Pohjalaisen Sanomalehtiyliopisto 1998

PÄÄTÖKSENTEON JA EPÄVARMUUDEN MATEMATIIKKAA

KAAOS-TEORIA - EPÄJÄRJESTYS HALLINTAAN MATEMATIIKAN KEINOIN

Professori Ilkka Virtanen

Sekä luonnossa että yhteiskunta- ja talouselämässä esiintyvät ilmiöt ovat luonteeltaan usein *dynaamisia systeemejä:* ne voidaan esittää peräkkäisinä ajan suhteen etenevinä tiloina. Systeemin tila tietyllä hetkellä yhdessä systeemin kehitykseen liittyvien lainalaisuuksien kanssa määrää systeemin tilan seuraavalla hetkellä. Niinpä esimerkiksi vallitsevalla säätilalla on suuri vaikutus odotettavissa olevaan huomiseen säähän, kaupunkien ja kuntien tulevien väestömäärien keskeisenä perustana ovat nykyiset väestömäärät jne.

Tällaisia systeemejä voidaan usein kuvata yksinkertaisilla matemaattisilla malleilla, joissa on vain yksi tai muutama muuttuja ja näiden muutosta kuvaavat epälineaariset yhtälöt. Jos malli on herkkä systeemin alkutilalle, sitä sanotaan *kaoottiseksi.* Kaoottisen mallin perusominaisuutena onkin levottomuus: havaittava käyttäytyminen on epäsäännöllistä ja jo erittäin pienet lähtöarvojen muutokset aikaansaavat käyttäytymisen täydellisen muuttumisen. Tästä huolimatta kyse on matemaattisesti kurinalaisesta mallista. Arkikielen tapaista negatiivista arvonväritystä ei matemaattiseen kaaokseen liity.

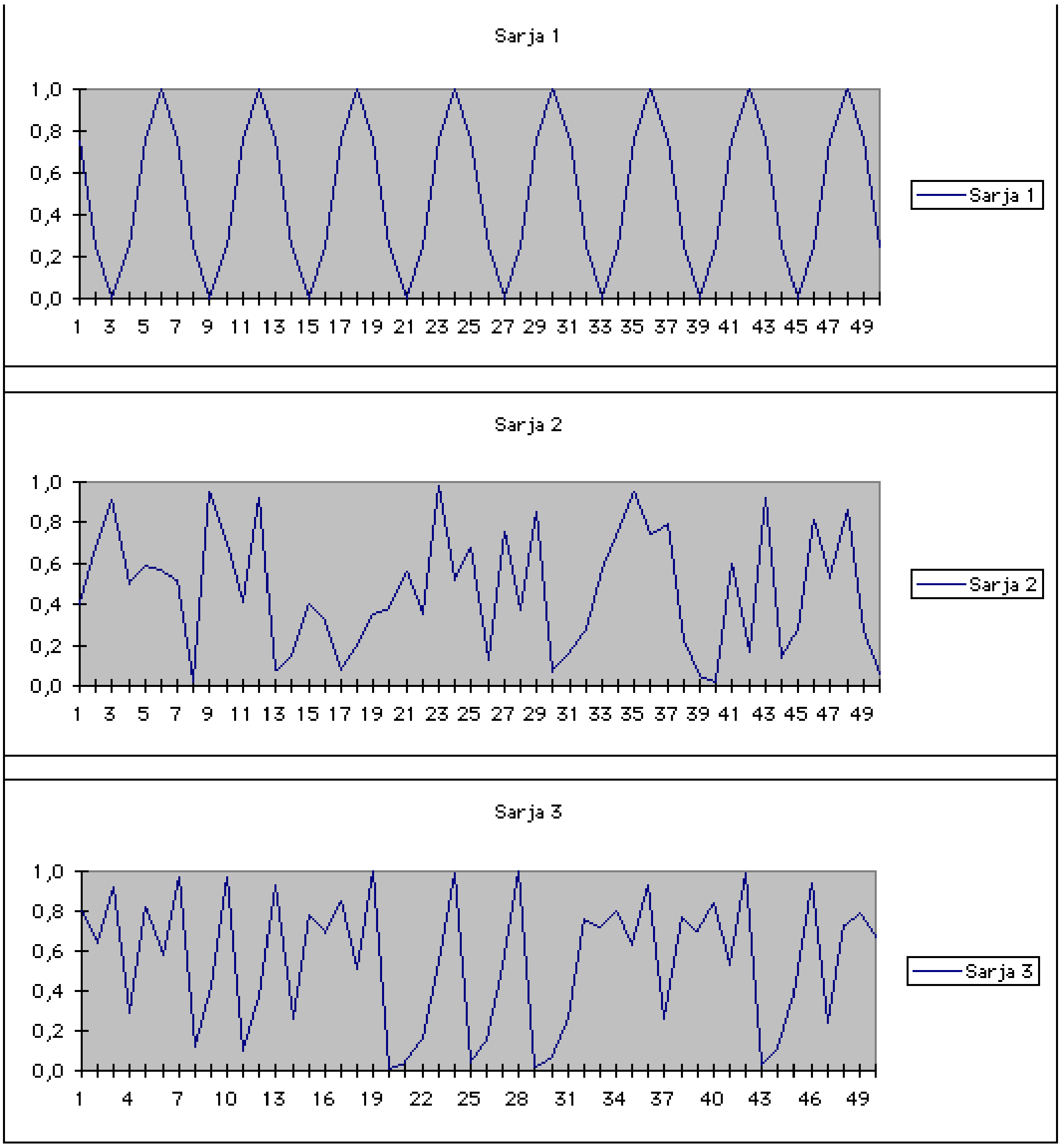
Deterministinen, stokastinen ja kaoottinen systeemi

Kuviossa 1 on esitetty kolmen eri dynaamisen systeemin kehitykset 50 peräkkäisenä ajanhetkenä. Sarja 1 on esimerkki *deterministisestä*, säännöllisen kehityskulun omaavasta sarjasta. Kyseessä voisi olla esim. jousen päässä värähtelevän kappaleen sijainnin ajallista vaihtelua kuvaava sarja. Sarjat 2 ja 3 taas ovat vahvasti epäsäännöllisiä. Niiden tarkka ennustaminen näyttäisi olevan mahdotonta. Näennäisestä samankaltaisuudestaan huolimatta sarjat ovat kuitenkin luonteeltaan aidosti erilaiset. Sarja 2 on *stokastinen* eli satunnainen, arpomalla muodostettu. Sen tulevien yksittäisten arvojen ennustaminen on siten mahdotonta. Sarja 3 taas kuvaa ns. *logistisen kasvumallin* käyttäytymistä sellaisella kasvuparametrin arvolla, jolla käyttäytyminen on kaoottista. Sarjan arvot ovat kuitenkin ennustettavissa, vieläpä tarkasti laskettavissa, mikäli sarjan alkuarvo ja mallin kasvuparametrin arvo vain tunnetaan. Ulkopuoliselle havainnoitsijalle sarja näyttää siis stokastiselta, todellisuudessa se on kuitenkin deterministinen. Herkkyys systeemin alkutilasta tekee mallista kuitenkin hyvin epävakaan: pienikin muutos sarjan ensimmäisessä arvossa (esim. 0.8 -> 0.800001) tuottaa täysin erilaisen lukusarjan.

Logistinen kasvumalli

Yksinkertaisimmassa kasvumallissa oletetaan, että systeemin tila (esim. eläinpopulaation koko, pankkitilillä oleva rahasumma tms.) hetkellä t, (= x_t), on edellisen kauden tilan tietty kerrannainen, ts. on voimassa

(1) $x_t = a \cdot x_{t-1}$.



Kuvio 1. Dynaamisten systeemien kolme eri lajia

Mikäli esimerkiksi bakteeripopulaatio aina kaksinkertaistuu aikayksikössä, on a = 2 kaavassa (1). Tilillä 5 %:n korkoa kasvavan pääoman karttumista kuvaava malli taas saadaan, kun asetetaan a = 1.05. Yksinkertainen kasvumalli johtaa rajoittamattomaan eksponentiaaliseen kasvuun (x_0 on systeemin tila hetkellä t = 0):

(2) $x_t = x_0 \cdot a^t$.

Rajaton kasvu ei kuitenkaan ole juuri koskaan käytännössä mahdollinen. Belgialainen matematiikko **Pierre Verhulst** kehitti n. 150 vuotta sitten matemaattisen mallin, jossa kasvun rajallisuus on yksinkertaisella tavalla otettu huomioon. Verhulstin logistisen kasvumallin dynamiikkaa kuvaa yhtälö

(3) $x_t = a \cdot x_{t-1} \cdot (1-x_{t-1})$.

Systeemin tilaan liittyvä mittayksikkö on (3):ssa normitettu niin, että systeemin tilan maksimiarvo on 1. Malliin (1) verrattuna malliin (3) on tullut ”korjaustekijäksi” lauseke ($1-x_{t-1}$), joka huolehtii siitä, että kun systeemin tila lähestyy maksimiarvoaan 1, samanaikaisesti pienenevä tekijä ($1-x_{t-1}$) pitää kasvun kurissa.

Mallia (3) ei voida ratkaista analyyttisesti mallin (1) tapaan, on tyydyttävä numeeriseen ratkaisuun iteroimalla. Tämä käy helposti esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmalla tai jopa laskimella. Jos annetaan kasvukertoimelle a esimerkiksi arvo 1.5, saadaan alkutiloja x_0 = 0.2, 0.4 ja 0.7 vastaavat taulukon 1 kehitysurat.

Taulukko 1. Logistisen mallin tasapainoratkaisut eri alkuarvoilla

t	x_t (x_0 = 0.2)	x_t (x_0 = 0.4)	x_t (x_0 = 0.7)
0	0.200000	0.400000	0.700000
1	0.240000	0.360000	0.315000
2	0.273600	0.345600	0.323663
3	0.298115	0.339241	0.330808
...	...	...	...
14	0.333312	0.333336	0.333331
15	0.333322	0.333335	0.333332

Taulukosta 1 käy selvästi ilmi tulos, jonka mukaan käyttäytymislakia (3) noudattava systeemi saavuttaa alkutilastaan riippumatta aina saman tasapainotilan (=1/3), kun kasvukerroin a = 1.5. Systeemin sanotaan olevan *stabiili.* Voidaan osoittaa, että tämä tilanne on voimassa kaikilla kasvukertoimen arvoilla välillä 0 < a < 3 (saavutettava tasapainotila luonnollisesti riippuu a:n arvosta).

Kun kasvukerroin ylittää arvon 3, muuttuu systeemin käyttäytyminen ratkaisevasti. Kiinteän tasapainotilan saavuttamisen sijasta systeemistä tulee *jaksollinen:* tasapainoratkaisu hyppii kahden eri arvon välillä. Kasvukertoimen arvolla a = 3 systeemillä on *bifurkaatiopiste.* Mikäli a:ta edelleen kasvatetaan, tapahtuu arvolla a = 3.45 uusi bifurkaatio, jakson kahdentuminen uudelleen: tasapainoratkaisussa toistuvat neljä eri tilaa säännöllisinä peräkkäin.

Nämä jakson kahdentumiset jatkuvat tihenevästi, kunnes arvolla a = 3.6 systeemin käyttäytyminen muuttuu kaoottiseksi, siis kuviossa 1 esitetyn sarjan 3 kaltaiseksi (kuviossa 1 on a = 4). Kaoottinen alue 3.6 < a < 4 (logistisen funktion määrittely-yhtälö on tulkinnallisesti järkevä vain alueella 0 < a < 4) ei ole kuitenkaan yhtenäinen, välillä on mm. sellaisia jaksollisen käyttäytymisen alueita, joissa jaksoina ovat 3 ja sen kerrannaiset.

Systeemin tasapainoratkaisun muodostamaa pistejoukkoa kutsutaan *attraktoriksi.* Kaoottisella systeemillä attraktorin muodostava pistejoukko on ääretön. Sitä kutsutaan *oudoksi attraktoriksi.*

Dynaamiset systeemit ja kaaos-teoria tutkimusalueena

Vaasan yliopiston menetelmätieteiden laitoksella on pitkät perinteet dynaamisten systeemien tutkimisessa. Tämän kirjoittajan 1970-luvulla laatimat lisensiaatti- ja väitöskirjatutkimukset käsittelivät teollisten järjestelmien kunnossapito- ja luotettavuuskysymyksiä. Teoreettisena viitekehyksenä toimivat *stokastiset dynaamiset systeemit.* Kunnossapidon ja investointisuunnittelun yhteyksiä on tarkasteltu *optimiohjaus- eli kontrolliteorian* välineistöä hyväksi käyttäen. Viime vuosina kaaos-teoria on ollut keskeinen tutkimusalue. Laitoksen tutkimusperinteen mukaisesti kiinnostuksen kohteena ei ole niinkään itse kaaos-teoria, vaan sen hyväksikäyttö erityisesti talouteen liittyvien ilmiöiden mallintamisessa. Malli, jonka osana on kaoottinen käyttäytyminen, voi antaa yksinkertaisen ja helposti ymmärrettävän kuvauksen levottomalle ja epäsäännölliselle ilmiölle.

Laitoksella valmistui v. 1997 kaksi tohtorin väitöskirjaa, joissa molemmissa aiheena oli kaaos-teoria tai sen lähialue. Irma Luhdan väitöskirja (Luhta 1997) oli kaaos-teoreettinen sovellus markkinointiin, Matti Laaksosen työn (Laaksonen 1997) aiheena taas olivat kansantalouden suhdannevaihtelut.

Dynaaminen mainontamalli

Irma Luhdan väitöskirjassa on kehitetty dynaaminen mainontamalli, joka perustuu klassiseen Nerloven & Arrowín mainontapääomamalliin. Mallissa mainonta ajatellaan investoinniksi, joka kasvattaa yrityksen mainontapääomaa eli goodwillia. Ajatellaan, että ellei yritys mainosta, sen goodwill kuluu pois tietyllä nopeudella. Mainonta siis pitää yrityksen goodwillin dynamiikan liikkeellä. Mainonnan ja goodwillin välinen monimutkainen yhteys kuvataan mallissa takaisinkytkettynä systeeminä. Tutkimuksessa tarkastellaan sekä mainonnan välitöntä että viivästettyä vaikutusta goodwilliin. Pitkän aikavälin dynamiikka näissä kahdessa tapauksessa on hyvin erilaista. Viive lisää systeemin monimutkaisuutta. Mallintamisessa käytetään differenssiyhtälöitä eli diskreettiä mallia, joka kuvaa talouden diskreettiä päätöksentekoa hyvin.

Mallin dynamiikan formulointi perustuu olettamukseen markkinoiden kolmesta vaihtoehtoisesta käyttäytymismuodosta. Yksinkertaisin vaihtoehto on, että markka mainontaan lisää yrityksen googwilliä yhdellä yksiköllä. Tällainen lineaarinen yhteys jättää kuitenkin huomiotta ns. unohtamisefektin eli markka mainontaan saattaakin lisätä goodwilliä tietyn ajan kuluttua ykköstä pienemmällä määrällä eli mainonnan rajahyöty on vähenevä. Kolmanneksi voidaan ajatella, että goodwillillä on jokin saturaatiotaso, jota ei voida ylittää millään mainonnan määrällä.

Yrityksen kannalta on tärkeää, että systeemin tasapainogoodwill on stabiili, jotta yritys pystyy arvioimaan goodwilliänsä ja suunnittelemaan siihen johtavaa mainontapolitiikkaa. Mallissa epästabiilisuus johtaa joko suoraan jakson kahdentumisbifurkaatioiden (mainonnalla välitön vaikutus) tai Hopfin bifurkaatioiden (mainonnalla viivästetty vaikutus) kautta kaaokseen mallin parametrien muuttuessa yrityksen kannalta epäsuotuisaan suuntaan (esim. goodwillin kulumisnopeus kasvaa). Hopfin bifurkaatiossa tapahtuu repellointi-ilmiö eli yrityksen goodwill alkaa heilahdella syklisesti. Tilanne on kuitenkin rakenteellisesti stabiili ja tulkinnallisesti mielekäs taloudellisten ilmiöiden syklisyyden perusteella.

Luhdan tutkimuksessa on kehitetty laaja diagnostinen välineistö mallin kvalitatiivisen käyttäytymisen ja rakenteellisten muutosten kuvaamiseen numeerisesti ja graafisesti. Käytettyjä kaaosteorian menetelmiä ovat yksi- ja kaksiulotteiset bifurkaatiodiagrammit, Lyapunovin eksponentit sekä korrelaatiodimensio-tekniikat. Analyysit perustuvat simulaatio-ohjelmiin, joista erityisesti värikkäät bifurkaatiokuvat ovat uusi väline dynaamisen mallin käyttäytymisen visualisoinnissa.

Kansantalouden suhdannemallit

Matti Laaksosen väitöskirjatyön aiheena olivat kansantalouden suhdannevaihtelua kuvaavat mallit. Suhdannevaihtelu on yksinkertaistaen kuvattavissa muutaman päämuuttujan avulla. Yksinkertaistuksista huolimatta malli on perusteltu ja käyttökelpoinen: vaihtelun aiheuttajat ja muut keskeiset elementit ovat siinä mukana. Väitöskirjatyössä Laaksonen rajautui malleihin, jotka olivat voimakkaan epälineaarisia ja käyttäytymiseltään levottomia, mutta eivät kuitenkaan kaoottisia. Työssä kehitettiin matemaattisia työkaluja, joilla voidaan arvioida esim. suhdannevaihtelun odotettavissa olevaa voimakkuutta ilman, että on olemassa kovin yksityiskohtaista tietoa vaihtelun aiheuttajan käyttäytymisestä.

Väitöskirjan jatkotutkimuksessa malliin on tarkoitus lisätä uusia muuttujia, esimerkiksi verotus, jolloin malli voi saada myös kaoottisia käyttäytymismuotoja. Verotuksella täydennetty kansantulomalli voi esimerkiksi auttaa arvioimaan kansantuloa tai verokertymää eri suhdannevaiheissa tai eri voimakkuuksisten suhdanteiden vallitessa. Tässä yhteydessä kaaokseen ei liity, kuten ei kaaosteoriassa yleensäkään, mitään suurta dramatiikkaa tai katastrofaalisuutta. Matemaattisessa mielessä kaaos merkitsee vain tietynlaista havainnoitsijalle näkyvää epäsäännöllisyyttä, jonka kulkua hallitsevat kuitenkin selvät lainalaisuudet.

Lopuksi

Kaaos-teoria on yksi tämän päivän populaareimpia ja nopeimmin kehittyviä matematiikan osa-alueita. Suosio on helppo ymmärtää. Aihe kuuluu numeerisen, vieläpä kokeellisen matematiikan alueeseen. Tutkiminen vaatii tehokkaan laskentakapasiteetin omaavan tietokoneen, mutta käytettävät algoritmit ovat verraten yksinkertaisia. Taulukkolaskentaohjelman hyvä tuntemus vie jo pitkälle. Tulosten esittämiseen kehitetyt graafiset tekniikat: *fraktaalit, Mandelbrotin* ja *Julian joukot* sekä *Arnoldin kielet* ovat visuaalisesti näyttäviä, värikylläisessä kauneudessaan suorastaan häkellyttäviä. Niitä ihastellessaan voi matematiikkaa täysin tuntematonkin kokea nautittavia taide-elämyksiä. Matematiikan ja musiikin väliset yhteydet ovat vanhastaan tutut. *Fraktaaligeometria* on luonut uuden sillan matematiikan ja kuvaamataiteen välille.

Kirjallisuutta

Alligood K.T., Sauer T.D. & Yorke J.A. (1996). *Chaos; an Introduction to Dynamical Systems.* New York: Springer.

Kangasaho J., Mäkinen J., Oikkonen J., Paasonen J. & Salmela M. (1996). *Numeerinen matematiikka*. Porvoo: WSOY.

Laaksonen M. (1997). A nice portrait of restless systems - Uniqueness of the limit cycle of some Liénard equations. *Acta Wasaensia, No* 57.

Luhta I. (1997). Structural changes in a complex system: a chaos-analytic study of a nonlinear advertising policy. *Acta Wasaensia, No* 52.