



VAASAN YLIOPISTO

Talousmatematiikan professori
Ilkka Virtanen

JÄÄHYVÄISLUENTO SNELLMANIN PÄIVÄNÄ 12.5.2008

PALJONKO ON KAKSI PLUS KAKSI?

Kokemuksia ja näkemyksiä matematiikan opetuksesta kuudelta vuosikymmeneltä

Aluksi näkökulman valinnasta

Valitsemani alaotsikko viittaa vahvasti siihen, että keskityn tässä luennossani menneitten muisteluun ja tarkasteluun. Näin todella tulenkin jossain määrin tekemään. Onko virkauran päättymistä ennakoivan jäähyväisluennon tarkoituksena sitten nimenomaan peruutuspeiliin katsominen, vai olisiko parempi kiinnittää huomio siihen, missä juuri nyt ollaan ja mitä juuri nyt tapahtuu tai vieläpä keskittää huomio tuulilasista eteenpäin katsomiseen. Mutta kuten esimerkiksi tulevaisuuden tutkimuksen perusteita tuntevat tietävät, tulevaisuutta ei ole ilman menneisyyttä ja nykyisyyttä ja nämä kolme muodostavat erottamattoman jatkumon. Kuninkaallisen Turun Akatemian vihkimisjuhlan (v. 1640) professorijäsen **Michael Wexionius Gyldenstolpe** esitti v. 1642 julkaisemassaan väitöskirjassa **De Prudentia** (Viisaudesta) tästä kolmiyhteydestä seuraavan näkemyksen:

Viisauden perusasia on,
että valitaan hyvä ja vältetään paha.
Jotta saisimme tämän viisauden,
tarvitsemme kolminkertaisen silmän:
Muistin, jolla tarkastellaan *mennyttä*,
ymmärryksen, jolla tarkastellaan *nykyhetkeä*
ja huolenpidon, jolla tarkastellaan *tulevaa*.

Wexioniusta seuraten, luentoni näkökulman lähtökohtana onkin oikeastaan huoli tai huolenpito tulevas-
ta. Mikä on maamme matematiikan opetuksen taso tulevaisuudessa ja miten se vaikuttaa esimerkiksi
opiskelijarekrytointiedellytysten kautta Vaasan yliopiston ja erityisesti sen teknillisen tiedekunnan me-
nestymismahdollisuuksiin? Yritän sitä varten ymmärtäväisesti tarkastella eräitä nykyhetken matematiikan
opetuksessa vallitsevia asiantiloja ja esittää joitakin niihin liittyviä näkemyksiä sekä myös kokemukseen
ja muistiin perustuen havaintoja opetuksen kehityspoluista viime vuosisadan puolivälistä lähtien. Syn-
tyykö tästä Wexioniuksen esittämällä tavalla jonkinasteista viisautta, jää arvoisien kuulijoiden pääteltä-
väksi. Ehkä mukana on edes palanen jälkiviisautta, joka Havukka-ahon ajattelijan mukaan on se viisau-
den yleisin laji. Eli kuten **Veikko Huovinen** toteaa **Konsta Pykkäsen** suulla: ”Kaikista paras ja imelin
viisauven laji on jälkiviisaus, sillä alalla saahaan eniten aikaan. Siinä on tapaus mennyttä aikakautta, mut-
ta se kuvitellaan esiintulevaksi ja sakilla setvitään, miten olisi paras käyttäytyä. Tässä lajissa on ihminen
viisaimmillaan...”.

Paljonko on kaksi plus kaksi?

Luentoni pääotsikko ”Paljonko on kaksi plus kaksi?” juontaa juurensa 15 vuoden taakse. Vaasan yliopiston tuon aikaisena rehtorina kirjoitin Vaasan yliopistolehteen samannimisen pääkirjoituksen. Syyn kirjoitukseeni sain yliopistojen keskinäistä hyvyttä koskevista vertailuista, jotka tuolloin olivat tulossa Suomeenkin. Eräs tällainen vertailu sisältyi Professoriliiton teettämään professoritutkimukseen, jossa yhtenä osana oli Suomen parhaan yliopisto etsintä. Tässä osiossa tasavallan päättäjiä pyydettiin nimeämään Suomen yliopistoista viisi parasta ja korkeatasoisinta. Subjektiviisiin mielikuviiin perustuvat vastaukset antoivat odotetunlaisen tuloksen. Yliopistot sijoittuivat muutamien vähäisin poikkeamin koon ja iän mukaiseen järjestykseen: Helsingin yliopisto ja teknillinen korkeakoulu olivat selvästi kärjessä, Vaasan ja Lapin yliopistot peräpään valvojina. Tilastotieteilijä olisi saanut tuosta aineistosta hyvän regressiomallin selittäessään yliopiston hyvyttä vain kahdella muuttujalla, yliopiston iällä ja koolla.

Myös tulosohjaus oli tulossa yliopistoihin. Opetusministeriö oli samana vuonna (1993) arvioinut yliopistojen toimintaa. Osa seuraavan vuoden määrärahoista saatiin ensimmäisiä kertoja toiminnan tuloksellisuuden perusteella. Tuloksellisuusmäärärahaa jaettiin yliopistoille seuraavilta toiminta-alueilta: tutkimus, peruskoulutus, jatkokoulutus, aikuiskoulutus ja kansainvälistyminen. Tässä mittauksessa Vaasan yliopisto menestyi erinomaisesti. Perus-, jatko- ja aikuiskoulutuksen tehokkuudesta koostunut tuloksellisuusmääräraha oli suuruudeltaan listan kärkipäässä, tuloksellisuusrahoja budjetin kokoon suhteutettaessa Vaasan yliopisto oli suorastaan ensimmäisenä.

Oliko Vaasan yliopisto tuolloin siis maamme huonoin vai paras yliopisto? Kokonaisuutena tarkasteltuna ei varmaan kumpaakaan, vaan jossakin siellä välillä. Kun sen sijaan rajattiin tarkastelu tiettyyn toimintoon tai suoritettiin tarkastelu tietystä suppeasta näkökulmasta, saatiin valituista kriteereistä riippuen hyvinkin erilaisia, jopa vastakkaisia tuloksia. Entäpä matematiikassa, joka on tieteistä eksaktein, voidaanko siellä kuitenkin aina päätyä aina yksiselitteiseen lopputulemaan? Onko itsestään selvää, mitä kaksi plus kaksi on?

Ulla-vaimoni kummipoika vieraili luonamme n. 1,5 kuukautta sitten. Vierailun keskeisenä aiheena oli perheen lasten Rölli -näytelmään tutustuminen. Jos tässä yhteydessä olisin kysynyt perheen 9-vuotiaalta Lauri-pojalta, joka juuri on menestyksellisesti oppinut mm. kertotaulut, paljonko on kaksi plus kaksi, vastaus olisi todennäköisesti tullut tuhahtaen: ”No neljä tietysti”. Jos taas esittäisin kysymyksen laitoksemme lukuteorian asiantuntijalle, yliopistonlehtori ja dosentti Marko Moisiolle, hän voisi hyvinkin vastata: ”Vaikkea sanoa ilman kysymyksen täsmentämistä tiedolla siitä, mikä on käytetyn lukujärjestelmän kantaluku”. Tietokoneissa käytetyssä binäärijärjestelmässä esimerkiksi summaa ilmoittava luku on 100 (tällöin tosin yhteenlaskettavatkin kirjoitetaan muotoon 10 eli binäärijärjestelmän symbolein $10 + 10 = 100$). Kvadraalijärjestelmässä (kantelukuna 4) on vastaavasti $2 + 2 = 10$. Tilastotieteen professori Seppo Pynnöselle esitetty kysymys puolestaan voisi johtaa vaikkapa seuraavaan pohdintaan. Jos nuo kakkoset merkitsevät esimerkiksi Gallup-kyselyssä saatuja kahden pienpuolueen kannatusprosentteja, jolloin puolueiden todelliseen kannatukseen liittyy ”prosenttiyksikön virhemarginaali suuntaansa”, kuten tiedotusvälineissä tavataan asia ilmaista, puolueiden yhteenlasketun (todellisen) kannatuksen voidaan arvioida sijoittuvan välille 2,5 – 5,5 prosenttiyksikköä.

Kun aikoinaan tuota mainittua kirjoitusta laadin ja yksikäsitteisyysvertailua hyvyysmittauksen tuloksen ja matemaattisen operaation tuloksen välillä tein, todella esitin otsikon kysymyksen laskentatoimen professori Timo Salmelle. Hän vastasi siihen vastakysymyksellä: ”Paljonko haluat sen olevan?” Tällä hän viittasi yrityksen tilinpäätöslukujen – jotka sinänsä ovat tarkasti kirjanpidosta johdettuja – erilaisiin tulkin-toihin. Yrityksen kannattavuutta esimerkiksi voidaan mitata kovin monella eri tunnusluvulla ja esittää kulloisellekin sidosryhmälle – henkilöstölle, omistajille, medialle – kulloiseenkin tarkoitukseen sopivin.

Olen tällä yksinkertaisella esimerkillä yrittänyt havainnollistaa matematiikan käyttöä erityyppisissä yhteyksissä. Matematiikan avulla suoritettavat operaatiot ovat aina yksiselitteisiä ja tarkkoja, silloinkin kun niitä käytetään epätasallisissa yhteyksissä. Esimerkiksi todennäköisyyslaskenta on matemaattinen koneisto, jolla satunnaisuutta sisältävään ilmiöön liittyvää epävarmuutta voidaan hallita. Sattuman läsnäoloa ei voida poistaa, mutta sen vaikutukset voidaan esimerkiksi päätöksenteossa ottaa huomioon. Tuloksen epämääräisyys tai epävarmuus ei siis liity itse matematiikkaan, vaan on seurausta alkuehtojen puutteellisesta määrittelystä tai tuntemuksesta tai tuloksen mielivaltaisesta tai virheellisestä tulkinnasta. Yleisen hokeman vastaisesti tilastot eivät itsessään valehtele, niiden tulkitsijat sitäkin useammin.

Kokemuksia matematiikan opetuksesta kuudelta vuosikymmeneltä

Pienenä välipalana – kevennyksenäkin – esitän monille ehkä tutun diasarjan peruskoulun matematiikan opetuksen kehityksestä tyypiteltynä vuosikymmenittäin. En enää tarkemmin muista diasarjan alkuperäislähdettä, joka tapauksessa olen esitystä itse jossain määrin muokannut ja tavannut esittää sen vieraillessani talousmatematiikan peruskurssin luennoilla kertomassa talousmatematiikan ytimen muodostavasta matemaattisesta mallintamisesta. Diasarja on luettavissa kotisivultani osoitteessa http://lipas.uwasa.fi/~itv/pk_matem.ppt. Olen tyypitellyt vuosikymmenet otsikkonimiin (suluissa luonnehdinta omasta toiminnastani vastaavana aikana):

- 1950-luku: Vanha hyvä aika (omat kouluvuoteni)
- 1960-luku: Suuret ikäluokat (omat opiskeluvuoteni)
- 1970-luku: Uusi matematiikka (jatko-opiskelijana ja yliopisto-opettajana)
- 1980-luku: Ryhmätöiden aika (professorina: opettajana, tutkijana, hallintomiehenä)
- 1990-luku: Ekologia ja kansalaistoiminta (kuten edellä)
- 2000-luku: Internet- ja pörssiakakausi (professorina: tutkijana, hallintomiehenä, asiantuntijana)

Matematiikka ja yhteiskunnan eri tehtäväalueet

Korkeakouluissa on helppo havaita, että yleinen matematiikan osaaminen ja motivaatio matemaattisten aineiden opiskeluun eivät koulunsa päättäneillä ole riittävän hyvät. Pitkän matematiikan suorittaneiden osuus on silti laskusuuntauksesta huolimatta säilynyt kohtuullisen suurena ja heidän matematiikan taitonsa eivät ratkaisevasti poikkea kansainvälisestä tasosta. Ylioppilaskirjoitusten pakollisia aineita koskenut äskettäinen uudistus on luonut matematiikalle entistä tasavertaisemman aseman muihin aineisiin verrattuna. Lyhyen matematiikan valinneille matematiikka on kuitenkin liian usein pakkopullaa, jota vierastetaan, pelätään ja usein inhotaankin. Matematiikkaa vielä suurempi ongelma on fysiikan lukio-opiskelijoiden lukumäärän painuminen takavuosina lähes maanrakoon. Uusi ainereali voi merkitä piristysruisketta myös fysiikan ja kemian lukio-opinnoille.

Koulun matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tehtävänä on luonnollisesti varustaa oppilaat sellaisilla tämän alan perustiedoilla ja -taidoilla, jotka ovat riittävät toisaalta jatko-opintoja, toisaalta suoraan työelämää varten. Koulussa omaksutun oppimisen laadulla ja määrällä on erilaiset vaikutukset oppilaan tulevia tehtäviä ajatellen siitä riippuen, mikä on hänen myöhempi uravalintansa. Kouluaikeisen matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ja oppimisen puutteet voidaan jakaa karkeasti kolmeen luokkaan myöhemmän opiskelun ja tulevien työtehtävien perusteella. Laiminlyöntien ja puutteiden vakavuus on aloittain nouseva seuraavassa järjestyksessä.

1. Matematiikka, fysiikka ja kemia tieteinä ja yliopistollisina oppialoina sekä näihin suoraan liittyvät työtehtävät. Tieteenalojen menestyminen ja kehitys on suuressa määrin riippumaton siitä, miten kouluopetus onnistuu. Puhtaasti matematiikan ja luonnontieteiden kannalta riittävä määrä lahjakkaita ja motivoituneita opiskelijoita löytyy joka tapauksessa, ja yliopisto-opetuksen taso on lopulta rat-

kaiseva alan kehityksen kannalta. Itse aloitin matematiikan yliopisto-opintoni olosuhteiden pakosta lukion lyhyen oppimäärän pohjalta. En huomannut eroa opintojeni edistymisessä pitkän oppimäärän suorittaneihin verrattuna.

2. Tekniikka, lääketiede, taloustieteen eräät alat jne. Vahva matemaattisluonnontieteellinen perussivistys on näillä aloilla menestymisen edellytys. Alat edellyttävät periaatteessa vahvaa matemaattista taustaa koulusta, mutta puutteet voidaan korkeakoulutasolla ainakin jossain määrin vielä korjata (korkeakoulujen kertaus- ja täydennyskurssit, kukkaisteekkarityyppiset erityisjärjestelyt ym.). Kokonaisuuden kannalta menettely on kuitenkin tehotonta ja kallista.
3. Alat, joiden opiskelussa ei enää juurikaan kohdata matematiikkaa (useimmat humanistiset tieteet, monet yhteiskuntatieteiden osa-alueet jne.). Kouluopetuksen ja -oppimisen puutteet jäävät pysyviksi, joten vahingot ovat pitkällä aikavälillä tässä ryhmässä suurimmat.

Vaasan yliopistossa kohdan 1 mukaista toimintaa on vain henkilökunnan toimesta suoritettavassa tutkimuksessa ja jatko-opiskelussa, perustutkintoon johtavaa matematiikan, luonnontieteiden tai tilastotieteen koulutusta ei ole. Perusopetus sijoittuikin luokkiin 2 ja 3 niin, että luokkien sisällä on vielä eri tasoja. Opiskelun kuluessa matematiikan (ja tilastotieteen) taitojen kehittämisen edellyttäminen eriytyy pääaineen mukaan.

Tekniikassa puutteet matemaattis-luonnontieteellisessä osaamisessa muodostavat jo selvän uhan opiskelijarekrytoinnille, opinnoissa menestymisedellytyksistä puhumattakaan. Sisäänottomääriä on jouduttu laskemaan ja silti yksiköillä on vaikeuksia saada tavoiteltuja määriä riittävät opiskeluedellytykset omaavia opiskelijoita. Kauppamatematiikassa matemaattisten aineiden osuus tutkinnossa on jatkuvasti laskenut. Kärjistäen olenkin tästä asiantilasta eri yhteyksissä todennut, että kun 40 vuoden yliopistourani aikana olen ollut toteuttamassa neljää eri tutkinnonuudistusta, niin jokaisessa uudistuksessa matematiikan osuus on puolittunut, matematiikan opintojen määrän puoliintumisaika on siis tutkinnonuudistusten väli. Asioiden osaamattomuus tulee useimmiten vastaan pro gradu -vaiheessa, kun empiirisen aineiston analysointiin tarvittavien yksinkertaistenkin työkalujen käyttötaito puuttuu. Yhteiskuntatieteissä ja humanistisella alalla opetusksyntää on esiintynyt vain tilastotieteen perusteiden osalta, aina ei niistäkään.

Eräitä ajatuksia matematiikan kouluopetuksen tehostamiseksi

Rakennutimme omakotitalomme Vaasan Melaniemeen 21 vuotta sitten. Rakennuttaminen tapahtui lähes kokonaan kokonaisurakoinnin muodossa, mutta joitakin työvaiheita toteutettiin erillisurakkoina. Yhden suurimmista näistä muodostivat pesu- ja saniteettitilojen laatoitustyöt. Toimin laatoittajan apumiehenä, jolloin pääsin läheltä seuraamaan hänen ammattitaitoista ja kunnianhimoista työtään. Kehuesani laatoittajalle hänen työnsä jälkeen hän totesi, että on helppo päästä hyvään lopputulokseen, kun pohjatyöt on suoritettu kunnolla. Jos pohjatöissä (betonivaluissa, muurauksissa, levytyksissä) on virheitä tai puutteita, taitavakaan ammattimies ei saa viimeisessä työvaiheessa haluamaansa virheetöntä jälkeä aikaan. Sama pätee koulutuksessa. Kun arvioimme korkeakouluopiskelijoiden matemaattisia taitoja ja valmiuksia ja niissä esiintyviä puutteita, joudumme ulottamaan tarkastelun aina peruskoulun alaluokille asti.

Kansainvälisissä koulusaavutusvertailuissa (esim. Pisa-tutkimukset) on todettu, että suomalaislapset menestyvät peruskoulutasolla mm. juuri matematiikassa erinomaisesti. Yleinen viesti lukion matematiikan opettajilta kuitenkin on, että peruskoulunsa päättäneet oppilaat eivät ole valmiita lukion matemaattisten aineiden opintoihin. Missä siis mättää? Matematiikan pedagogiikkaa ja didaktiikkaa tuntevat ovat laajasti sitä mieltä, että Pisa-tutkimuksissa ei matematiikan osalta selvitetäkään varsinaista matematiikan osaamista, vaan yleistä päättely- ja ongelmanratkaisutaitoa. Tärkeitä asioita tietysti nämäkin, mutta eivät mitään riittävästi ja pätevästi matemaattisen ajattelutavan ja matematiikan työkalujen hallintaa.

Suomalaisessa peruskoulussa on alaluokilla (luokat 1 – 6) yleisesti käytössä luokanopettajajärjestelmä. Tällä järjestelmällä on pedagogisesti ja kasvatuksellisesti omat hyvät puolensa. Aineenopettajajärjestelmä on kuitenkin käytössä ala-asteen viimeisinä vuosina mm. kielissä sekä eräissä kädentaito-aineissa. Matematiikka poikkeaa kielten tapaan yleisistä humanistis-yhteiskuntatieteellisistä aineista siinä määrin, että myös siinä tulisi siirtyä aineenopettajajärjestelmään. Luokanopettajiksi valmistuvien ainevalinnat sekä koulussa että myöhemmin opettajankoulutuksessa kun ovat nykyisin niin selvästi matemaattisia aineita karttavia. Matematiikan opetus jää helposti kokoelmaksi muistisääntöjä ja temppuja ("murtoluvulla jaettaessa viedään jakaja ensin viivan alta viivan päälle ja sitten käännetään ympäri") ilman, että syvempi ajattelu seuraa mukana. Prosenttilaskuun ylioppilaskirjoituksiin asti ulottuva suunnaton vaikeus on myös hyvä esimerkki tästä yksityiskohtien muistamiseen perustuvasta opettamis- ja oppimistavasta.

Peruskoulun luokkien 7 – 9 matematiikan opetus kaikille yhteisesti ja samanlaisena ei luo kelvollisia oppimisedellytyksiä sen paremmin matematiikan opinnoista kiinnostuneille kuin niihin vähemmän motivoituneille tai jopa suorastaan torjuvasti suhtautuvillekaan. Käytössä olevalla "keskimääräisen oppilaan oppimisedellytysten" mukaisella järjestelmällä motivoituneet ja lahjakkaat turhautuvat tekemisen puutteessa (poikkeuksena tilanteet, joissa opettaja jaksaa ohjata heitä ylimääräisiin suorituksiin), toinen ääripää on silti koko ajan "pihalla" opetettavasta asiasta. Järjestelmä on johtanut siihen, että aiemmin keskikoulun kurssiin ja peruskoulun alkuaikoina laajimpiin tasokursseihin sisältynyttä ainesta on siirtynyt vasta lukiossa opetettavaksi. Lisäksi aineksen hallinta on siinä määrin puutteellista, että lukion ensimmäinen kurssi joudutaan opettajien mukaan pitämään pääosin peruskoulun oppimäärää kertaavana, kun sen oppimistavoitteiden mukaisesti tulisi olla jo etenevää. Paras tulos saavutettaisiin, jos opetus peruskoulun ylimmillä luokilla eriyttäisiin lukion tapaan, sekä sisällöllisesti että määrällisesti. Tarjolla olisi kaksi rinnakkaista oppiainetta: "matematiikka", jonka valitsisivat mm. lukioon aikovat ja myöhemmin tekniikan, lääketieteen ja kauppatieteiden opintoihin tähtäävät oppilaat, sekä "laskento", enemmän käytännönläheistä arkipäivän laskemista sisältävä matematiikan oppimäärä.

Lukio-opetuksesta löytyy sekä sisällöllisiä että rakenteellisia kehittämismahdollisuuksia. Peruskoulussa toteutettavat edellä kerrotun kaltaiset kehitystoimet toisivat oppilaat entistä valmiimpina lukio-opintoihin. Opetettavaa ainesta olisi myös syytä karsia. Parin kolmen viime vuosikymmenen aikana lukio-opintoihin on tullut ainesta, jonka opiskelija aiemmin kohtasi vasta yliopisto-opinnoissa. Sisällön laventaminen on tapahtunut kohtalokkaalla tavalla syventymisen kustannuksella. Lukuteorian, numeerisen analyysin tai kaaosteorian alkeille ei ole suurelle osalle pitkän matematiikan lukijoista jatkoopinnoissa juurikaan hyötyä, ja ne, jotka niitä myöhemmin tarvitsevat, saisivat paremmat edellytykset opintoihinsa, mikäli tietyt perusasiat olisivat kunnolla hallussa. Leimaa antavaa lukion käyneiden taidolle onkin nykyisin, että (ainakin periaatteessa) opetetut asiat ja todella opitut asiat voivat olla varsin kaukana toisistaan. Eri aloille suuntautuvien matematiikan soveltamismahdollisuuksien esittelemisen sen sijaan on syytä panna myönteisenä kehityspiirteenä merkille.

Ylioppilaskirjoitusten rakenteellisesta uudistuksesta voi olla pelkästään iloinen, vaikka lopullisia johtopäätöksiä uudistusten vaikutuksesta onkin vielä ennen aikaista tehdä. Siirtyminen neljän pakollisen kokeen järjestelmästä mahdollisuuteen valita viidestä kokeesta neljä (joista yksi äidinkieli) on tuonut matematiikan pitkän oppimäärän valinneet entistä tasa-arvoisempaan asemaan muiden opiskelijoiden kanssa. Ainereaaliin siirtyminen puolestaan voi merkitä fysiikan ja kemian suosion kasvua lukio-opiskelijoiden keskuudessa. Fysiikan ja kemian vähäinen suosio lukio-opinnoissa on ollut itse asiassa vakavampi ongelma kuin edellä kuvatut matematiikkaan liittyvät vaikeudet. Mitä vielä olisi syytä toivoa näiden aineiden opetukseen liittyen, on, että demonstraatiot ja omakohtaiset työt palautettaisiin osaksi opetusta oppiaineiden kokeellisen luonteen paremmaksi esittelemiseksi.

Lopuksi on vielä syytä lyhyesti kosketella ylioppilaskirjoituksissa noudatettavaan suhteelliseen arvosteiluun liittyvää problematiikkaa erityisesti siltä osin kuin se koskettaa pitkää matematiikan valinnea opis-

kelijoita. Suhteellista arvostelua kaavamaisesti noudatettaessa ko. oppimäärän valinneet joutuvat kärsimään. Arvostelussa ei oteta huomioon sitä, että kyseessä on lähtöedellytysten, kiinnostuksen ja motivaation perusteella muodostunut erityisryhmä, jonka arvosanjakauman tulisi olla koko perusjoukon arvosanjakaumaa parempi, kun se nykyisellään voi olla jopa sitä huonompi. Ryhmän saavutukset ylimääräisessä reaalikokeessa, koulutodistuksen arvosanoissa ym. vahvistavat selkeästi tämän näkemyksen. Sama vaatimus pätee luonnollisesti esimerkiksi ylimääräisen kielen kirjoittajien erityisryhmään, mutta heidän kohdallaan asia onkin järjestyksessä. Arvosanjakauma ylimääräisessä kielessä heijastaa heidän koko perusjoukkoa korkeampaa tasoaan.

Seuraavassa esitetään joitakin arvosanjakaumia kevään ylioppilaskirjoituksista v. 1994. Niitä voidaan pitää tyypillisinä ennen 2000-luvun uudistuksia. On mahdollista, että uudistusten jälkeen kehitys on johdannut kohti tasapainoisempaa tilannetta.



