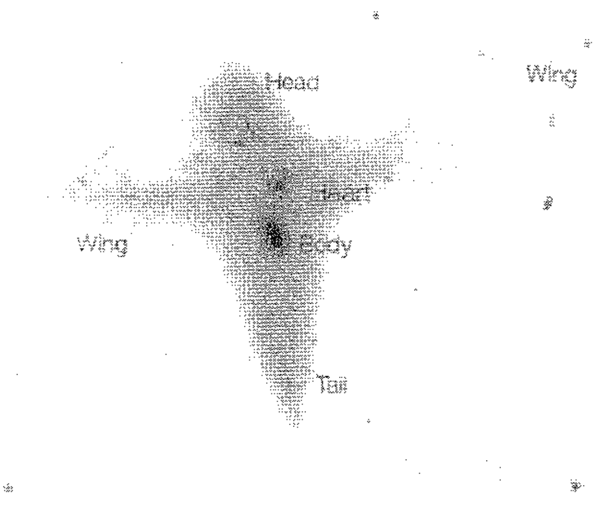
ARKHIMEDES

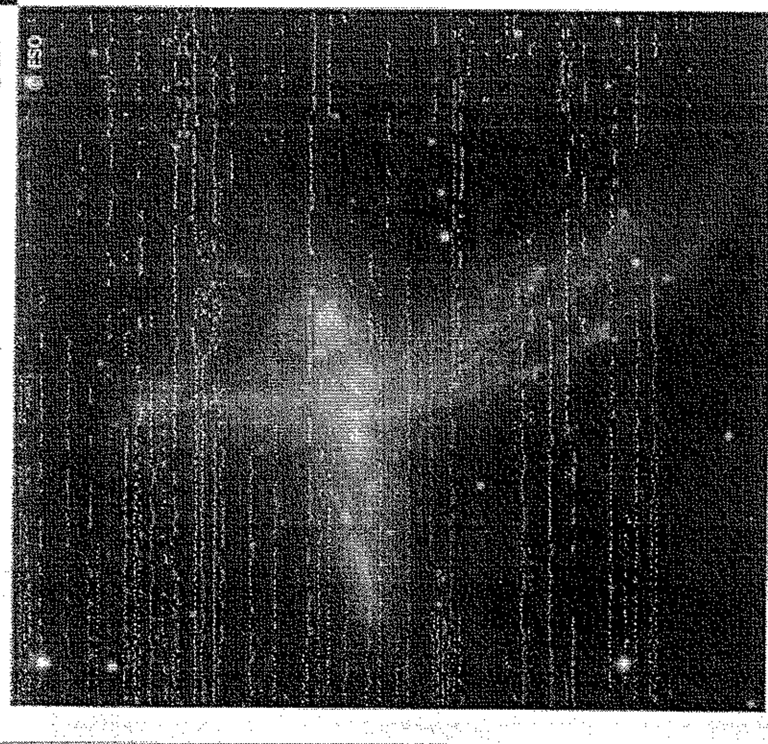
FYSIIKAN JA MATEMATIIKAN AIKAKAUSLEHTI | TIDSKRIFT FÖR FYSIK OCH MATEMATIK

6/2008









Neljä vuotta ESO-jäsenyyttä - tähtitieteilijäkokous Tuorlan observatoriossa
Spintronics: From a successful past towards a bright future
Diskreetti Painlevé-ominaisuus
Tutkijoiden ESKO-hanke muokkasi koko suomalaista tietotekniikka-alaa

ARKHIMEDES

FYSIIKAN JA MATEMATIIKAN AIKAKAUSLEHTI | TIDSKRIFT FÖR FYSIK OCH MATEMATIK

Kansikuva: Cosmic Bird © ESO Kolmen galaksin yhteentörmäys. VLT-teleskoopin infrapunainstrumentilla adaptiivista optiikkaa käyttäen otettu kuva aikaisemmin lähes tuntemattomasta noin 650 miljoonan valovuoden päässä sijaitsevasta kirkkaasta infrapunagalaksista, jonka tutkijat ristivät Kosmiseksi linnuksi, paljasti kohteen kolmen galaksin yhteentörmäykseksi (Petri Väisänen, Seppo Mattila et al.). Juttu alkaa sivulta 7.

ARKHIMEDES 6/2008

Julkaisijaseurat

Suomen Fyysikkoseura - Finlands Fysikerförening r.y.
http://www.fyysikkoseura.fi
henkilöjäseniä 1000
kannatusjäsenet Teollisuuden Voima Oy

Fysikersamfundet i Finland - Suomen fyysikkojen seura rf
http://www.physics.helsinki.fi/~fysif/
henkilöjäseniä 130

Suomen matemaattinen yhdistys ry - Finlands matematiska förening rf
http://www.math.helsinki.fi/~smy/
henkilöjäseniä 330

Valtuuskunta - Delegation

Suomen Fyysikkoseura - Finlands Fysikerförening ry: *Katri Huitu, Keijo Hämäläinen, Kalle-Antti Suominen*
Fysikersamfundet i Finland - Suomen fyysikkojen seura rf: *Claus Montonen (pj.)*
Suomen matemaattinen yhdistys ry - Finlands matematiska förening rf: *Mats Gyllenberg, Jari Taskinen*

Toimituskunta - Redaktion

Maarit Järvenpää, päätoimittaja
Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, amj@maths.jyu.fi
Mika Koskenoja
Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, mika.koskenoja@helsinki.fi
Markus Norrby
Åbo Akademi, mnorrby@abo.fi
Ilpo Vattulainen
Tampereen teknillinen yliopisto, Fysiikan laitos
ilpo.vattulainen@tut.fi
Hanna Vehkamäki
Helsingin yliopisto, Fysiikan laitos,
hanna.vehkamaki@helsinki.fi

Toimitussihteeri ja taitto
Ella Hänninen
puh. (09) 191 50523
faksi (09) 191 50553
toimitus@arkhimedes.fi

Lehden osoite
Arkhimedes
PL 64
00014 Helsingin yliopisto
http://www.arkhimedes.fi

Paino Painotalo Casper Oy, Kurikka

Tilaushinnat 2008–2009
Kotimaa 34 euro/vuosi
Ulkomaat 37 euro/vuosi
Irtonumero 6 euro ISSN 0004–1920

Ilmoitushinnat
Koko sivu 420 euro
Puoli sivua 340 euro

Toimitus ei palauta tilaamattomia aineistoja.

1103–1106.
[3] V. I. Arnold, *Dynamics of complexity of intersections*, Bol. Soc. Bras. Mat. **21** (1990), 1–10.
[4] E. Bombieri and W. Gubler, *Heights in Diophantine geometry*, New Mathematical Monographs, vol. 4, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
[5] O. Costin and M. Kruskal, *Movable singularities of solutions of difference equations in relation to solvability and a study of a superstable fixed point*, Theoret. and Math. Phys. **133** (2002), 1455–1462.
[6] A. S. Fokas, B. Grammaticos, and A. Ramani, *From continuous to discrete Painlevé equations*, J. Math. Anal. Appl. **180** (1993), 342–360.
[7] B. Grammaticos, A. Ramani, and V. Papageorgiou, *Do integrable mappings have the Painlevé property?*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991), 1825–1828.
[8] V. I. Gromak, I. Laine, and S. Shimomura, *Painlevé differential equations in the complex plane*, Walter de Gruyter, Berlin, 2002.
[9] R. G. Halburd, *Diophantine integrability*, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005), L263–L269.
[10] R. G. Halburd and R. J. Korhonen, *Finite-order meromorphic solutions and the discrete Painlevé equations*, Proc. London Math. Soc. **94** (2007), no. 2, 443–474.
[11] ______, *Meromorphic solutions of difference equations, integrability and the discrete Painlevé equations*, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007), R1–R38.
[12] J. Hietarinta and C.-M. Viallet, *Singularity confinement and chaos in discrete systems*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 325–328.
[13] C. F. Osgood, *Effective bounds on the Diophantine approximation of algebraic functions, and Nevanlinna theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1052, Springer, Berlin, 1984.
[14] A. Ramani, B. Grammaticos, and J. Hietarinta, *Discrete versions of the Painlevé equations*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991), 1829–1832.
[15] J. A. G. Roberts and F. Vivaldi, *Arithmetical method to detect integrability in maps*, Phys. Rev. Lett. **90** (2003), art. no. 034102.
[16] H. Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Comm. Math. Phys. **220** (2001), 165–229.
[17] J. A. Shohat, *A differential equation for orthogonal polynomials*, Duke Math. J. **5** (1939), 401–417.
[18] N. Steinmetz, *Eine Verallgemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen Hauptsatzes*, J. Reine Angew. Math. **368** (1986), 134–141.
[19] A. P. Veselov, *Growth and integrability in the dynamics of mappings*, Comm. Math. Phys. **145** (1992), 181–193.
[20] P. Vojta, *Diophantine approximations and value distribution theory*, Lecture Notes in Math., vol. 1239, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
[21] ______, *Roth's theorem with moving targets*, Internat. Math. Res. Notices **1996** (1996), 109–114.

Paljonko on kaksi plus kaksi?

Kokemuksia ja näkemyksiä matematiikan opetuksesta kuudelta vuosikymmeneltä

Ilkka Virtanen
Talousmatematiikan professori

Kirjoittaja **Ilkka Virtanen** on Vaasan yliopiston talousmatematiikan emeritusprofessori, joka toimi professorin virassa 1981–2008. Hän oli Vaasan yliopiston vararehtori 1984–87, rehtori 1987–94 ja teknillisen tiedekunnan dekaani 1998–2007. Virtanen on tutkinut mm. dynaamisia matemaattisia malleja, tilinpäätösanalyysiä ja rahoitusta sekä matematiikan ja tilastotieteen taloustieteellisiä sovelluksia. Vuodesta 1998 lähtien hän on ollut aktiivisesti mukana korkeakoulujen arviointitehtävissä Suomessa ja laajemminkin Euroopassa. Virtanen piti jäähyväisluentonsa Snellmanin päivänä 12.5.2008.

Aluksi näkökulman valinnasta

Valitsemani alaotsikko viittaa vahvasti siihen, että keskityn tässä esityksessäni menneitten muisteluun ja tarkasteluun. Näin todella tulenkin jossain määrin tekemään. Onko neljä vuosikymmentä kestäneen yliopistollisen virkauran päättymistä ennakoivan jäähyväisluennon tarkoituksena sitten nimenomaan peruutuspeiliin katsominen vai olisiko parempi kiinnittää huomio siihen, missä juuri nyt mennään ja mitä juuri nyt tapahtuu tai vieläpä keskittää huomio tuulilasista eteenpäin katsomiseen? Mutta kuten esimerkiksi tulevaisuuden tutkimuksen perusteita tuntevat tietävät, tulevaisuutta ei ole ilman menneisyyttä ja nykyisyyttä ja nämä kolme muodostavat erottamattoman jatkumon. Kuninkaallisen Turun Akatemian vihkimisjuhlan (v. 1640) professorijäsen **Michael Wexionius Gyldenstolpe** esitti v. 1642 julkaisemassaan väitöskirjassa *De Prudentia (Viisaudesta)* tästä kolmiyhteydestä seuraavan näkemyksen:

> "Viisauden perusasia on, että valitaan hyvä ja vältetään paha. Jotta saisimme tämän viisauden, tarvitsemme kolminkertaisen silmän: Muistin, jolla tarkastellaan *mennyttä*, ymmärryksen, jolla tarkastellaan *nykyhetkeä* ja huolenpidon, jolla tarkastellaan *tulevaa*."

Wexioniusta seuraten esitykseni lähtökohtana onkin oikeastaan huoli tai huolenpito tulevasta. Mikä on maamme matematiikan opetuksen taso tulevaisuudessa ja miten se vaikuttaa esimerkiksi opiskelijarekrytoinnissa osaamisedellytysten kautta Vaasan yliopiston ja erityisesti sen teknillisen tiedekunnan menestymismahdollisuuksiin? Yritän sitä varten ymmärtäväisesti tarkastella eräitä nykyhetken matematiikan opetuksessa vallitsevia asiantiloja ja esittää joitakin niihin liittyviä näkemyksiä sekä myös kokemukseen ja muistiin perustuen havaintoja opetuksen kehityspoluista viime vuosisadan puolivälistä lähtien. Syntyykö tästä Wexioniuksen esittämällä tavalla jonkinasteista viisautta, se jääköön muiden pääteltäväksi. Ehkä mukana on palanen myös jälkiviisautta, joka Havukka-ahon ajattelijan mukaan on se viisauden yleisin laji. Eli kuten **Veikko Huovinen** toteaa **Konsta Pylkkäsen** suulla:

> "Kaikista paras ja imelin viisauven laji on jälkiviisaus, sillä alalla saahaan eniten aikaan. Siinä on tapaus mennyttä aikakautta, mutta se kuvitellaan esiintulevaksi ja sakilla setvitään, miten olisi paras käyttäytyä. Tässä lajissa on ihminen viisaimmillaan...".

Paljonko on kaksi plus kaksi?

Esitykseni pääotsikko juontaa juurensa 15 vuoden taakse. Vaasan yliopiston sen aikaisena rehtorina kirjoitin Vaasan yliopistolehteen samannimisen pääkirjoituksen. Syyn kirjoitukseeni sain yliopistojen keskinäistä hyvyyttä koskevista vertailuista, jotka tuolloin olivat tulossa Suomeenkin. Eräs tällainen vertailu sisältyi Professoriliiton teettämään professoritutkimukseen, jonka yhtenä osana oli Suomen parhaan yliopiston etsintä. Tässä osiossa tasavallan päättäjiä pyydettiin nimeämään Suomen yliopistoista viisi parasta ja korkeatasoisinta. Subjektiivisiin mielikuviin perustuvat vastaukset antoivat odotetunlaisen tuloksen. Yliopistot sijoittuivat muutamin vähäisin poikkeamin koon ja iän mukaiseen järjestykseen: Helsingin yliopisto ja Teknillinen korkeakoulu olivat selvästi kärjessä, Vaasan ja Lapin yliopistot peräpään valvojina. Tilastotieteilijä olisi saanut tuosta aineistosta hyvän regressiomallin selittäessään yliopiston näin määriteltyä hyvyyttä pelkästään kahdella muuttujalla, yliopiston iällä ja koolla.

Myös tulosohjaus oli tuolloin tulossa yliopistoihin. Opetusministeriö oli samana vuonna (1993) arvioinut yliopistojen toimintaa eri kriteerein. Osa seuraavan vuoden määrärahoista saatiin ensimmäisiä kertoja toiminnan tuloksellisuuden perusteella. Tuloksellisuusmäärärahaa jaettiin yliopistoille seuraavilta toiminta-alueilta: tutkimus, peruskoulutus, jatkokoulutus, aikuiskoulutus ja kansainvälistyminen. Tässä mittauksessa Vaasan yliopisto menestyi erinomaisesti. Perus-, jatko- ja aikuiskoulutuksen tehokkuudesta koostunut tuloksellisuusmääräraha oli suuruudeltaan listan kärkipäässä, tuloksellisuusrahoja yliopiston budjetin kokoon suhteutettaessa Vaasan yliopisto oli suorastaan ensimmäisenä.

Oliko Vaasan yliopisto tuolloin siis maamme huonoin vai paras yliopisto? Kokonaisuutena tarkasteltuna ei varmaan kumpaakaan, vaan jossakin siellä välillä. Kun sen sijaan rajattiin tarkastelu tiettyyn toimintoon tai suoritettiin tarkastelu tietystä suppeasta näkökulmasta, saatiin valituista kriteereistä riippuen hyvinkin erilaisia, jopa vastakkaisia tuloksia. Entäpä matematiikassa, joka on tieteistä eksaktein, voidaanko siellä kuitenkin aina päätyä aina yksiselitteiseen lopputulemaan? Onko itsestään selvää, mitä kaksi plus kaksi on?

Ulla-vaimoni kummipoika vieraili luonamme n. 1,5 kuukautta sitten. Vierailun keskeisenä aiheena oli perheen lasten Rölli-näytelmään tutustuminen Vaasan kaupunginteatterissa. Jos tässä yhteydessä olisin kysynyt perheen 9-vuotiaalta Lauri-pojalta, joka juuri on menestyksellisesti oppinut mm. kertotaulut, paljonko on kaksi plus kaksi, vastaus olisi todennäköisesti tullut tuhahtaen: "No neljä tietysti". Jos taas esittäisin kysymyksen laitoksemme lukuteorian asiantuntijalle, yliopistonlehtori ja dosentti **Marko Moisiolle**, hän voisi hyvinkin vastata: *"Vaikea sanoa ilman kysymyksen täsmentämistä tiedolla siitä, mikä on käytetyn lukujärjestelmän kantaluku"*. Tietokoneissa käytetyssä binäärijärjestelmässä esimerkiksi summaa ilmoittava luku on 100 (tällöin tosin yhteenlaskettavatkin kirjoitetaan muotoon 10 eli binäärijärjestelmän symbolein 10 + 10 = 100). Kvadraalijärjestelmässä (kantalukuna 4) on vastaavasti 2 + 2 = 10. Tilastotieteen professori **Seppo Pynnöselle** esitetty kysymys puolestaan voisi johtaa vaikkapa seuraavaan pohdintaan: *"Jos nuo kakkoset merkitsevät esimerkiksi gallup-kyselyssä saatuja kahden pienpuolueen kannatusprosentteja, jolloin puolueiden todelliseen kannatukseen liittyy "prosenttiyksikön virhemarginaali suuntaansa", kuten tiedotusvälineissä tavataan asia ilmaista, puolueiden yhteenlasketun (todellisen) kannatuksen voidaan arvioida sijoittuvan välille 2,5–5,5 prosenttiyksikköä."*

Kun aikoinaan tuota mainittua kirjoitusta laadin ja yksikäsitteisyysvertailua hyvyysmittauksen tuloksen ja matemaattisen operaation tuloksen välillä pohdin, todellisuudessa esitinkin otsikon kysymyksen laskentatoimen professori **Timo Salmelle**. Hän vastasi siihen vastakysymyksellä: *"Paljonko haluat sen olevan?"* Tällä hän viittasi yrityksen tilinpäätöslukujen – jotka sinänsä ovat tarkasti kirjanpidosta johdettuja – erilaisiin tulkintoihin. Yrityksen kannattavuutta esimerkiksi voidaan mitata kovin monella eri tunnusluvulla ja esittää eri sidosryhmille – henkilöstölle, omistajille, medialle – tarkoitukseen aina parhaiten sopiva.

Olen tällä yksinkertaisella esimerkillä yrittänyt havainnollistaa matematiikan käyttöä erityyppisissä yhteyksissä. Matematiikan avulla suoritetut operaatiot ovat aina yksiselitteisiä ja tarkkoja, silloinkin kun niitä käytetään epätäsmällisissä yhteyksissä. Esimerkiksi todennäköisyyslaskenta on matemaattinen koneisto, jolla satunnaisuutta sisältävään ilmiöön liittyvää epävarmuutta voidaan hallita. Sattuman läsnäoloa ei voida poistaa, mutta sen vaikutukset voidaan esimerkiksi päätöksenteossa ottaa huomioon. Tuloksen epämääräisyys tai epävarmuus ei siis liity itse matematiikkaan, vaan on seurausta alkuehtojen puutteellisesta määrittelystä tai tuntemisesta tai tuloksen mielivaltaisesta tai virheellisestä tulkinnasta. Yleisen hokeman vastaisesti tilastot eivät itsessään valehtele, niiden tulkitsijat sitäkin useammin.

Kokemuksia matematiikan opetuksesta kuudelta vuosikymmeneltä

Pienenä välipalana – kevennyksenäkin – esitän monille ehkä tutun diasarjan peruskoulun matematiikan opetuksen kehityksestä tyypiteltynä vuosikymmenittäin. En enää tarkasti muista diasarjan alkuperäislähdettä. Joka tapauksessa olen esitystä vuosien mittaan jossain määrin muokannut ja tavannut esittää sen vieraillessani talousmatematiikan peruskurssin luennoilla kertomassa talousmatematiikan ytimen muodostavasta matemaattisesta mallintamisesta. Eri vuosikymmeniä koskevat tarkastelut liittyvät omaan "matemaattiseen historiaani" karkeasti tyypiteltynä seuraavasti. Omat kouluvuoteni 1950-luvulla edustavat "Vanhaa hyvää aikaa", lukio- ja opiskeluvuoteni 1960-luvulla olivat "Suurten ikäluokkien kouluvuosia", jatko-opiskelijan ja yliopisto-opettajan (assistentti, lehtori) vuosina 1970-luvulla koettiin kouluissa "Uuden matematiikan aikakausi" ja kolmen viimeisen vuosikymmenen aikana professorina ja siinä tehtävässä opettajana, tutkijana, hallintomiehenä ja asiantuntijana olen voinut nähdä 1980-luvun "Ryhmätöiden ajan", 1990-luvun "Ekologian ja kansalaistoiminnan ajan" sekä nykyisen 2000-luvun "Internet- ja pörssiaikakauden". Olen sijoittanut diasarjan osaksi kotisivuani ja kiinnostuneet voivat tutustua siihen osoitteessa http://lipas.uwasa.fi/~itv/pk_matem.ppt.

Matematiikka ja yhteiskunnan eri tehtäväalueet

Korkeakouluissa on helppo havaita, että yleinen matematiikan osaaminen ja motivaatio matemaattisten aineiden opiskeluun eivät koulunsa päättäneillä ole riittävän hyvät. Pitkän matematiikan suorittaneiden osuus on silti laskusuuntauksesta huolimatta säilynyt kohtuullisena eivätkä heidän matematiikan taitonsa ratkaisevasti poikkea kansainvälisestä tasosta. Ylioppilaskirjoitusten pakollisia aineita koskenut äskettäinen uudistus on luonut matematiikalle entistä tasavertaisemman aseman muihin aineisiin verrattuna. Lyhyen matematiikan valinneille matematiikka on kuitenkin aivan liian usein pakkopullaa, jota vierastetaan, pelätään ja usein inhotaankin. Matematiikkaa vielä suurempi ongelma on fysiikan lukio-opiskelijoiden lukumäärän painuminen takavuosina lähes maanrakoon. Uusi ainereaali voi merkitä piristysruisketta myös fysiikan ja kemian lukio-opinnoille.

Koulun matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tehtävänä on luonnollisesti varustaa oppilaat sellaisilla alan perustiedoilla ja -taidoilla, jotka ovat riittävät toisaalta jatko-opintoja, toisaalta suoraan työelämää varten. Koulussa omaksutun oppimisen laadulla ja määrällä on erilaiset vaikutukset oppilaan tulevia tehtäviä ajatellen siitä riippuen, mikä on hänen myöhempi uravalintansa. Kouluaikaisen matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ja oppimisen puutteet voidaan jakaa karkeasti kolmeen luokkaan myöhemmän opiskelun ja tulevien työtehtävien perusteella. Laiminlyöntien ja puutteiden vakavuus on aloittain nouseva seuraavassa järjestyksessä.

1. Matematiikka, fysiikka ja kemia tieteinä ja yliopistollisina oppialoina sekä näihin suoraan liittyvät työtehtävät. Tieteenalojen menestyminen ja kehitys on suuressa määrin riippumaton siitä, miten kouluopetus onnistuu. Puhtaasti matematiikan ja luonnontieteiden kannalta riittävä määrä lahjakkaita ja motivoituneita opiskelijoita löytyy joka tapauksessa, ja yliopisto-opetuksen taso on lopulta ratkaiseva alan kehityksen kannalta. Itse aloitin matematiikan yliopisto-opintoni olosuhteiden pakosta (pieni maalaiskoulu ilman merkittäviä valintamahdollisuuksia) lukion lyhyen oppimäärän pohjalta. En silti yliopistossa huomannut eroa opintojeni edistymisessä matematiikan pitkän oppimäärän suorittaneihin verrattuna.

2. Tekniikka, lääketiede, taloustieteen eräät alat jne. Vahva matemaattis-luonnontieteellinen perussivistys on näillä aloilla menestymisen edellytys. Alat edellyttävät periaatteessa vahvaa matemaattista taustaa ja koulusta, mutta puutteet voidaan korkeakoulutasolla ainakin jossain määrin vielä korjata (korkeakoulujen kertaus- ja täydennyskurssit, kukkaisteekkarityyppiset erityisjärjestelyt ym.). Kokonaisuuden kannalta menettely on kuitenkin tehotonta ja kallista.

3. Alat, joiden opiskelussa ei enää juurikaan kohdata matematiikkaa (mm. useimmat humanistiset tieteet, monet yhteiskuntatieteiden osa-alueet). Kouluopetuksen ja -oppimisen puutteet jäävät pysyviksi, joten vahingot ovat pitkällä aikavälillä tässä ryhmässä suurimmat.

Vaasan yliopistossa kohdan 1 alueelle sijoittuvaa toimintaa on vain henkilökunnan toimesta suoritettavassa tutkimuksessa ja jatko-opiskelussa, perustutkintoon johtavaa matematiikan, luonnontieteiden tai tilastotieteen koulutusta ei ole. Perusopetus sijoittuukin luokkiin 2 ja 3 niin, että luokkien sisällä on vielä eri tasoja. Opiskelun kuluessa matematiikan (ja tilastotieteen) taitojen kehittymisen edellyttäminen eriytyy opiskelijan pääaineen mukaan.

Tekniikassa puutteet matemaattis-luonnontieteellisessä osaamisessa muodostavat jo valtakunnallisestikin selvän uhan opiskelijarekrytoinnille, opinnoissa menestymisen edellytyksistä puhumattakaan. Sisäänottomääriä on jouduttu laskemaan ja silti yksiköillä on vaikeuksia saada haluamansa määrät riittävät opiskeluedellytykset omaavia opiskelijoita. Kauppatieteissä matemaattisten aineiden osuus tutkinnossa on jatkuvasti laskenut. Kärjistäen olenkin tästä asiantilasta eri yhteyksissä todennut, että kun 40 vuoden yliopistourani aikana olen ollut toteuttamassa neljää eri tutkinnonuudistusta, niin jokaisessa uudistuksessa matematiikan osuus on puolittunut. Matematiikan yliopisto-opintojen määrän puoliintumisaika kauppatieteissä on siten tutkinnonuudistusten väli eli n. 10 vuotta. Asioiden osaamattomuus tulee useimmiten vastaan pro gradu -vaiheessa, kun empiirisen aineiston analysointiin tarvittavien yksinkertaistenkin työkalujen käyttötaito puuttuu. Yhteiskuntatieteissä ja humanistisella alalla opetuskysyntää on esiintynyt vain tilastotieteen perusteiden osalta, aina ei niistäkään.

Eräitä ajatuksia matematiikan kouluopetuksen tehostamiseksi

Rakennutimme omakotitalomme Vaasan Melaniemeen 21 vuotta sitten. Rakennuttaminen tapahtui lähes kokonaan kokonaisurakointina, mutta joitakin työvaiheita toteutettiin erillisurakkoina. Yhden suurimmista näistä muodostivat pesu- ja saniteettitilojen laatoitustyöt. Toimin laatoittajan apumiehenä, jolloin pääsin läheltä seuraamaan hänen ammattitaitoista ja kunnianhimoista työtään. Kehuessani laatoittajalle hänen työnsä jälkeä hän totesi, että on helppo päästä hyvään lopputulokseen, kun pohjatyöt on suoritettu kunnolla. Jos pohjatöissä (betonivaluissa, muurauksissa, levytyksissä) on virheitä tai puutteita, taitavakaan ammattimies ei saa viimeisessä työvaiheessa haluamaansa virheetöntä jälkeä aikaan. Sama pätee koulutuksessa. Kun arvioimme korkeakouluopiskelijoiden matemaattisia taitoja ja valmiuksia ja niissä esiintyviä puutteita, joudumme ulottamaan tarkastelun aina peruskoulun alaluokille asti.

Kansainvälisissä koulusaavutusvertailuissa (esim. Pisa-tutkimukset) on todettu, että suomalaislapset menestyvät peruskoulutasolla mm. juuri matematiikassa erinomaisesti. Yleinen viesti lukion matematiikan opettajilta kuitenkin on, että peruskoulunsa päättäneet oppilaat eivät ole valmiita lukion matemaattisten aineiden opintoihin. Missä siis mättää? Matematiikan pedagogiikkaa ja didaktiikkaa tuntevat ovat laajasti sitä mieltä, että Pisa-tutkimuksissa ei matematiikan osalta selvitetäkään varsinaista matematiikan osaamista, vaan yleistä päättely- ja ongelmanratkaisutaitoa. Tärkeitä asioita tietysti nämäkin, mutta ne eivät mittaa riittävästi ja pätevästi matemaattisen ajattelutavan ja matematiikan työkalujen hallintaa.

Suomalaisessa peruskoulussa on alaluokilla (luokat 1–6) yleisesti käytössä luokanopettajajärjestelmä. Tällä järjestelmällä on pedagogisesti ja kasvatuksellisesti omat hyvät puolensa. Aineenopettajajärjestelmä on kuitenkin käytössä ala-asteen viimeisinä vuosina mm. kielissä sekä eräissä kädentaito-aineissa. Matematiikka poikkeaa kielten tapaan yleisistä humanistis-yhteiskuntatieteellisistä aineista siinä määrin, että myös siinä tulisi siirtyä aineenopettajajärjestelmään. Luokanopettajiksi valmistuvien ainevalinnat sekä koulussa että myöhemmin opettajankoulutuksessa kun ovat nykyisin niin selvästi matemaattisia aineita karttavia. Matematiikan opetus jää helposti kokoelmaksi muistisääntöjä ja temppuja ("murtoluvulla jaettaessa viedään jakaja ensin viivan alta viivan päälle ja sitten käännetään ympäri") ilman, että syvempi ajattelu seuraa mukana. Prosenttilaskun yhteydessä koettu, ylioppilaskirjoituksiin asti ulottuva suunnaton vaikeus on hyvä esimerkki tästä yksityiskohtien muistamiseen perustuvasta opettamis- ja oppimistavasta.

Peruskoulun luokkien 7–9 matematiikan opetus kaikille yhteisesti ja samanlaisena ei luo kelvollisia oppimisedellytyksiä sen paremmin matematiikan opinnoista kiinnostuneille kuin niihin vähemmän motivoidusti tai jopa suorastaan torjuvasti suhtautuvillekaan. Käytössä olevalla "keskimääräisen oppilaan oppimisedellytysten" mukaisella järjestelmällä motivoituneet ja lahjakkaat turhautuvat tekemisen puutteessa (poikkeuksena tilanteet, joissa opettaja jaksaa ohjata ja kannustaa heitä ylimääräisiin suorituksiin; omien poikieni kohdalla onneksi oli näin), toinen ääripää on silti koko ajan "pihalla" opetettavasta asiasta. Järjestelmä on johtanut siihen, että aiemmin keskikoulun kurssiin ja peruskoulun alkuaikoina laajimpiin tasokursseihin sisältynyttä ainesta on siirtynyt vasta lukiossa opetettavaksi. Lisäksi aineksen hallinta on siinä määrin puutteellista, että lukion ensimmäinen kurssi joudutaan opettajien mukaan pitämään pääosin peruskoulun oppimäärää kertaavana, kun sen oppimistavoitteiden mukaisesti tulisi olla jo etenevää. Paras tulos saavutettaisiin, jos opetus peruskoulun ylimmillä luokilla eriytettäisiin lukion tapaan, sekä sisällöllisesti että määrällisesti. Tarjolla olisi kaksi rinnakkaista oppiainetta: "matematiikka", jonka valitsisivat mm. lukioon aikovat ja myöhemmin tekniikan, lääketieteen ja taloustieteiden opintoihin tähtäävät oppilaat, sekä "laskento", enemmän käytännönläheistä arkipäivän laskemista sisältävä matematiikan oppimäärä.

Lukio-opetuksesta löytyy sekä sisällöllisiä että rakenteellisia kehittämismahdollisuuksia. Peruskoulussa toteutettavat edellä kerrotun kaltaiset kehitystoimet toisivat oppilaat entistä valmiimpina lukio-opintoihin. Opetettavaa ainesta olisi myös syytä karsia. Parin kolmen viime vuosikymmenen aikana lukio-opintoihin on tullut ainesta, jonka opiskelija aiemmin kohtasi vasta yliopisto-opinnoissa. Sisällön laventaminen on tapahtunut kohtalokkaalla tavalla syventymisen kustannuksella. Lukuteorian, numeerisen analyysin tai kaaosteorian alkeille ei ole suurelle osalle pitkän matematiikan lukijoista jatko-opinnoissa juurikaan hyötyä, ja nekin, jotka niitä myöhemmin tarvitsevat, saisivat paremmat edellytykset opintoihinsa, mikäli tietyt perusasiat olisivat kunnolla hallussa. Leimaa antavaa lukion käyneiden taidolle onkin nykyisin, että (ainakin periaatteessa) opetetut asiat ja todella opitut asiat voivat olla varsin kaukana toisistaan. Eri aloille suuntautuvien matematiikan soveltamismahdollisuuksien esitteleminen sen sijaan on syytä panna myönteisenä kehityspiirteenä merkille.

Haluan tässä yhteydessä tuoda ajatusteni tueksi esiin ne edellä tarkastelemiini ongelmiin liittyvät ajatukset, jotka Mäntän lukion matematiikan lehtori **Markku Halmetoja** toi esiin kirjoituksessaan Helsingin Sanomissa 3.2.2008. Halmetoja kirjoitti:

"Pisa-tutkimukset osoittavat suomalaisnuorten olevan maailman parhaita arkipäivän matematiikassa. Kuitenkin heitä joudutaan päästämään pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa läpi jopa kuudella (6/60) pisteellä, teekkareina heille on järjestettävä matematiikan tukiopetusta ja ammattikorkeakoulujen insinööriopiskelijoina osa heistä ei ymmärrä edes peruslaskutoimituksia. Miksi näin?"

Ja Halmetojan vastaus pähkinänkuoressa:

"Asiat, joiden opiskeluun oppikouluun valitut saivat käyttää 5,5 vuotta, on ahdettu lukion pitkän matematiikan 2,5 vuoteen. Lisäksi pitkän matematiikan valinneiden on opiskeltava todennäköisyyslaskennan, vektoriopin, numeerisen analyysin, lukuteorian ja logiikan alkeet. Lahjakkaat ja asiaa harrastavat selviävät, tavalliset opiskelijat eivät."

Ylioppilaskirjoitusten viimeisimmästä rakenteellisesta uudistuksesta voin olla pelkästään iloinen, vaikka lopullisia johtopäätöksiä uudistusten vaikutuksesta onkin vielä ennenaikaista tehdä. Siirtyminen neljän pakollisen kokeen järjestelmästä mahdollisuuteen valita viidestä kokeesta neljä (joista yksi äidinkieli) on tuonut matematiikan pitkän oppimäärän valinneet entistä tasa-arvoisempaan asemaan muiden opiskelijoiden kanssa. Ainereaaliin siirtyminen puolestaan voi merkitä fysiikan ja kemian suosion kasvua lukio-opiskelijoiden keskuudessa. Fysiikan ja kemian vähäinen suosio lukio-opinnoissa on ollut itse asiassa vakavampi ongelma kuin edellä kuvatut matematiikkaan liittyvät vaikeudet. Fysiikka oikein esitettynä luo esimerkiksi erinomaiset edellytykset mallintamisen havainnollistamiselle ja ymmärtämiselle. Mitä vielä olisi syytä toivoa näiden aineiden opetukseen liittyen, on, että demonstraatiot ja omakohtaiset oppilastyöt palautettaisiin osaksi opetusta luonnontieteiden kokeellisen luonteen paremmaksi esittelemiseksi.

Lopuksi on vielä syytä lyhyesti kosketella ylioppilaskirjoituksissa noudatettavaan suhteelliseen arvosteluun liittyvää problematiikkaa erityisesti siltä osin kuin se koskettaa pitkän matematiikan valinneita opiskelijoita. Suhteellista arvostelua kaavamaisesti noudatettaessa matematiikan pitkän oppimäärän tehtäviin vastanneet joutuvat kärsimään. Arvostelussa ei oteta huomioon sitä, että kyseessä on lähtöedellytysten, kiinnostuksen ja motivaation perusteella muodostunut erityisryhmä, jonka matematiikan arvosanajakauman tulisi olla koko perusjoukon arvosanajakaumaa parempi, kun se nykyisellään voi olla jopa sitä huonompi. Sama vaatimus pätee luonnollisesti ylimääräisen kielen kirjoittajien erityisryhmään, mutta heidän kohdallaan asia onkin järjestyksessä. Arvosanajakauma ylimääräisessä kielessä heijastaa heidän tässä yhteydessä edustamaansa koko perusjoukkoa korkeampaa tasoa.

Matemaattisten aineiden opettajien liiton MAOL:n *Dimensio*-lehdessä analysoitiin v. 1995 yksityiskohtaisesti kevään ylioppilaskirjoituksissa v. 1994 toteutuneita arvosanajakaumia. Pitkän matematiikan lukiossa valinneiden (ja sen siis pakollisena aineena ylioppilaskirjoituksissa kirjoittaneiden) arvosanajakauma matematiikassa oli samaa tasoa kuin koko kirjoittajajoukon toisen kotimaisen kielen ja ensimmäisen vieraan kielen arvosanajakaumat, mutta jossain määrin heikompi kuin koko kirjoittajajoukon reaalikokeen jakauma ja selvästi heikompi kuin ylimääräisen kielen kirjoittaneiden arvosanajakauma.

Kun sitten verrattiin reaalikokeen pakollisena kirjoittaneiden ja sen ylimääräisenä kirjoittaneiden (jälkimmäisillä siis pitkä matematiikka pakollisena) arvosanajakaumia toisiinsa, huomattiin, että jälkimmäinen jakauma oli edellistä ratkaisevasti parempi. Asiaa ei selitä riittävästi se, että pitkän matematiikan kirjoittajat ovat yleensä keskittyneet reaalikokeen vastauksissaan fysiikkaan ja kemiaan, sillä tarkemmassa analyysissa kävi ilmi, että ylimääräisenä reaalikokeen kirjoittaneiden arvosanajakaumat olivat jokaisessa yksittäisessä aineessa (fysiikan ja kemian lisäksi biologiassa, historiassa ja psykologiassa) vertailuryhmänsä jakaumia paremmat. Ylimääräisen reaalikokeen kirjoittaneiden arvosanajakauma oli lähellä huippua edustavaa ylimääräisen kielen kirjoittaneiden jakaumaa. Ei voi olla tasapuolista, että reaalikokeen tuloksilla mitattuna ylioppilaskirjoitusten parasta tasoa edustaneet pitkän matematiikan lukijat menestyivät "omassa leipälajissaan" korkeintaan yleisen keskimääräisen tason mukaisesti.

Edellä tarkastelemani ylioppilaskirjoitusten tulokset ovat toki yli vuosikymmenen takaisia. Niitä voidaan kuitenkin pitää tyypillisinä ennen 2000-luvun uudistuksia. On mahdollista ja ainakin toivottavaa, että uudistusten jälkeen kehitys on johtanut kohti tasapainoisempaa tilannetta. Olen esittänyt eräitä edellä viittattuja arvosanajakaumia jäähyväisluentoni tueksi laatimissani luentokalvoissa http://www.uwasa.fi/~itv/publicat/lopuksi.ppt.