TILASTOTIETEEN PERUSTEET: 1. harjoitus

1. Olkoon

$$\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{ja} \quad \bar{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{(keskiarvo)},$$

$$s_x^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad \text{(varianssi)}, \quad \text{ja}$$

$$s_{xy} := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad \text{(kovarianssi)}.$$

   a) Laske $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_x^2 ja s_{xy} kun $n = 3$, $\{x_i\}_{i=1,2,3} = \{2, 3, 4\}$, ja $\{y_i\}_{i=1,2,3} = \{6, 4, 2\}$.

   b) i) Laske kovarianssi seuraavaa vaihtoehtoista kaavaa käyttäen:

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n}\right).$$

   ii) Selitä miksi molemmat kaavat antavat saman tuloksen x_in ja y_in valinnasta riippumatta.
   Vihje: $\sum_{i=1}^{n} \bar{x} y_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{y} x_i = n\bar{x}\bar{y}$.

   c) i) Laske x:n varianssi seuraavaa vaihtoehtoista kaavaa käyttäen:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right).$$

   ii) Selitä miksi molemmat kaavat antavat saman tuloksen x_in valinnasta riippumatta. *Vihje: Ei tarvitse enää laskea mitään. Varianssi on itse asiassa kovarianssin erikoistapaus. Millä tavalla?*

2. Olkoon

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} = (1 + x^2 + y^2)^{-1}.$$

   a) Laske osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

   b) Osoita, että ääriarvokohtia ei voi olla muualla kuin $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

   c) Onko se minimi- vai maksimikohta? Miksi?

3. Laske integraalit

   a)

$$\int_a^x \frac{1}{b-a}\, dt, \quad \text{missä } a \le x < b,$$

   b)

$$\int_0^x a e^{-at}\, dt, \quad \text{missä } a, x > 0.$$