# Talousmatematiikan perusteet

## Mallintamisesta, esimerkkinä varastomallit

Professori Ilkka Virtanen

# Sisällysluettelo

**Varastomallit esimerkkinä mallintamisesta**

# Sisällysluettelo, jatkuu

3. Perusmalli tapauksessa, kun puute sallitaan (kahden muuttujan optimointiteht.)
4. Perusmalli tapauksessa, kun täydennysnopeus on äärellinen (tuotantomalli)
5. EOQ -malli ja määräalennukset (epäjatkuva tavoitefunktio)
6. Perusmalli kahden hyödykkeen ja rajoitetun varastotilan tapauksessa (Lagrangen kerroin -menetelmä)

# Sisällysluettelo, jatkuu

7. Ratkaisun optiminjälkeinen herkkyys-analyysi
   7.1. Herkkyysanalyysin yleinen kysymyksenasettelu
   7.2 . EOQ -mallin herkkyysanalyysi

# Varastomallien peruskäsitteitä

- ✓ Kysyntä. Tuotteen kysyntä voi olla
  - – deterministinen so. etukäteen tunnettu
    - tasainen tai monotonisesti muuttuva (staattinen)
    - dynaaminen (esim. kausivaihtelu)
  - – stokastinen eli satunnaisuutta sisältävä
- ✓ Varaston täydentämisnopeus voi olla
  - – ääretön (kertasuoritus esim. ulkopuolisena toimituksena)
  - – äärellinen (täydennys esim. tuotannosta)

# Varastomallien peruskäsitteitä

- ✓ Tilausväli on kahden peräkkäisen tilaus-hetken väli. Perusteena
  - varaston taso (hälytysraja)
  - tarkkailu (jatkuva tai jaksollinen)
  - kiinteä väli
- ✓ Toimitusaika,viive tilauksen ja täydennys-erän toimituksen välillä
- ✓ Suunnittelukausi, aika jolle laskelmat tehdään

# Varastomallien peruskäsitteitä

- ✓ Varastoitavien lajikkeiden määrä; merkitystä, jos lajikkeilla keskinäistä riippuvuutta tai tilarajoituksia
- ✓ Varastokapasiteetti; merkitystä, jos varastotila rajoite
- ✓ Täydennyserän koko, tilattava tuotanto- tai toimituserä
- ✓ Ostohinta, mikäli on määräalennuksia

# Varastomallien peruskäsitteitä

- ✓ <u>Myyntihinta</u>, mikäli on tukku- tai muita alennuksia
- ✓ <u>Varaston ylläpitokustannus</u> sisältää pää-oma-, varastointi- ja käsittelykustannukset, pilaantumisen ja hävikin, verot ja vakuutukset ym.
- ✓ <u>Tilauskustannukset</u>, tilauksen teosta tai tuotannon aloittamisesta aiheutuva kiinteä kertakustannus

# Varastomallien peruskäsitteitä

- ✓ Puutekustannus syntyy, kun kysyntää ei pystytä tyydyttämään
  - – menetetty myynti tai ylimääräiset hankinta-kustannukset
  - – maineen menetys
  - – seisokki- tai ylityökustannukset

# Mallinnettava päätösongelma

## Tehtäviä päätöksiä ovat mm.

- kuinka usein tilataan (tilausväli)?
- kuinka paljon tilataan kerralla (eräkoko)?
- milloin tilataan (tilaushetki)?

# Perusmallin olettamukset

- ✓ Perusmallina ns. Economic Order Quantity (EOQ) -malli v. 1915 (F.W. Harris), tunnettu myös neliöjuurikaavana.
- ✓ Mallin olettamukset (vrt. peruskäsitteet):
  - – Pelkistykset ja rajaukset
    - täydennykset kertasuorituksena (täydennysnop. = ∞)
    - toimitusaika vakio (voidaan olettaa = 0, vrt. ennakointi)
    - pitkä suunnittelukausi (toistuvat tilaukset)
    - yksi varastoitava tuote

# Perusmallin olettamukset

- ei tilarajoituksia
- osto- ja myyntihinnat vakioita (ei paljous- ym. alennuksia)
- puutetta ei sallita

✓ Mallin parametrit

– kysyntä $D$ on tunnettu ja vakio, $[D]$ = kpl/v
– varaston ylläpitokustannus $h$ on vakio, $[h]$ = mk/kpl*v
– tilauskustannus $K$ on vakio ja tilausmäärästä riippumaton, $[K]$ = mk/erä

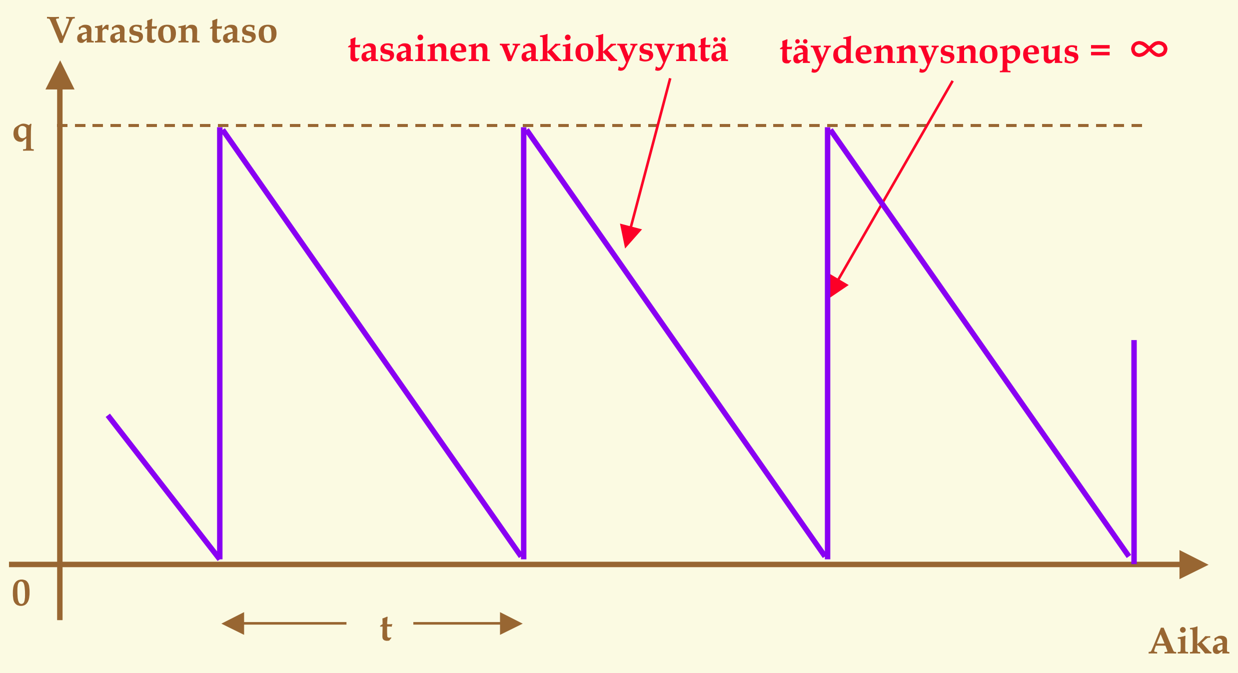
# Perusmallin olettamukset

✓ Mallin (päätös)muuttujat
  – tilauserän koko $q$ on vakio, $[q]$ = kpl
  – tilausväli $t$, määräytyy kysynnän ja eräkoon perusteella (ts. vaihtoehtoinen riippumaton päätösmuuttuja $q$:lle), $[t]$ = v

✓ Mallin tavoitefunktio
  – etsittävä sellainen tilauserän koko $q$ (tilausväli $t$), jolla suunnittelukauden (tai aikayksikössä synty-vät) varastoinnin kokonaiskustannukset (tilaus-kust. + varaston ylläpitokust.) minimoituvat

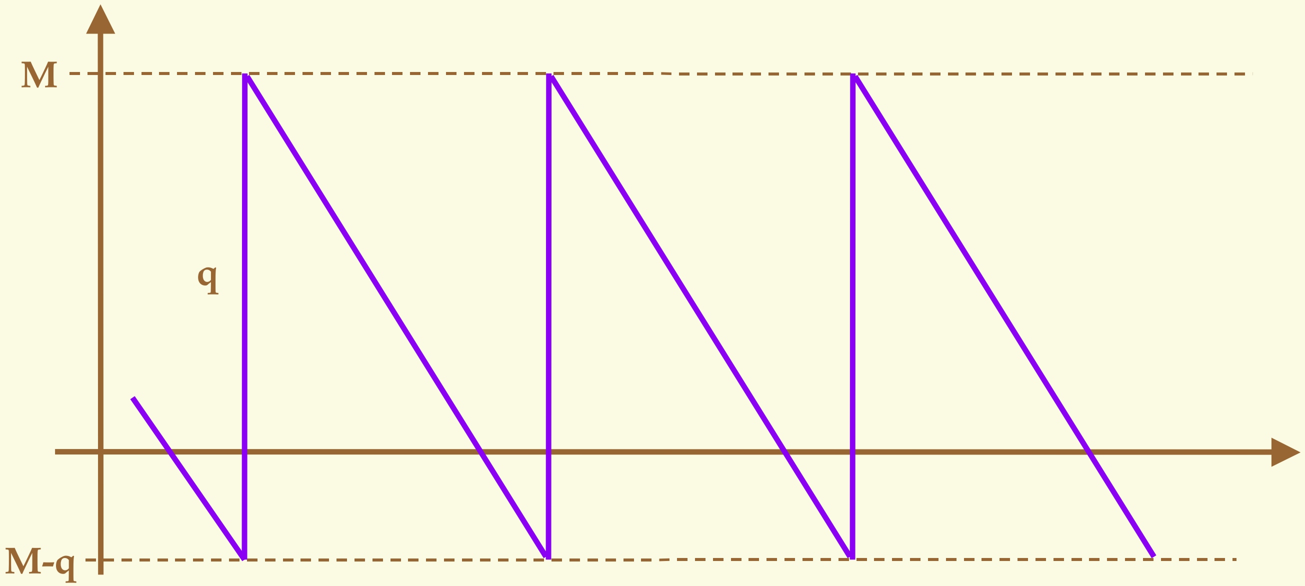
# EOQ - malli, graafinen esitys

Olettamukset johtavat malliin, jossa varaston taso kehittyy ajan funktiona seuraavasti:



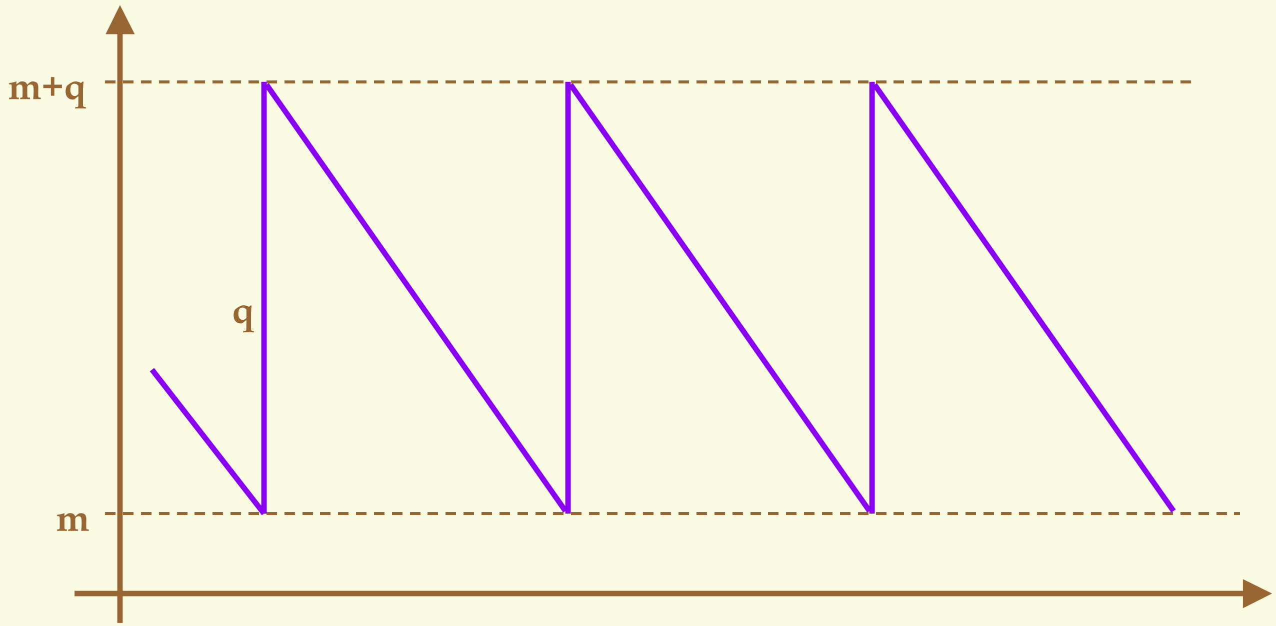
# Miksi seuraavat vaihtoehdot eivät tule kysymykseen ?

Vaihtoehto 1:



# Miksi seuraavat vaihtoehdot eivät tule kysymykseen ?

Vaihtoehto 2:



# EOQ - mallin formulointi

Määritetään kustannukset per aikayks. (mk/v):

Tilauskustannukset

- tilauksia per aikayksikkö: $D/q$

  $[D/q] = (\text{kpl/ v})/\ (\text{kpl/erä}) = \text{erää/v}$

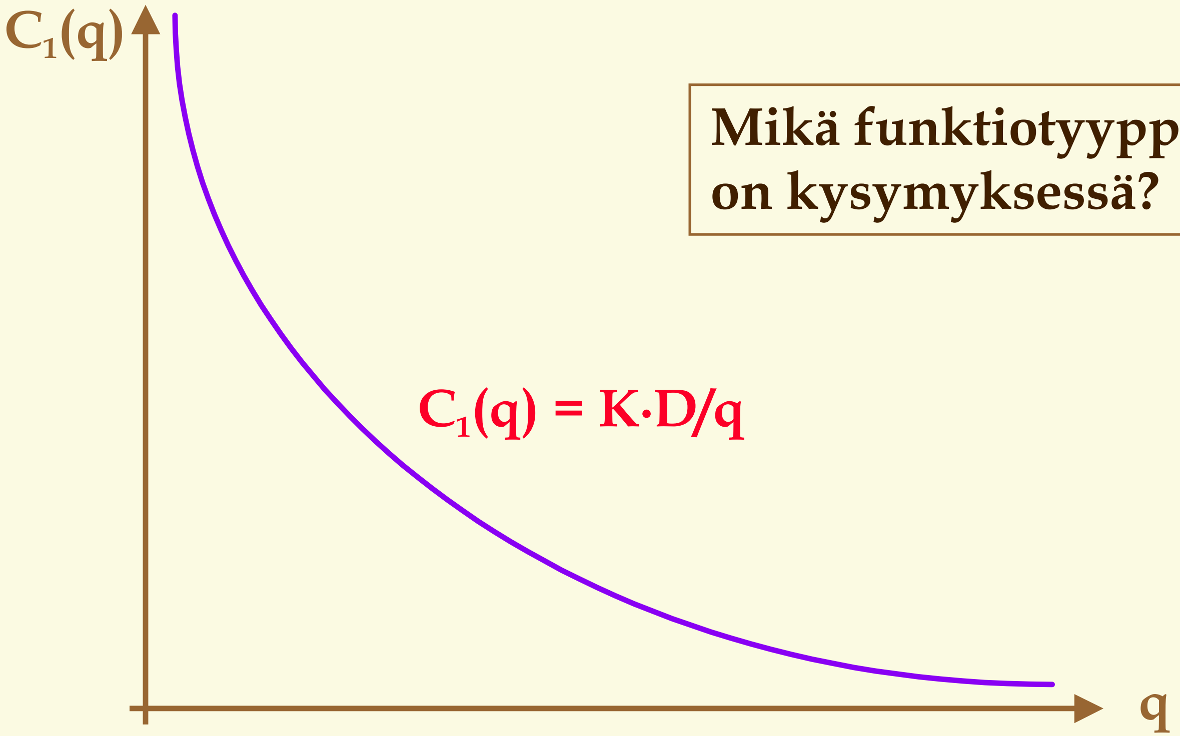
- tilauskustannukset aikayksikössä

  $$C_1(q) = K \cdot (D/q)$$

  $[K \cdot (D/\ q)] = (\text{mk/ erä})(\text{erää/ v}) = \text{mk/v}$

# EOQ - mallin formulointi

Tilauskustannusten riippuvuus eräkoosta graafisesti:

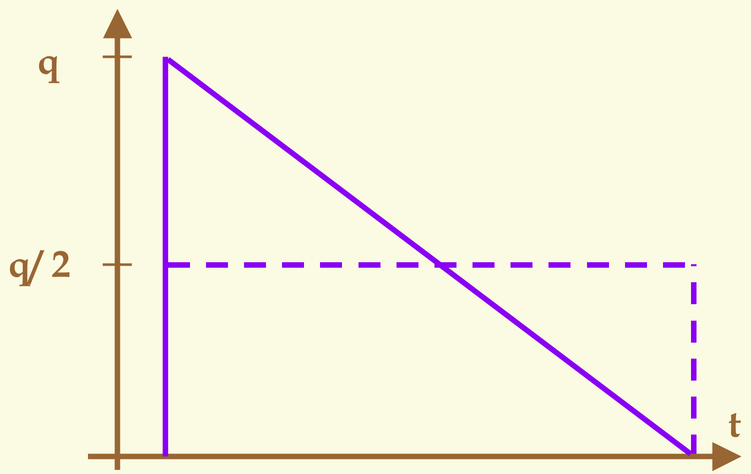


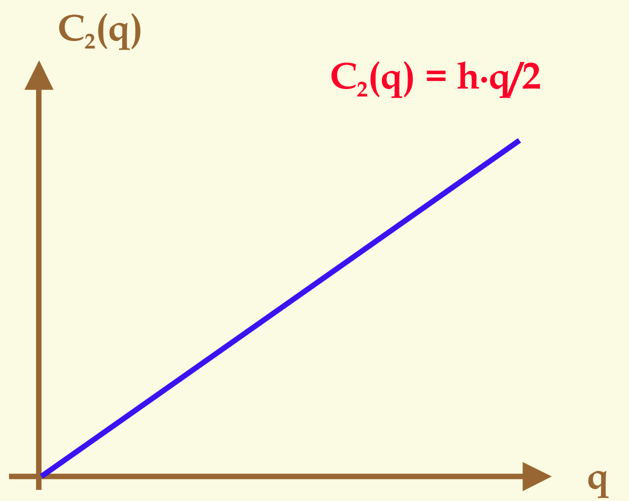

**Mikä funktiotyyppi on kysymyksessä?**

# EOQ - mallin formulointi

Varaston ylläpitokustannukset

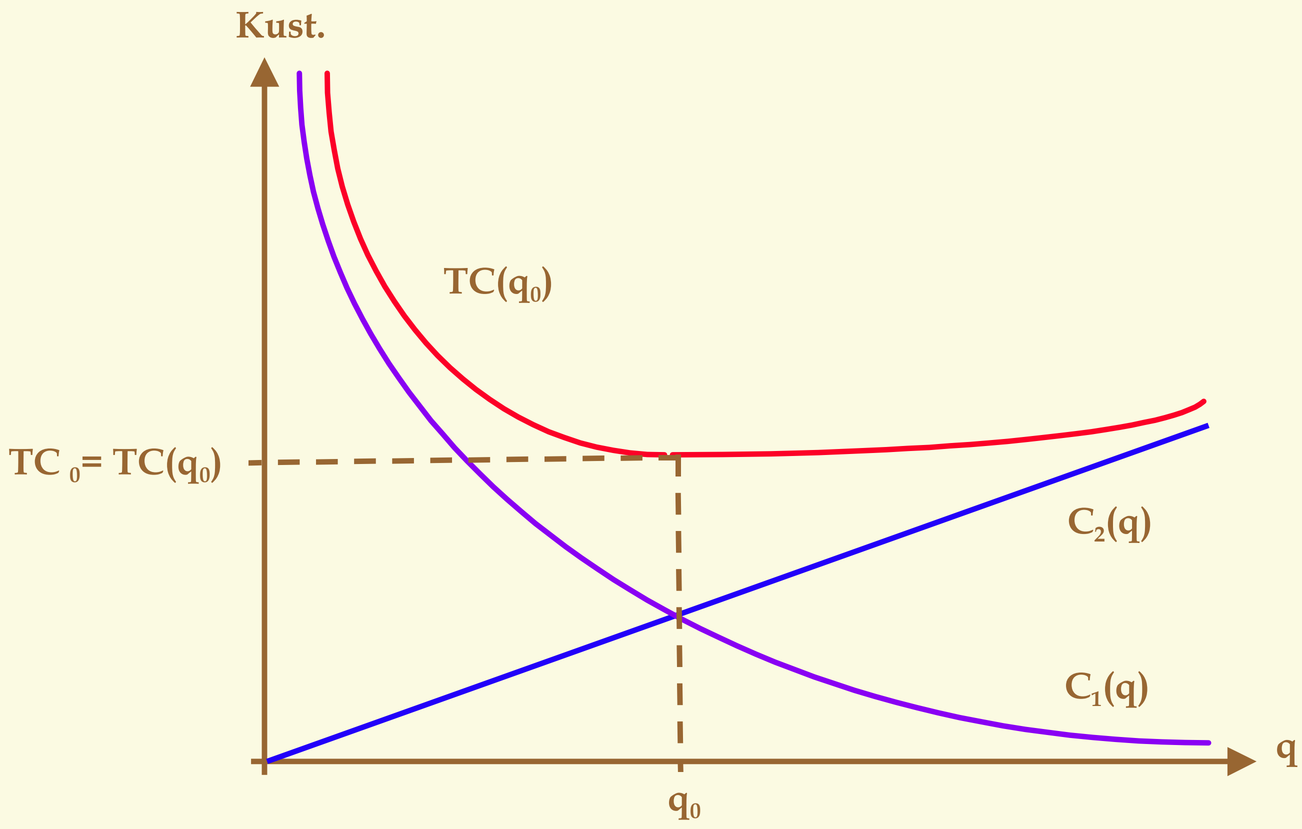
- keskimääräinen varasto = q/2
- kustannukset aikayksikössä = yksikkö-kustannukset · keskimääräinen varastotaso



# Kokonaiskustannusfunktio

$$TC(q) = C_1(q) + C_2(q) = K \cdot D \cdot (1/q) + (h/2) \cdot q$$



# EOQ - mallin ratkaisu

Kokonaiskustannukset:

**$TC(q) = K \cdot D \cdot (1/q) + (h/2) \cdot q$**

Välttämätön ehto minimille:

**$d[TC(q)]/dq = -K \cdot D \cdot (1/q^2) + h/2 = 0$**

Tästä ratkaisemalla optimaalinen eräkoko:

EOQ:

$$\boxed{q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}}$$

(Ehdot optimille, mitkähän ne olivatkaan?)

# EOQ - mallin ratkaisun tarkastelua

Optimieräkoko:

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Optimaalinen tilausväli:

$$t_0 = \frac{q_0}{D} = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \cdot \frac{1}{D} = \sqrt{\frac{2K}{hD}}$$

# EOQ - mallin ratkaisun tarkastelua

Optimikustannukset (= minimikustannukset):

$$
\begin{aligned}
TC_0 &= TC(q_0) = C_1(q_0) + C_2(q_0) = KD \cdot \frac{1}{q_0} + \frac{h}{2} \cdot q_0 \\
&= KD\sqrt{\frac{h}{2KD}} + \frac{h}{2}\sqrt{\frac{2KD}{h}} \\
&= \sqrt{\frac{KDh}{2}} + \sqrt{\frac{KDh}{2}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{KDh}{2}} = \sqrt{2KDh}
\end{aligned}
$$

Huom.: $C_1(q_0) = C_2(q_0)$ (vrt. myös aiempi kuva!)

Lopputulos: $TC_0 = \sqrt{2KDh}$

# Optimieräkoko ja -kustannukset

Optimieräkoko: $$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Optimikustannukset:

$$TC_0 = \sqrt{2KDh}$$

$$TC_0 = \sqrt{2KDh} = h\sqrt{\frac{2KD}{h}} = h \cdot q_0;$$

$$TC_0 = \sqrt{2KDh} = \frac{2KD}{\sqrt{\frac{2KD}{h}}} = \frac{2KD}{q_0} = 2KD \cdot \frac{1}{q_0}$$

# Esimerkki 1.

Tarkastellaan varastonpitoa, jossa

- kysyntä D = 18 000 kpl/v
- tilauskustannukset K = 2000 mk/erä
- varaston ylläpitokustannukset h = 6 mk/kpl·v

Saadaan seuraavat varastojärjestelmään liittyvät tunnusluvut:

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000\, mk \cdot 18000\, kpl / v}{6\, mk / kpl \cdot v}} = \sqrt{12 \cdot 10^6\ (kpl)^2} = 3464\, kpl$$

$$TC_0 = hq_0 = 6\,(mk / kpl \cdot v)\, 3464\, kpl = 20784\, mk / v$$

# Esimerkki 1.

Tilauksia (ja varaston täydennyksiä):

$$N_0 = \frac{D}{q_0} = \frac{18000\, kpl / v}{3464\, kpl} = 5.2 / v$$

Tilausväli:

$$t_0 = \frac{q_0}{D} = \frac{1}{N_0} = (5.2 / v)^{-1} = 0.192\, v \approx 69\ \textit{päivää}$$

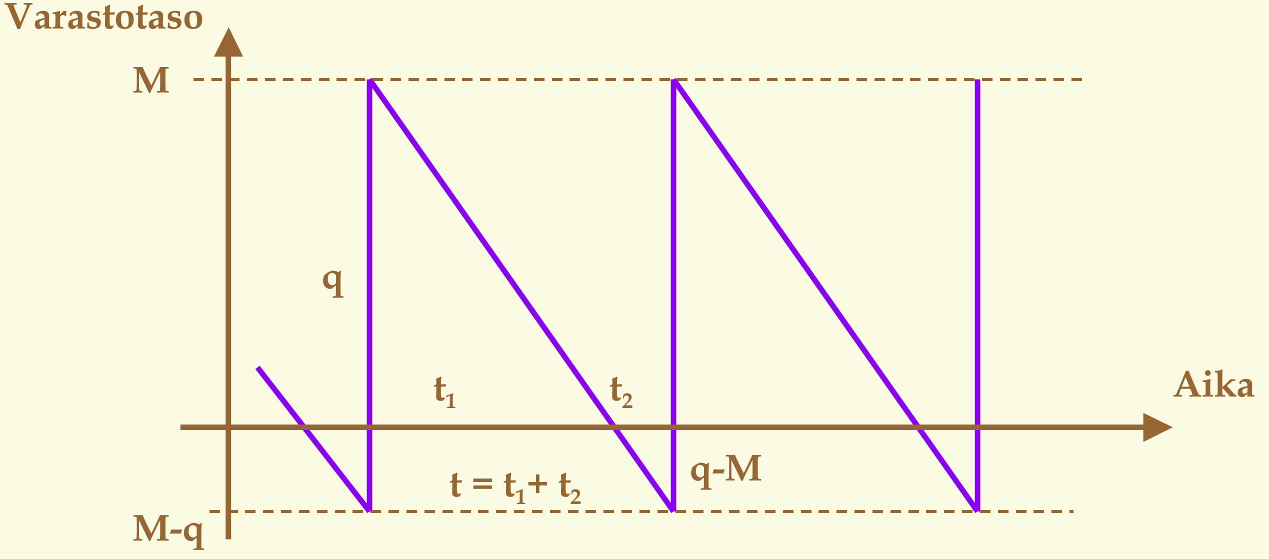
Varastonpidon kustannukset myytyä tuoteyksikköä kohti:

$$UC_0 = \frac{TC_0}{D} = \frac{20784\, mk / v}{18000\, mk/kpl} = 1.15\, mk / kpl$$

# EOQ-malli puutekustannuksin

Olettamukset kuten perusmallissa paitsi että puute sallitaan.

- s = puutekustannus, [s] = mk/kpl·v
- M = varaston maksimitaso, jolloin q-M = maksimipuute




$t = q / D$, $t_1 = M / D$, $t_2 = (q\text{-}M) / D$

# EOQ-malli puutekustannuksin

Varaston keskikoko :

$$\frac{M}{2}\cdot\frac{t_1}{t}+0\cdot\frac{t_2}{t}=\frac{M}{2}\cdot\frac{t_1}{t}=\frac{M}{2}\frac{M/D}{q/D}=\frac{M^2}{2q}$$

Keskimääräinen puute:

$$0\cdot\frac{t_1}{t}+\frac{(q-M)}{2}\cdot\frac{t_2}{t}=\frac{q-M}{2}\cdot\frac{t_2}{t}=\frac{q-M}{2}\frac{(q-M)/D}{q/D}=\frac{(q-M)^2}{2q}$$

Kokonaiskustannukset aikayksikössä:

$$TC(q,M)=\frac{KD}{q}+\frac{M^2h}{2q}+\frac{(q-M)^2s}{2q}$$

tilaus varasto puute

# EOQ-malli puutekustannuksin

Päätösmuuttujia tarvitaan tässä uudessa, puutteen sallivassa mallissa kaksi. Edellä näiksi muuttujiksi on valittu tilausmäärä $q$ ja taso, jolle varasto täydennyksen jälkeen nousee ($M$). Nämä yhdessä määräävät mm. maksimipuutteen $q - M$ ja tilausvälin $t$ (sekä tämän osat $t_1$ ja $t_2$). Muitakin valintoja päätösmuuttujiksi olisi voitu tehdä (esimerkiksi minkälaisia?).

Puutteen ja puutekustannusten tuominen malliin muuttavat mallia tarvittavan matematiikan osalta ratkaisevasti. Yhden muuttujan (päätös)funktiosta on siirrytty usean muuttujan funktioon. Esimerkiksi minimikustannukset antavan ääriarvokohdan löytämiseksi on turvauduttava päätösmuuttujien suhteen laskettuihin osittaisderivaattoihin.

# Puutemallin ratkaisu

Ehto optimiratkaisulle (ääriarvokohdassa osittaisderivaatat = 0):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial TC}{\partial q} = \dfrac{-2KD + sq^2 - (s+h)M^2}{2q^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial TC}{\partial M} = \dfrac{(h+s)M - qs}{q} = 0 \end{cases}$$

# Puutemallin ratkaisu

Yhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan (totea itse laskemalla):

$$q_1 = \sqrt{\frac{2KD(h+s)}{hs}} = \sqrt{\frac{2KD}{h}}\sqrt{\frac{h+s}{s}} = q_0\sqrt{\frac{h+s}{s}},$$

missä $q_0$ on perusmallin optimieräkoko. Tilauserän koko siis kasvaa perusmalliin verrattuna.

$$M_1 = \sqrt{\frac{2KDs}{h(h+s)}} = \sqrt{\frac{2KD}{h}}\sqrt{\frac{s}{h+s}} = q_0\sqrt{\frac{s}{h+s}}.$$

Maksimivarasto taas pienenee perusmalliin verrattuna ($q_0$ on paitsi eräkoko myös maksimivarasto EOQ:ssa).

# Puutemallin ratkaisu

Puutemallin tarkastelu, kun s → ∞ :

$$\lim_{s\to\infty} q_1 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \cdot \lim_{s\to\infty}\sqrt{\frac{h+s}{s}} = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = q_0,$$

$$\lim_{s\to\infty} M_1 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \cdot \lim_{s\to\infty}\sqrt{\frac{s}{h+s}} = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = q_0 .$$

Malli antaa siis erikoistapauksena EOQ-mallin, kun asetetaan s = ∞. Yleisestikin: mikäli mallin yleistys on tapahtunut oikein, pelkistetty malli saadaan yleisen erikoistapauksena.

# Esimerkki 2.

- ✓ Tarkastellaan varastonpitoa, jossa
  - kysyntä D = 18 000 kpl/v
  - tilauskustannukset K = 2000 mk/erä
  - varaston ylläpitokustannukset h = 6 mk/kpl·v
  - puutekustannukset s = 25 mk/kpl·v
- ✓ Saadaan mm. seuraavat varastojärjestelmään liittyvät tunnusluvut:

$$q_1 = q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}} = 3464\sqrt{\frac{6+25}{25}}\ kpl = 3857\ kpl$$

# Esimerkki 2.

$$M_1 = q_0\sqrt{\frac{s}{h+s}} = 3464\sqrt{\frac{25}{6+25}}\ kpl = 3110\ kpl$$

$$TC_1 = \frac{2000 \cdot 18000}{3857} + \frac{3110^2 \cdot 6}{2 \cdot 3857} + \frac{747^2 \cdot 25}{2 \cdot 3857} = 18665\ mk / v$$

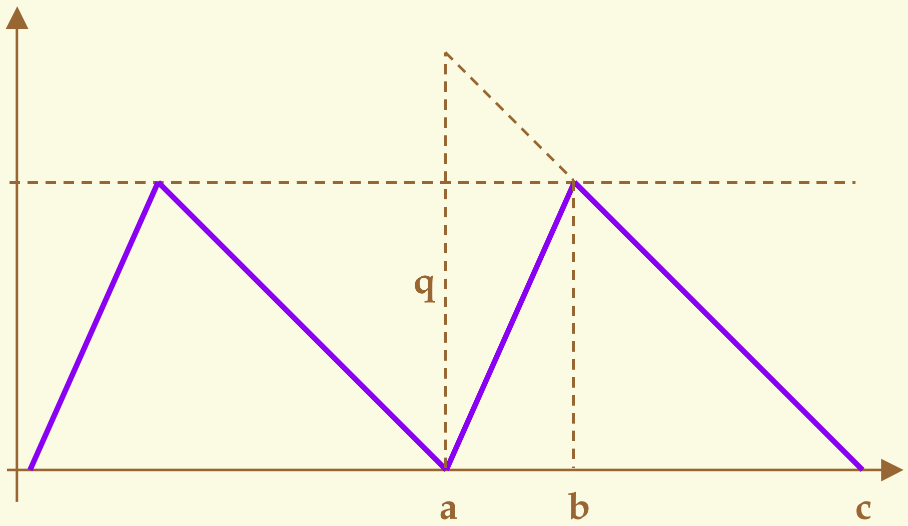
Esimerkissä puutekustannukset ovat suuremmat kuin varaston ylläpitokustannukset (25 mk/kpl·v vs. 6 mk/kpl·v). Kuitenkin varastonpidon kokonaiskustannukset alenevat (18665 mk/v vs. 20784 mk/v).

## Miksiköhän näin?

# Tuotantomalli

## (EOQ-malli & äärellinen täydennysnopeus)

Muut olettamukset kuten EOQ-mallissa paitsi lisänä äärellinen täydennysnopeus $r$, $[r]$ = kpl/v.



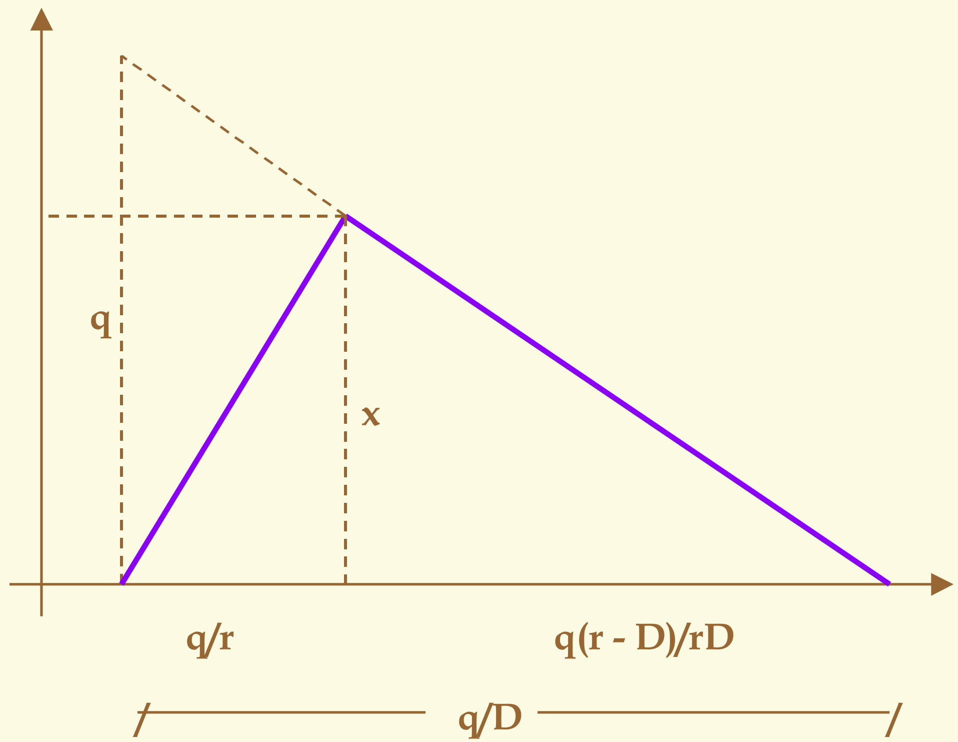

Varasto täyttyy aikana (a,b) vauhdilla $r - D$, $(r > D)$

Aikana (b,c) varasto tyhjenee vauhdilla $D$

Tuotanto kestää ajan $b - a = q/r$

Tilausväli on $q/D$, joten tyhjenemisvaiheen pituus on $c - b = q/D - q/r = q(r - D)/Dr$

# Tuotantomallin johtaminen




$$\frac{q}{x} = \frac{q/D}{\frac{q(r-D)}{rD}}$$

Varaston maksimikoko on (q/r)· (r - D) = q(r - D)/r ja varaston keskikoko siten q(r - D)/2r. Varaston vuotuinen ylläpitokustannus on näin hq(r -D)/2r

# Tuotantomallin ratkaisu

Varastonpidon kokonaiskustannukset tuotantomallissa ovat siten:

$$TC(q) = \frac{KD}{q} + \frac{hq(r-D)}{2r}.$$

Kustannukset saavuttavat minimiarvonsa (totea laskemalla!), kun

$$q_2 = \sqrt{\frac{2KDr}{h(r-D)}} = q_0\sqrt{\frac{r}{r-D}} > q_0$$

$$M_2 = \frac{q_2}{r}(r-D) = \sqrt{\frac{2KD(r-D)}{hr}} = q_0\sqrt{\frac{r-D}{r}} < q_0.$$

# Tuotantomallin ratkaisu

Analyysiä:

1) Eräkoko kasvaa (ts. $q_2 > q_0$), sillä $q_2$:n neliöjuurilauseke > 1

2) Varaston tilatarve (varastotason maksimiarvo) pienenee, sillä neliöjuurilauseke $M_2$:ssa < 1

3) Minimikustannuksiksi saadaan (totea itse laskemalla, so. sijoittamalla $q_2$:n lauseke TC(q):n lausekkeeseen):

$$TC_2 = TC(q_2) = \sqrt{\frac{2KDh(r-D)}{r}} = TC_0\sqrt{\frac{r-D}{r}} < TC_0$$

4) EOQ-malli on tuotantomallin erikoistapaus (tuotantovauhti $r = \infty$):

$$\lim_{r\to\infty} q_2 = q_0 \lim_{r\to\infty}\sqrt{\frac{r}{r-D}} = q_0 .$$

# Esimerkki 3

Olkoon

- Kysyntä 18000 kpl/v
- Tuotantonopeus 36000 kpl/v
- Tilauskustannukset 2000 mk/erä
- Varaston ylläpitokustannukset 6 mk/kpl·v

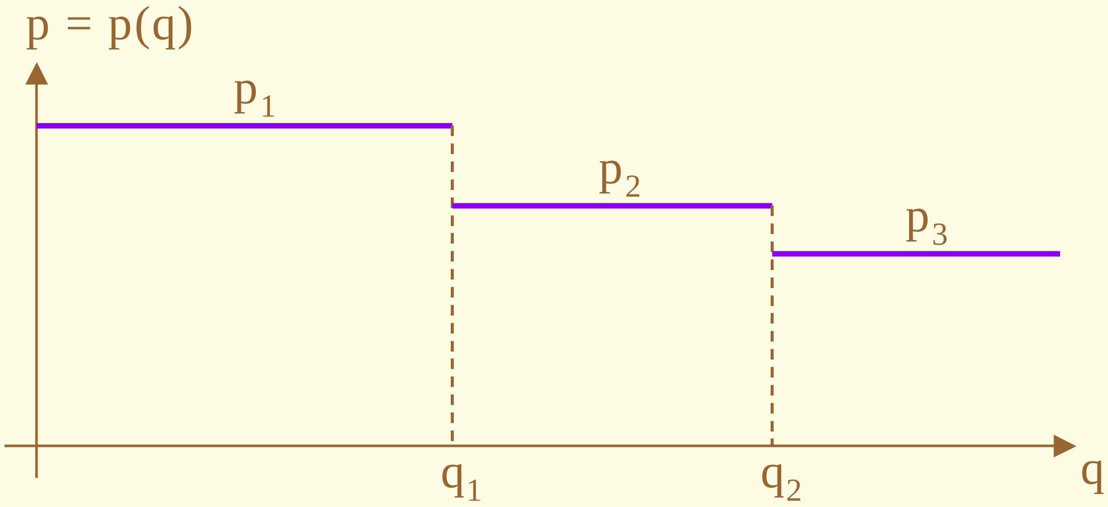
$$q_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000 \cdot 18000 \cdot 36000}{6 \cdot 18000}}\ kpl = 4900\ kpl \qquad (q_0 = 3464 \text{ kpl})$$

$$M_2 = \frac{q_2(r - D)}{r} = 2450\ kpl \qquad (M_0 = 3464 \text{ kpl})$$

$$TC_2 = 14697\ mk/v \qquad (TC_0 = 20784 \text{ mk/v})$$

# EOQ-malli paljousalennuksin

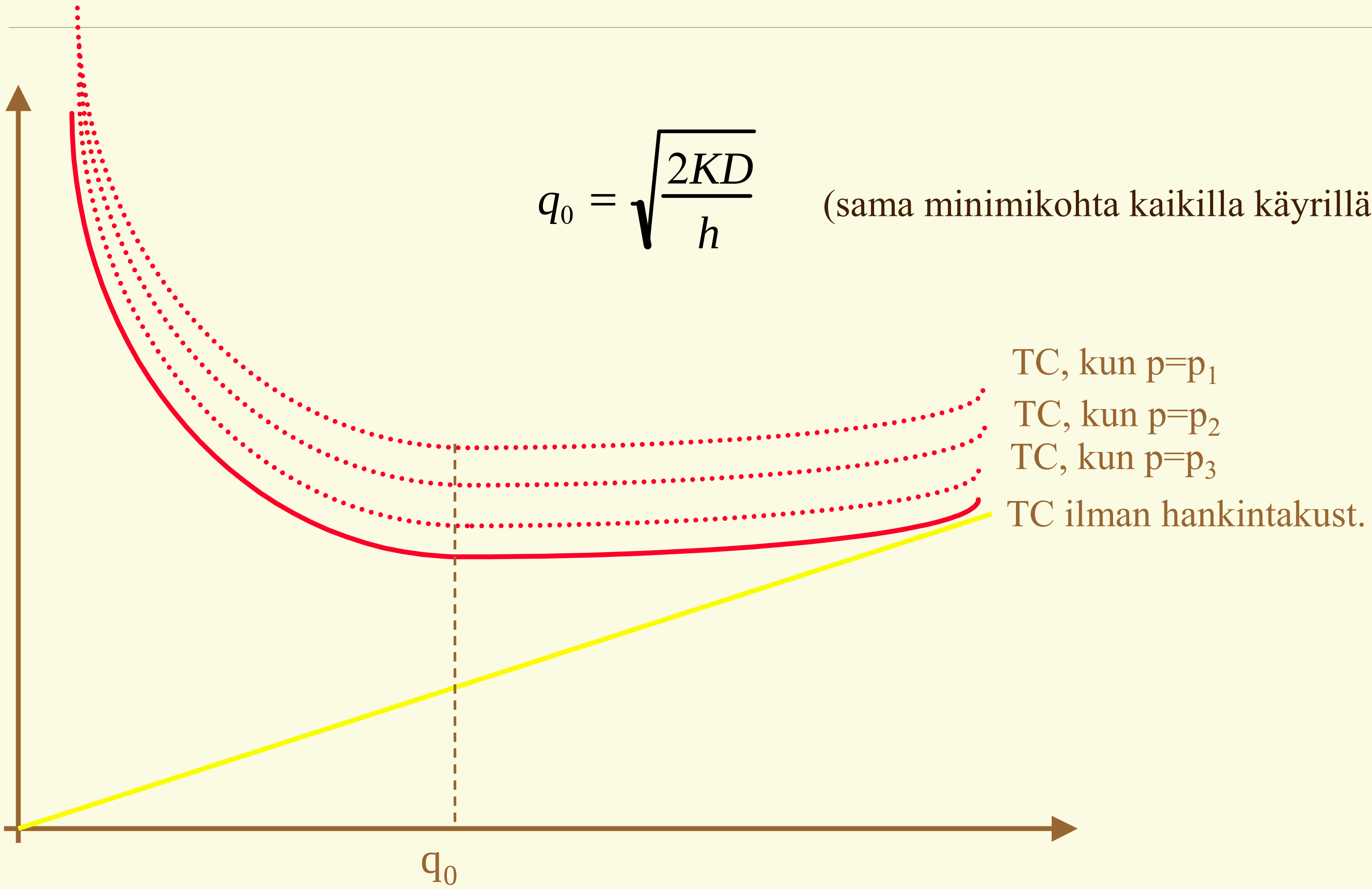
Olettamukset kuten perusmallissa, mutta ostohinta varastoon on eräkoosta riippuva, ts. p = p(q). Oletetaan porrasfunktio:




$$TC(q) = \frac{KD}{q} + \frac{hq}{2} + p(q) \cdot D$$ (tilaus- + varastointi- + hankintakust.)

# EOQ-malli paljousalennuksin

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$ (sama minimikohta kaikilla käyrillä!)



## Alennusrajojen $q_1$ ja $q_2$ sekä minimikohdan $q_0$ keskinäisestä sijainnista riippuen saadaan kokonaiskustannusten minimille erilaisia ratkaisuja:

– $q_0$ on optimi ja $q_0 > q_2$ ; optimaalinen varastointipolitiikka ja alennukset hyödynnetty täysimääräisesti ($p = p_3$)
– $q_0$ on optimi ja $q_2 > q_0 > q_1$ ; optimaalinen varastointipolitiikka ja alennukset hyödynnetty osittain ($p = p_2$)
– $q_0$ on optimi ja $q_0 < q_1$ ; optimaalinen varastointipolitiikka ja alennuksia ei voida hyödyntää (alennukset eivät riittävät suhteessa varastointikustannusten nousuun; $p = p_1$)
– $q_1$ on optimi ja $q_0 < q_1$ ; alennus $p_1$ -> $p_2$ kompensoi kohonneet varastointikustannukset (mutta alennus $p_2$ -> $p_3$ ei enää kompensoi)
– $q_2$ on optimi ja $q_2 > q_0$ ; alennusten täysimääräinen hyödyntäminen kompensoi kohonneet varastointikustannukset

Esitä kuhunkin tapaukseen liittyvä tilanne graafisesti!

Optimaalisen eräkoon määrittämiseksi saadaan näin algoritmi (yleisesti n:lle eri hinnalle $p_1$ ,..., $p_n$):

1. Määritetään $q_0 = (2KD/h)^{1/2}$
2. Lasketaan

$$TC_0 = TC(q_0) = (2KD/h)^{1/2} + p(q_0) \cdot D$$

$$TC_i = TC(q_i) = KD/q_i + hq_i /2 + p_{i+1} D \qquad (i = 1,2,...,n-1)$$

3. Optimaalinen q on se, jolla TC kohdassa 2 on pienin.

Algoritmiseen (so. numeeriseen) ratkaisuun joudutaan analyyttisen ratkaisun sijasta, koska minimoitava funktio on epäjatkuva.

# Kaksi tuotetta, rajoitettu varastotila (Lagrangen kertoja -menetelmä)

EOQ-mallin olettamukset muuten, paitsi

- varastoitavia tuotteita oletetaan olevan kaksi
- varastotila voi osoittautua optimipolitiikkaa rajoittavaksi tekijäksi

$D_1, D_2$ kysynnät, toisistaan riippumattomat

$K_1, K_2$ tilauskustannukset

$h_1, h_2$ ylläpitokustannukset

$b_1, b_2$ tilantarve tuoteyksikköä kohti

$B$ käytettävissä oleva varastotila

$q_1, q_2$ eräkoot (päätösmuuttujat)

# Lagrangen kertoja -menetelmä

Malli kokonaiskustannuksille:

$TC(q_1, q_2) = K_1 D_1 / q_1 + K_2 D_2 / q_2 + \frac{1}{2} h_1 q_1 + \frac{1}{2} h_2 q_2$

lisäehdolla $b_1 q_1 + b_2 q_2 \leq B$ (tilarajoitus)

Periaatteet ratkaisulle:

$1^o$ Etsitään $TC(q_1, q_2)$:n tavallinen (vapaa) kahden muuttujan funktion ääriarvokohta. Jos ratkaisu toteuttaa tilarajoitus-ehdon, on optimiratkaisu löytynyt (varastotila riittää kaikissa olosuhteissa, koska se riittää suurimmalle mahdolliselle varastollekin). Ellei tilarajoitusehto toteudu, joudutaan etsimään ns. sidottu ääriarvo Lagrangen kertoja -menetelmällä (kohta $2^o$).

# Lagrangen kertoja -menetelmä

$2^o$ Muodostetaan ns. Lagrangen funktio, jonka tavallinen ääriarvokohta antaa alkuperäiselle kokonaiskustannus-funktiolle etsityn sidotun ääriarvokohdan. Lisäksi saadaan tärkeätä informaatiota rajoitusehdon tiukkuudesta.

Vapaan ääriarvon määritys (kohta $1^o$):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial TC}{\partial q_1} = -\dfrac{K_1 D_1}{q_1^{\,2}} + \tfrac{1}{2} h_1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial TC}{\partial q_2} = -\dfrac{K_2 D_2}{q_2^{\,2}} + \tfrac{1}{2} h_2 = 0 \end{cases}$$

# Lagrangen kertoja -menetelmä

Yhtälöistä saadaan ratkaisemalla helposti ääriarvokohtaehdokas:

$$\begin{cases} q_1^* = \sqrt{\dfrac{2K_1D_1}{h_1}} \\ q_2^* = \sqrt{\dfrac{2K_2D_2}{h_2}} \end{cases}$$

Lagrangen funktion muodostaminen alkuperäisen tavoitefunktion, tilarajoituksen ja Lagrangen kertojan λ avulla (kohta 2°):

$$L(q_1, q_2, \lambda) = TC(q_1, q_2) + \lambda(b_1 q_1 + b_2 q_2 - B)$$

# Lagrangen kertoja -menetelmä

L:llä on sama ääriarvokohta muuttujien $q_1$ ja $q_2$ suhteen kuin TC:lläkin edellyttäen, että λ:n kerrottavana oleva sulkulauseke = 0, ts. että tilarajoitusehto toteutuu! Ääriarvokohdalle saadaan ehdot:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = -\dfrac{K_1 D_1}{q_1^{\,2}} + \tfrac{1}{2} h_1 + \lambda b_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = -\dfrac{K_2 D_2}{q_2^{\,2}} + \tfrac{1}{2} h_2 + \lambda b_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = b_1 q_1 + b_2 q_2 - B = 0 \end{cases}$$

# Lagrangen kertoja -menetelmä

Yhtälöryhmästä voidaan ratkaista (laskutoimitukset yleensä verraten monimutkaisia) lausekkeet $q_1$ :lle (= $q_1^{opt}$) ja $q_2$ :lle (= $q_2^{opt}$ ) sekä $\lambda$:lle. Yhtälöryhmän viimeinen yhtälö takaa, että ratkaisu toteuttaa tilarajoituksen.

Ratkaisuna saadaan myös arvo $\lambda$:lle, Lagrangen kertojalle. Kertoimella $\lambda$ on tärkeä taloudellinen tulkinta. Se ilmoittaa tilarajoitteen varjohinnan, ts. kuinka paljon (marginaalisesti optimissa) kustannukset lisääntyvät sen johdosta, että tila on pullonkaulatekijä. Jos varastotilaa olisi käytettävissä yksi tilayksikkö enemmän, varastoinnin kokonaiskustannukset alenisivat $\lambda$:n verran.

# Lagrangen kertoja -menetelmä

Varjohinnoilla on erittäin keskeinen merkitys mm. lineaarisen optimointitehtävän (LP-mallin) ratkaisemisessa, sekä ratkaisuteknisesti että ratkaisun taloudellisen tulkinnan kannalta. LP-mallin herkkyysanalyysi mm. perustuu pääosin ratkaisuun liittyviin varjohintoihin.

Seuraavassa tarkastellaan mallien yleistä herkkyys-analyysia varastomallia esimerkkinä käyttäen.

# Herkkyysanalyysi, yleistä

- Luonteeltaan mallin optiminjälkeistä tarkastelua, jonka sekä looginen että ajallinen paikka on mallityöskentelyn loppuvaiheessa
- Lähtökohtana valmiiksi formuloitu ja ratkaistu malli
- Tavoitteena tuottaa lisäinformaatiota mallin ja ratkaisun luonteesta tarkastelemalla mallin käyttäytymistä ja ominaisuuksia optimiratkaisun läheisyydessä
- Tunnetuinta herkkyysanalyysi on lineaarisen optimointitehtävän (LP-mallin) yhteydessä. Herkkyysanalyysi on itse asiassa osa LP-mallin ratkaisua (duaalimuuttujien varjohintatulkinnat)

# Herkkyysanalyysi, yleistä

1 Mikä on optimituloksen herkkyys optimiratkaisun suhteen: paljonko tavoitefunktion arvo huononee suhteessa optimituloksen, jos optimiratkaisun sijasta otetaan käyttöön jokin muu ratkaisu?
   - hinta optimiratkaisusta poikkeamiselle

2 Mikä on optimin p%:n läheisyysalue: mitkä ratkaisut johtavat enintään p% huonompaan tulokseen kuin optimiratkaisu?
   - "riittävän hyvien" ratkaisujen kartoitus

3 Miten optimiratkaisu ja -tulos muuttuvat mallin lähtöolettamusten (vakioiden ja parametrien) muuttuessa?
   - yksittäisen parametrin muutos (yhteys joustoihin)
   - lähtötietojen epätarkkuuden vaikutus (virheanalyysi)
   - lähtötietojen muuttamisen vaikutus(vaihtoehtolaskelmat)

# Esimerkkejä herkkyysanalyysistä EOQ -mallin yhteydessä

1 Paljonko varastoinnin kokonaiskustannukset kohoavat, jos tilauserän kooksi $q_0$ :n sijasta valitaankin $q' = \alpha\, q_0$ ?

2 Missä rajoissa tilauserän koko voi vaihdella ilman että kokonais-kustannukset kohoavat enemmän kuin p%?

3 a) Paljonko eräkoko ja kokonaiskustannukset muuttuvat, jos kysyntä D (tai tilauskustannukset K tai ylläpitokustannukset h) muuttuvat (ceteris paribus) p%?

b) Mitkä ovat eräkoon ja kokonaiskustannusten optimiarvojen virhe-arviot, kun parametrien D, K ja h arvoja ei tunneta tarkasti vaan tietyllä suhteellisella tarkkuudella (epätarkkuus esim. max 10%)?

c) Paljonko kannattaa investoida uuteen varastojärjestelmään, kun sen yksikkökustannus h on 100f % (esim. 20%) pienempi kuin nykyisen, pitoaika on N (esim. 20 v) ja laskentakorkokanta i ( 10%)

# EOQ-mallin herkkyysanalyysi

Malli ja sen ratkaisu:

$$TC(q) = \frac{KD}{q} + \tfrac{1}{2}hq$$

$$\begin{cases} q_0 = \sqrt{\dfrac{2KD}{h}} \\ TC_0 = TC(q_0) = \sqrt{2KDh} = hq_0 \end{cases}$$

1. Tuloksen (kokonaiskustannusten TC) herkkyys ratkaisun (eräkoon q) suhteen optimissa?

   Annettu: $q_0 \to q' = \alpha\, q_0$ ts. $q'/q_0 = \alpha$

   Ratkaistava: $TC_0 \to TC' = \beta TC_0$ ; $\beta = TC'/TC_0 = ?$

# EOQ-mallin herkkyysanalyysi

$$\beta = \frac{TC'}{TC_0} = \frac{\frac{KD}{q'} + \frac{1}{2}hq'}{hq_0} = \frac{KD}{hq'q_0} + \frac{1}{2}\frac{q'}{q_0} = \frac{KD}{hq'\sqrt{\frac{2KD}{h}}} + \frac{1}{2}\frac{q'}{q_0}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2KD}{h}}}{2q'} + \frac{1}{2}\frac{q'}{q_0} = \frac{1}{2}\frac{q_0}{q'} + \frac{1}{2}\frac{q'}{q_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{q_0}{q'} + \frac{q'}{q_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

Saadaan siis yhteys ratkaisun ($q_0$) suhteelliselle muutokselle $\alpha$ ja tuloksen ($TC_0$) suhteelliselle muutokselle $\beta$:

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \qquad \text{ts.} \qquad TC' = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)TC_0 .$$

# Esimerkki 4

Paljonko kokonaiskustannukset lisääntyvät, jos eräkoko a) kasvaa 50%, b) pienenee 50%?

a) $q' = 1.5\, q_0$ $(\alpha = 1.5)$

$TC' = 0.5\,(1.5 + 1/1.5)\, TC_0 \approx 1.08\, TC_0$ (8%:n kust. nousu)

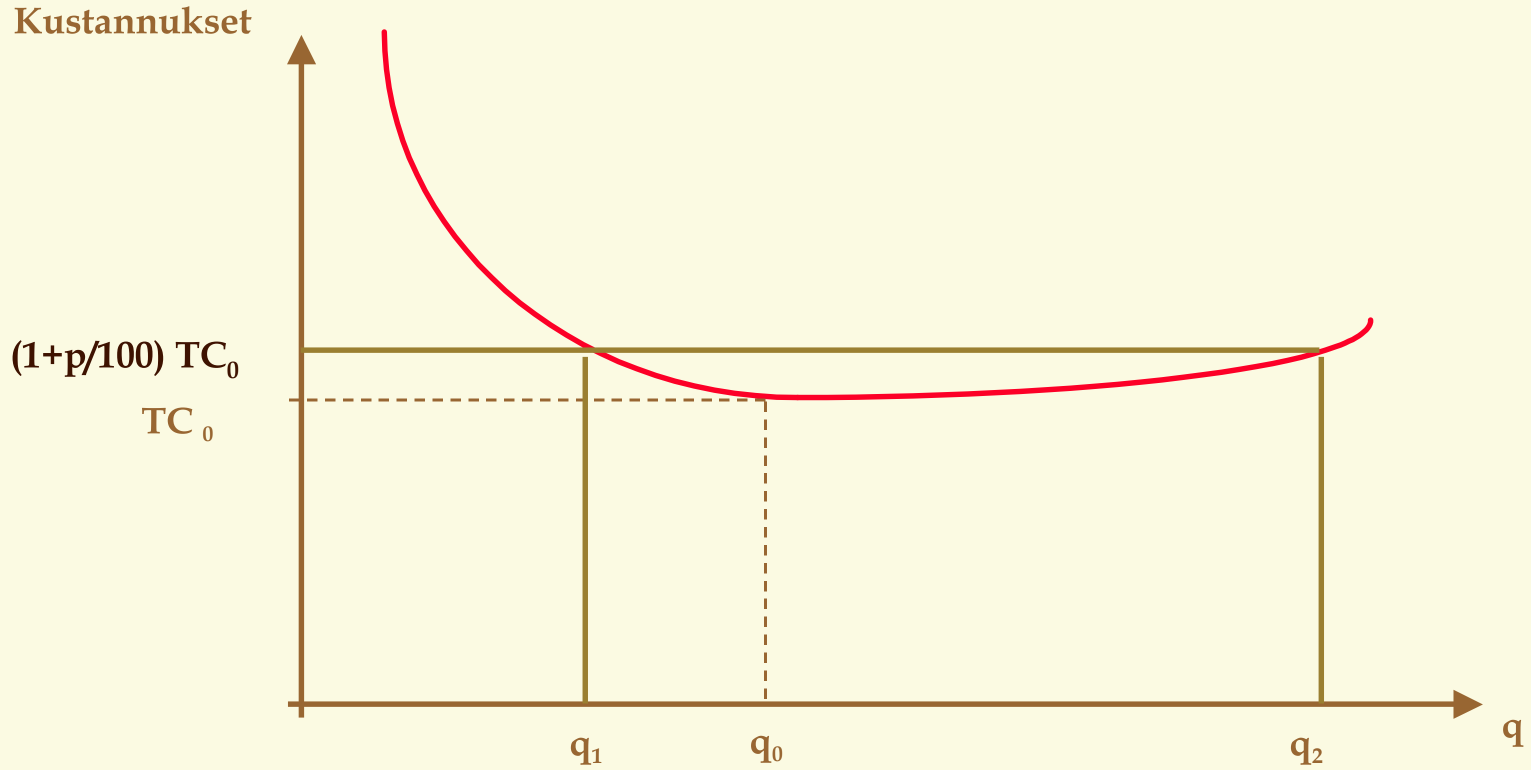
b) $q'' = 0.5\, q_0$ $(\alpha = 0.5)$

$TC'' = 0.5\,(0.5 + 1/0.5)\, TC_0 \approx 1.25\, TC_0$ (25%:n kust. nousu!)

- ✓ Malli on siis paljon herkempi poikkeamille optimiratkaisusta alas- kuin ylöspäin. Johtuu tavoitefunktion laakeudesta optimiratkaisun oikealla puolella. (Piirrä kuvio ja tarkastele asiaa siinä!)
- ✓ Herkkyysanalyysi pätee vain optimin välittömässä läheisyydessä.
- ✓ Tulokset ovat yleispäteviä EOQ-mallille, ne eivät riipu lainkaan parametrien K, D ja h arvoista (herkkyys = jousto = funktion ominaisuus).

# EOQ-mallin herkkyysanalyysi, jatkoa

2. Optimiratkaisun p-prosentin läheisyysalue: Miten $q_1$ ja $q_2$ on valittava, jotta olisi voimassa: aina kun $q \in [q_1, q_2]$, niin
   $TC(q) \leq (1 + p/100)\ TC_0$, missä $p$ on annettu?



# EOQ-mallin herkkyysanalyysi, jatkoa

Kohdasta 1: $$\frac{TC}{TC_0} = \tfrac{1}{2}(\alpha + 1/\alpha)$$

Vaatimus: $$\frac{TC}{TC_0} \le (1 + \tfrac{p}{100}) = P$$

Saadaan rajaluku P:lle:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + 1/\alpha) = P \qquad | \, 2\alpha$$

$$\alpha^2 - 2P\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha = P \pm \sqrt{P^2 - 1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{q}{q_0} = P \pm \sqrt{P^2 - 1}$$

$$\begin{cases} q_1 = (P - \sqrt{P^2 - 1})\, q_0 \\ q_2 = (P + \sqrt{P^2 - 1})\, q_0 \end{cases}$$

# Esimerkki 5

$$p = 10\% \qquad \Rightarrow \qquad P = 1.10$$

$$\begin{cases} q_1 = (1.10 - \sqrt{1.10^2 - 1})\, q_0 = 0.64 q_0 \\ q_2 = (1.10 + \sqrt{1.10^2 - 1})\, q_0 = 1.54 q_0 \end{cases}$$

Eräkoko saa kasvaa optimista korkeintaan 56% ja pienentyä korkeintaan 36%, jotta kokonais-kustannusten nousu olisi korkeintaan 10%.

# EOQ-mallin herkkyysanalyysi, jatkoa

3a. Jos kysyntä D muuttuu p%, paljonko muuttuu optimaalinen eräkoko, paljonko muuttuvat (kasvavat) optimaaliset kustannukset?

D: suhteellinen muutos on annettu: $\Delta D/D$

Suuretko ovat $\Delta q_0/q_0$ ja $\Delta TC_0/TC_0$ ?

Pienille (infinitesimaalisille) muutoksille pätee: $\Delta D/D \approx dD/D$

Saadaan:

$$\frac{\Delta q_0/q_0}{\Delta D/D} = \frac{\Delta q_0}{\Delta D} \cdot \frac{D}{q_0} \approx \frac{dq_0}{dD} \cdot \frac{D}{q_0}$$

Viimeksi mainittu lauseke (merk. $E_D(q_0)$ ) on $q_0$:n jousto D:n suhteen eli eräkoon kysyntäjousto.

# EOQ-mallin herkkyysanalyysi, jatkoa

EOQ-mallille saadaan näin eräkoon kysyntäjoustoksi:

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}; \qquad \frac{dq_0}{dD} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2KD}{h}}} \cdot \frac{2K}{h}$$

$$E_D(q_0) = \frac{dq_0}{dD} \cdot \frac{D}{q_0} = \frac{2K}{2h\sqrt{\frac{2KD}{h}}} \cdot \frac{D}{\sqrt{\frac{2KD}{h}}} = \tfrac{1}{2}\frac{\frac{2KD}{h}}{\frac{2KD}{h}} = \tfrac{1}{2} = vakio\,!$$

Tulos: $q_0$ :n suhteellinen muutos on puolet D:n suhteellisesta muutoksesta (likiarvo, pitää paikkansa sitä paremmin, mitä pienempi $\Delta D$ on). Jos esim. D kasvaa (vähenee) 10%, niin $q_0$ kasvaa (vähenee) 5%.

Samoin on (totea itse laskemalla): $E_D(TC_0) = 1/2$;

$E_K(q_0) = E_K(TC_0) = 1/2$ ; $E_h(q_0) = -1/2$ (!), $E_h(TC_0) = 1/2$.

# EOQ-mallin herkkyysanalyysi, jatkoa

3b. Parametrien arvojen muuttamisen kannattavuus?

Investoinnilla I saadaan aikaan varastojärjestelmä, jonka ylläpito-kustannus on 100f % pienempi kuin olemassa olevan järjestelmän (muut ominaisuudet ennallaan). Kuinka suuri saa I korkeintaan olla, jotta investointi olisi kannattava? Investoinnin pitoaika on N ja laskentakorkokanta i.

$$TC_0 = \sqrt{2KDh}$$

$$\frac{dTC_0}{TC_0} = d\ln TC_0 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dK}{K} + \frac{dD}{D} + \frac{dh}{h}\right) = \tfrac{1}{2}(0 + 0 - f) = -\tfrac{1}{2} f$$

$$\Delta TC_0 \approx dTC_0 = -\tfrac{1}{2} f \cdot TC_0 = -\tfrac{1}{2} f\sqrt{2KDh}$$

Säästö vuodessa:

$$\left|\Delta TC_0\right| \approx \frac{1}{2} f\sqrt{2KDh}$$

# EOQ-mallin herkkyysanalyysi, jatkoa

Säästö investoinnin pitoaikana (nykyarvomenetelmä):

$$NPV\left(\sum\left|\Delta TC_0\right|\right) \approx a_{(N,i)} \cdot \tfrac{1}{2} f\sqrt{2KDh},$$

missä $a_{(N,i)}$ on jaksollisten maksujen diskonttaustekijä.

Saadaan kannattavuusehto investoinnille:

$$I \leq \tfrac{1}{2} f \cdot a_{(N,i)} \cdot \sqrt{2KDh}$$

# Esimerkki 6

Olkoot EOQ-mallin parametrit:

$D = 18000$ kpl/v

$K = 2000$ mk

$h = 6$ mk/kpl v

ja investointiin liittyvät parametrit:

$f = 0.20$ (h: 6 mk/kpl·v $\rightarrow$ 4.80 mk/kpl·v)

$N = 20$ v

$i = 0.10 \Rightarrow a_{(N,i)} = 8.51356$

Varastoinvestointi saa maksaa enintään:

$I \leq 0.5 \cdot f \cdot a_{(N,i)} \cdot (2KDh)^{0.5} = 0.5 \cdot 0.20 \cdot 8.51356 \cdot 20784 \approx 17700$ mk

(investoinnin takaisinmaksuajan on oltava alle 9 vuotta).