

DYNAAMISET SYSTEEMIT
Harjoitus 1 / syksy 2001

1. Laske seuraavat derivaatat

- a) $D(x^2 - 5x + 5)$,
- b) $D(-e^{2x})$,
- c) $D(-\ln x)$ ja
- d) $D(\sin 2x + \cos x)$.

2. Laske seuraavat integraalit

- a) $\int(x^2 - 5x + 5)dx$,
- b) $\int(e^{2x})dx$,
- c) $\int(-\ln x)dx$ ja
- d) $\int(\sin 2x + \cos x)dx$.

3. Laske osittaisintegroinnin avulla seuraavat integraalit

- a) $\int(xe^x)dx$ ja
- b) $\int(x \sin x)dx$.

4. Integroi sijoituksen avulla seuraavat integraalit

- a) $\int(x\sqrt{x+1})dx$ ($x \geq -1$) ja
- b) $\int \sin(2x+3)dx$.

5. Osoita, että differentiaaliyhtälön

$$2(x')^2 + tx' - x = 0$$

yleinen ratkaisu on

$$x(t) = Ct + 2C^2.$$

Hae ko. Yhtälölle muotoa $x(t) = at^2 + bt + c$ oleva erikoisratkaisu. Esitä yleistä ratkaisua kuvaava käyräparvi graafisesti. Miten erikoisratkaisu sijoittuu tämän käyräparven suhteen?

6. Mitä tyyppiä on differentiaaliyhtälö

$$x' + (1-x^2) \tan(t) = 0?$$

Osoita, että $x(t) = (\cos^2 t - C) / (\cos^2 t + C)$ on sen yleinen ratkaisu.

DYNAAMISET SYSTEEMIT

Harjoitus 2 / syksy 2001

1. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt

a) $y' - 2y = 4$,

b) $y' + 3y = x$ ja

c) $y' + y = e^{-x}$.

2. Muodosta differentiaaliyhtälö seuraavista ehdoista.

a) Yrityksen tuotannon kasvunopeuden ja tuotannon arvon erotuksen ilmoittaa aina polynomi $q^4 + 5$.

b) Yrityksen tuotannon kasvunopeus on suoraan verrannollinen tuotannon arvon ja sen muuttujan q erotukseen. Verrannollisuuskerroin on $0,3$.

c) Yrityksen tuotannon kasvunopeuden ja tuotannon arvon summa noudattaa funktiota $\tan(q)$.

d) Yrityksen tuotannon kasvunopeus on suoraan verrannollinen tuotannon arvon neliöjuureen sekä funktion muuttujaan q . Verrannollisuuskerroin on e .

3. Määritä differentiaaliyhtälön

$$y' + 3y = 2$$

se ratkaisu, joka kulkee pisteen $(0,1)$ kautta.

4. Osoita, että seuraava differentiaaliyhtälö on eksakti ja ratkaise se

$$2xt^3 dx + 3x^2 t^2 dt = 0.$$

5. Hae muotoa x^k oleva integroitava tekijä differentiaaliyhtälölle

$$2(t+1)dx + 3xt^2 dt = 0$$

ja ratkaise näin syntyvä eksakti differentiaaliyhtälö.

DYNAAMISET SYSTEEMIT

Harjoitus 3 / syksy 2001

1. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt vakion variointi-menettelyllä
 - a) $x' - 2x = e^t$ ja
 - b) $x' - 2x = e^{2t}$.
2. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt määräämättömien kertoimien menettelyllä
 - a) $4x' + x = 2t^2 + t$ ja
 - b) $x' + x = \sin(2t)$.
3. Tarkastellaan taudin leviämistä yhteisöön, jonka asukasluku on M . Oletetaan, että kaikki yhteisön jäsenet sairastavat taudin. Oletetaan lisäksi, että taudin sairastanut tulee sille immuuniksi. Sairastuneiden määrä on suoraan verrannollinen tartunnan saaneiden ja tartunnan välttäneiden määrään. Verrannollisuuskerroin on $0,12$. Muodosta differentiaaliyhtälö, joka kuvaa tautiin sairastuneiden määrän muuttumista ajan suhteen.
4. Radiumin hajoamisnopeus on suoraan verrannollinen kulloinkin jäljellä olevaan massaan. Jos aineen puoliintumisaika (siis aika, jossa puolet alkuperäisestä massasta on hajonnut) on 30 minuuttia, kuinka suuri osa alkuperäisestä massasta on jäljellä $0,9$ tunnin kuluttua?
5. Yrityksen kiinteät tuotantonopeudesta riippumattomat kuukausittaiset kustannukset ovat 12000 (mk/kk) ja tuotantonopeudesta q (kpl/kk) riippuvat yksikkökustannukset (mk/kpl)
 $a(q) = 6,2 + 0,0003 q$.
Muodosta funktio, joka ilmoittaa yrityksen kuukausittaiset tuotantokustannukset. Määrää tuotantokustannusten muutosnopeus, kun tuotantonopeus on 1000 (kpl/kk).
6. Kesätapahtumassa hyttysten määrä oli tilaisuuden alussa 200 ja kolme tuntia myöhemmin 700. Hyttysten määrän kasvunopeus hetkellä t oli suoraan verrannollinen hyttysten määrään sillä hetkellä. Muodosta hyttysten määrää kuvaava differentiaaliyhtälömalli ja sen ratkaisuna määritä hyttysten määrä mielivaltaisena ajanhetkenä t . Mikä oli hyttysten määrä viiden tunnin kuluttua tilaisuuden alkamisesta?
7. Kaupungin väkiluku vuoden 1995 lopussa oli 32000. Kaupungin väliluvun $N(t)$ ennustamiseen käytetään matemaattista mallia $N'(t) = 0,016 N(t) + 150$. Malli perustuu oletukseen, että väkiluvun kasvu muodostuu kahdesta tekijästä: luontaisesta kasvusta, joka on suoraan verrannollinen väestön suuruuteen (verrannollisuuskertoimenä kasvuintensiteetti $0,016$), ja eksogeenisestä kasvusta (vuotuinen muuttovoitto 150 henkeä).
 - a) Etsi mallin (ratkaistu) matemaattinen malli.
 - b) Suuriko on vuotuinen kasvu vuodessa prosentteina ilmaistuna?
 - c) Ennusta mallin avulla kaupungin väkiluku vuoden 2010 lopussa.

DYNAAMISET SYSTEEMIT

Harjoitus 4 / syksy 2001

1. Kakkutaikina, jonka lämpötila on 21°C , pannaan paistumaan uuniin, joka pysyy vakiolämpötilassa 225°C . Kypsyvän kakun lämpötilan muutos aikayksikössä on suoraan verrannollinen uunin lämpötilan ja kakun lämpötilan erotukseen. Kymmenen minuutin kuluttua kakun lämpötila on 67°C . Määritä kakun lämpötila T ajan t funktiona. Määritä funktion $T(t)$ avulla kakun lämpötila 40 minuutin kuluttua sen uuniin panosta. Milloin uuniin unohtuneen kakun lämpötila saavuttaa mallin mukaan uunin lämpötilan?
2. Tallennetaan 30000 (mk) jatkuvakorkoiselle tilille, jonka korkokanta on 2 (%/vuosi). Tällä tilillä korko liitetään pääomaan jatkuvasti – ei esimerkiksi vuosittain, puolivuositain tai päivittäin. Muodosta funktio, joka ilmoittaa tilin saldon s (mk) ajan funktiona. Kuinka paljon tilillä on rahaa 3 vuoden kuluttua talletuksesta olettaen, että tililtä ei tänä aikana nosteta varoja eikä sinne talleteta lisää? Minkä ajan kuluttua tilin saldo on 50000 (mk)?
3. Uusi kodinkone saapuu markkinoille. Tarkastellaan tuotteen hankkineiden talousyksiköiden suhteellisen osuuden s muuttumista ajan t suhteen. Arvioidaan, että kaikkiaan 60% kaikista talouksista hankkii ko. kodinkoneen. Tämän lisäksi oletetaan, että kuukausittain koneen hankkii 1,5% niistä kotitalouksista, jotka eivät ole vielä hankkineet tätä konetta, mutta tulevat sen hankkimaan. Lähtöhetkellä yksikään kotitalous ei ole tuotetta hankkinut. Muodosta alkuarvotehtävä, jonka ratkaisuna saadaan kodinkoneen hankkineiden kotitalouksien suhteellinen osuus s ajan t funktiona ja ratkaise se.
4. Ratkaise seuraavat 2. kertaluvun lineaariset vakiokertoimiset differentiaaliyhtälöt:
 - a) $y'' + y' - 2y = 8$,
 - b) $y'' + y' - 2y = -\sin x$,
 - c) $y'' + 2y' + y = e^x$ ja
 - d) $y'' + 4y' + 5y = 20x^2$.
5. Etsi differentiaaliyhtälön $y'' + 2y' - 3y = x$ se ratkaisukäyrä, joka kulkee pisteen $(0,4)$ kautta ja jonka derivaatta on tässä pisteessä $= 0$.

DYNAAMISET SYSTEEMIT

Harjoitus 5 / syksy 2001

1. Erään differentiaaliyhtälön homegeeninen ratkaisu on

$$y(t) = e^{at} [4\cos(8t) - 3\sin(8t)].$$

- a) Piirrä kuva, kun $a = 0$.
- b) Piirrä kuva, kun $a = 1$.
- c) Piirrä kuva, kun $a = -1$.

Millainen heilahtelu on kyseessä kussakin kohdassa?

2. Etsi differentiaaliyhtälön $y'' + y' = 3e^{-x}$ yleinen ratkaisu ja alkuehdot $y(0)=0$ ja $y'(0)=0$ toteuttava yksityisratkaisu.

3. Ratkaise

$$y'' - y' - 2y = e^{-t}.$$

4. Ratkaise

$$y'''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 - 7x + 8.$$

5. Ratkaise 3. asteen differentiaaliyhtälö

$$y'''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

siten, että ratkaisukäyrä kulkee pisteen $(p, 0)$ kautta ja pisteessä p käyrän tangentti on vaakasuorassa ja y'' tässä pisteessä on 1.

6. Ratkaise

$$y'''' + y = e^{2x}.$$

DYNAAMISET SYSTEEMIT

Harjoitus 6 / syksy 2001

5. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöpari ”eliminointimenetelmällä”

$$x' = 4x - 5y - 12$$

$$y' = x - 2y.$$

6. Laske differentiaaliyhtälöpari matriisimenetelmällä

$$x' = x + 2y$$

$$y' = 4x + 3y.$$

7. Ratkaise seuraava differentiaaliyhtälöpari

$$x' = -3x + y$$

$$y' = -x - y.$$

Etsi yhtälöparille myös se ratkaisu, jolle $x(0)=1$ ja $x'(0)=0$.

8. Tarkastellaan seuraavaa kahden säiliön ja niiden kautta virtaavan nesteen muodostamaa järjestelmää.

1. Ylemmässä säiliössä on 100 gallonia suolaliuosta siten, että suolaa on siinä liunneena 25 lb (naulaa).

2. Alemmassa säiliössä on 200 gallonia puhdasta vettä.

3. Systemiin (=ylempään säiliöön) aletaan pumpata suolaliuosta, jossa on suolaa 1 naula gallonassa liuosta, nopeudella 3 gallonia/min.

4. Yläsäiliöstä virtaa liuosta alasäiliöön nopeudella 5 gallonia/min.

5. Alasäiliöstä pumpataan puolestaan siellä olevaa liuosta nopeudella 2 gallonia/min yläsäiliöön

6. ja ulos systeemistä liuosta virtaa nopeudella 3 gallonia/min.

7. Säiliöissä olevia liuksia sekoitetaan hyvin, joten niitä voidaan joka hetki pitää tasalaatuisina (suolapitoisuus sama koko säiliössä).

8. Olkoot $V_1(t)$ ja $V_2(t)$ säiliöissä olevat liuosmäärät hetkellä t sekä $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ säiliöiden suolamäärät.

Laadi differentiaaliyhtälöpareihin perustuvat mallit säiliöiden liuosmäärien kehitykselle ja ratkaise mallit. Mitkä ovat säiliöissä olevat suolamäärät pitkän ajan kuluttua?

DYNAAMISET SYSTEEMIT

Harjoitus 7 / syksy 2001

1. Ratkaise Eulerin menetelmällä yhtälö
 $y' = -32\sin(8x) - 24\cos(8x)$, kun
 - a) $h = 0,1$
 - b) $h = 0,01$ ja
 - c) $h = 0,001$.

2. Ratkaise Eulerin menetelmällä yhtälö
 $y' = 2 \cos(x) - y \cot(x)$, kun
 - a) $h = 0,1$
 - b) $h = 0,01$ ja
 - c) $h = 0,001$.

3. Approksimoi alkuarvoprobleeman
 $y' = xy, y(0)=2$
ratkaisua Eulerin menetelmällä, kun
 - a) $h = 0,1$
 - b) $h = 0,01$ ja
 - c) $h = 0,001$.

DYNAAMISET SYSTEEMIT

Harjoitus 8 / syksy 2001

1. Määritä seuraavat differenssit

- a) $(4t^2 + t)$
- b) $^2(4t^2 + t)$
- c) $^3(4t^2 + t)$

2. Etsi differenssiyhtälön

$$y_{t+1} - y_t = t + 2$$

yleinen ratkaisu sekä alkuehdon $y_0 = 1$ toteuttava yksityisratkaisu.

3. Osoita, että edellisen tehtävän yksityisratkaisu on myös yhtälön

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 1$$

eräs ratkaisu.

4. Ratkaise seuraava differenssiyhtälö

$$y_t + 1,8 y_{t-1} + 0,8 y_{t-2} = 0, \text{ kun } y_0 = 0 \text{ ja } y_1 = -2.$$

5. Börje otti 400 000 mk:n asuntolainan 5 %:n vuosikorolla annuiteettiperiaatteella (eli koron ja lainan yhteissumma on kuukausittain sama) 25 vuodeksi. Paljonko Börje joutuu kaikkiaan maksamaan lainastaan?

6. Olkoon kysyntä- ja tarjontafunktiot seuraavat:

$$D_t = 100 - 2p_t,$$

$$S_t = -20 + 3p_{t-1}.$$

On etsittävä tasapainohinta ja tutkittava, onko tasapaino stabiili vai ei. Olkoon hinnan alkuarvo $p_0 = 25$.

7. Ratkaise kansantulomalli,

$$Y_t = C_t + I_t + G$$

$$C_t = C_0 + (1 - s) Y_{t-1}$$

$$I_t = I,$$

missä Y_t = kansantulo vuonna t (~palkkakertymä), C_t = kulutus, I_t = investoinnit (oletetaan nyt siis vakioksi I), s = säästämistä, C_0 = minimikulutus (vakio) ja G = julkinen kulutus (vakio). Tutki myös ratkaisun luonnetta.