

DYNAAMISET SYSTEEMIT kevät 2000

1. harjoitukset, viikko 3

1. Mitkä seuraavista differentiaaliyhtälöistä ovat lineaarisia?

- a) $x' = t^2$
- b) $x'' + t^3 x' = t$
- c) $x'' x' = x$
- d) $x'' - (x')^2 = 0$
- e) $e^t x'' + e^t x = (1-t^2)^{1/2}$
- f) $(x')^2 = x^2$

2. Määritä seuraavien differentiaaliyhtälöiden tyyppi (kertaluku, lineaarinen vai ei-lineaarinen, jos lineaarinen, niin vakiokertoiminen vai ei-vakiokertoiminen:

- a) $y'' + y - x^2 = 0$
- b) $y' + xy + 2x = 0$
- c) $y'' + \cos y = 0$
- d) $x^2 y'' + xy' + x^2 - 1 = 0$
- e) $y'' + x (y')^2 y - 7 = 0$
- f) $y' = (\sin x) y + e^x$
- g) $y' = 0$
- h) $(y' - x)^2 - 2xy' + x^2$

3. Osoita, että differentiaaliyhtälön $2(x')^2 + tx' - x = 0$ yleinen ratkaisu on $x(t) = Ct + 2C^2$. Hae ko. yhtälölle muotoa $x(t) = at^2 + bt + c$ oleva erikoisratkaisu.

4. Osoite, että differentiaaliyhtälön $\sin x' = tx' - x$ yleinen ratkaisu on $x(t) = Ct - \sin C$ ja että ko. yhtälöllä on erikoisratkaisuna $x(t) = t \arccos(t) - (1-t^2)^{1/2}$.

5. Mitä tyyppiä on differentiaaliyhtälö $x' + (1-x^2) \tan(t) = 0$? Osoita, että $x(t) = (\cos^2 t - C) / (\cos^2 t + C)$ on sen yleinen ratkaisu.

6. Määritä, mitkä seuraavista differentiaaliyhtälöistä ovat separoituvia ja ratkaise ne:

- a) $y' = x/y$
- b) $y' = x/y + 1$
- c) $\sin x dx + y^2 dy = 0$
- d) $(1 + xy) dx + y dy = 0$
- e) $x y^2 dx - x^2 y^2 dy = 0$

DYNAAMISET SYSTEEMIT kevät 2000

2. harjoitukset, viikko 4

1. Määritä differentiaaliyhtälön $y' + 3y = 2$ se ratkaisu, jonka kuvaaja kulkee pisteen (0,1) kautta.
2. Ratkaiset tasa-asteiset differentiaaliyhtälöt
 - a) $t x' = t + x$
 - b) $(t^2 + x^2) x' = t x$.
3. Osoita, että seuraavat differentiaaliyhtälöt ovat eksakteja ja ratkaise ne
 - a) $2x t^3 dx + 3x^2 t^2 dt = 0$
 - b) $dx/dt + [x(1 + 2t)] / [t(1 + t)] = 0$.
4. Hae muotoa x^k oleva integroiva tekijä differentiaaliyhtälölle $2(t^3 + 1) dx + 3x t^2 dt = 0$ ja ratkaise syntyvä eksakti differentiaaliyhtälö.
5. Kaupungin väkiluku vuoden 1955 lopussa oli 32 000. kaupungin väkiluvun $N(t)$ ennustamiseen käytetään matemaattista mallia $N'(t) = 0,016 N(t) + 150$. Malli perustuu oletukseen, että väkiluvun kasvu muodostuu kahdesta tekijästä: luontaisesta kasvusta, joka on suoraan verrannollinen väestön suuruuteen (verrannollisuuskertoimena kasvuintensiteetti 0,016), ja eksogeenisestä kasvusta (vuotuinen muuttovoitto 150 henkeä).
 - a) Etsi mallin (ratkaisu) matemaattinen muoto.
 - b) Suuriko on luontainen kasvu vuodessa prosentteina ilmaistuna?
 - c) Ennusta mallin avulla kaupungin väkiluku vuoden 2010 lopussa.
6. Mm. videopelejä maahan tuova ja niitä pelihalleihin, ravintoloihin, baareihin ja kerhotiloihin markkinoiva yritys arvioi, että uuden sukupolven pelille olisi Suomessa elintila 4000 kappaletta. Ensimmäisessä vaiheessa markkinoille tuli 720 peliä. Neljän kuukauden kuluttua käytössä oli jo 1500 peliä. Yritys arvioi, että pelien lisääntyminen hidastuu, kun lähestytään arvioitua enimmäismäärää. Myynnin kehityksen arvioimiseksi käytetään mallia, jonka mukaan pelimyynnin kasvunopeus on suoraan verrannollinen saturaatorajan 4000 ja jo käytössä olevien pelien lukumäärän erotukseen.
 - a) Muodosta tämän oletuksen mukainen (jatkuva) malli pelien lukumäärälle t kuukauden kuluttua toiminnan aloittamisesta.
 - b) Suureksiko käytössä olevien pelien lukumäärää voidaan mallin perusteella arvioida b1) 1 vuoden, b2) kahden vuoden kuluttua uutuspelin markkinoille tulon jälkeen?
7. Kun jäälohkare, jonka lämpötila on 0°C , tuodaan lämpimään, se alkaa heti sulaa. Jos ympäristön lämpötila ja ilmanpaine pysyvät samana ja jos ei tuule, niin kappaleen sulamisnopeus hetkellä t on likimain suoraan verrannollinen kappaleen pinnan alaan hetkellä t . Viiden tunnin aikana kuutionmuotoisen jääpalan tilavuus pienenee 10 dm^3 :sta $8,0\text{ dm}^3$:iin. Missä ajassa kuutio sulaa kokonaan?

DYNAAMISET SYSTEEMIT kevät 2000

3. harjoitukset, viikko 5

1. Ratkaise differentiaaliyhtälöt a) - b) vakion varioinnilla ja c) - d) määräämättömien kertoimien menettelyllä

a) $x' - 2x = e^t$

b) $x' - 2x = e^{2t}$

c) $4x' + x = 2t^2 + t$

d) $x' + x = \sin 2^t$

2. Erään radioaktiivisen aineen hajoamisnopeus on suoraan verrannollinen aineen tämän hetkiseen massaansa. Jos aineen puoliintumisaika on 30 minuuttia, kuinka suuri osa alkuperäisestä massasta on jäljellä 0,9 tunnin kuluttua?

3. a) Jos tuotteen valmistamisen rajakustannukset saadaan yhtälöstä.

$$dy/dx = y' = 3 + x + e^{-x} / 4,$$

kuinka suuri kustannus aiheutuu yhden tuotteen valmistamisesta, kun kiinteät kustannukset ovat \$4?

b) Tuotteen rajatuotot suhteessa myyntiin (kuinka paljon tulot lisääntyvät, kun myydään yksi tuote enemmän) saadaan yhtälöstä

$$dR / dx = 4x^2 - 3x - 0.2.$$

Paljonko tuloja kertyy 5 tuotteen myynnistä?

4. Ratkaise Bernoullin yhtälö

$$t^2 x' = x^2 + tx.$$

5. Ratkaise seuraavat 2. kertaluvun lineaariset vakiokertoimiset differentiaaliyhtälöt:

a) $y'' + y' - 2y = 8$

b) $y'' + y' - 2y = -\sin x$

c) $y'' + 2y' + y = e^x$

d) $y'' + 4y' + 5y = 20x^2$

DYNAAMISET SYSTEEMIT kevät 2000

4. harjoitukset, viikko 6

1. Etsi differentiaaliyhtälön $y'' + 2y' - 3y = x$ se ratkaisukäyrä, joka kulkee pisteen (0,4) kautta ja jonka derivaatta tässä pisteessä = 0.
2. Määritä yhtälölle $y'' - 4y = 10 - 0.1 \cdot x$ ratkaisu, joka kulkee pisteen (0,5) kautta ja joka lähestyy trendiä $x:n$ kasvaessa rajatta (mikä tämä trendi on)?
3. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $y'' + ay' + y = 10$. Millä $a:n$ arvoilla yleinen ratkaisu konvergoi värähdellen ja mitä arvoa kohti se tällöin suppenee?

4. Ratkaise

- a) täydellisesti differentiaaliyhtälö

$$y'' + 3y' + 2y = 10 \sin x$$

- b) 3. asteen differentiaaliyhtälö

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

siten, että ratkaisukäyrä kulkee pisteen $(\pi, 0)$ kautta ja kohdassa $x = \pi$ käyrän tangentti on vaakasuorassa ja y'' on tässä kohdassa = 1.

5. Ratkaise ”eliminointimenetelmällä ” differentiaaliyhtälöpari

$$\dot{x} = 4x - 5y - 12$$

$$\dot{y} = x - 2y.$$

DYNAAMISET SYSTEEMIT kevät 2000

5. harjoitukset, viikko 7

1. Ratkaise seuraava differentiaaliyhtälöpari matriisimenetelmällä

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y \\ \dot{y} &= 4x + 3y\end{aligned}$$

2. Ratkaise seuraava differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -3x + y \\ \dot{y} &= -x - y.\end{aligned}$$

Etsi yhtälöparille myös se yksityisratkaisu, jolle $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$. Onko yhtälöryhmän (yleinen) ratkaisu stabiili?

3. Oletetaan, että tuotteen hinta markkinoilla on P ja tuotetta on varastossa määrä Q . Tuotteen kysyntä määräytyy yhtälöstä

$$C = a_1 - b_1P$$

ja tarjonta yhtälöstä

$$S = -a_2 + b_2P.$$

Tuotteen varastossa olevan määrän Q muutosnopeus \dot{Q} määräytyy valmistuksen ja kulutuksen erotuksena, ts.

$$\dot{Q} = S - C.$$

varasto pyritään pitämään keskimäärin vakiona $Q = \bar{Q}$ ja samoin hinta; keskimäärin $P = \bar{P}$. Hintaa voidaan ohjailta ja hinnan muutos määräytyy yhtälön

$$\dot{P} = A(\bar{Q} - Q) + B(\bar{P} - P)$$

mukaan. Kaikki parametrit ovat positiivisia. Millainen B :n täytyy olla, jotta systeemi olisi dynaamisesti stabiili? Mitä arvoja P lähestyy systeemin vakiintuessa? Entä Q ?

4. Ratkaise numeerisesti Eulerin menetelmää käyttäen seuraava differentiaaliyhtälö

$$y' = y - x; \quad y(0) = 2.$$

Käytä askelvälinä $h = \frac{1}{4}$ ja etene esim. $y(1) = ??$ saakka. Etsi differentiaaliyhtälölle myös täsmällinen ratkaisu ja tutki, miten paljon epätarkkuutta numeerinen ratkaisu sisältää.

DYNAAMISET SYSTEEMIT kevät 2000

6. harjoitukset, viikko 8

1. Määritä "kaikkien kertalukujen" differenssit funktiolle $f_t = 2t^3 - t^2 + 3t - 5$.
2. Ratkaise differenssiyhtälö $2\Delta y_t + 3y_t = 6$. Onko ratkaisu stabiili?
3. Olkoon S_n n:n ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun neliöiden summa. Muodosta differenssiyhtälö S_n :lle ja etsi tämän ratkaisuna S_n :n yleinen lauseke.
4. Ratkaise differenssiyhtälö $8y_{t+2} - 2y_{t+1} - y_t = 2t + 3$.
5. Etsi differenssiyhtälölle $2y_{t+2} + 3y_{t+1} - 2y_t = 0$ jokin stabiili yksityisratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y_0 = 10$.
6. Ekonomisti lähetti faksilla työryhmälensä kommentoitavaksi laatimansa kysyntä-tarjonta -mallin. Mallin muuttujat ovat: P_t = tuotteen hinta, D_t = tuotteen kysyntä ja S_t = tuotteen tarjonta. Faksin huonon laadun takia vastaanottajat eivät voineet olla varmoja mallin merkeistä. Kolme henkilöä tulkitsi faksin eri tavoin. Nämä kolme tulkintaa olivat:

$$\begin{array}{ll} P_{t+1} = P_t + 0,2(S_t + D_t) & P_{t+1} = P_t - 0,2(S_t - D_t) \\ S_t = -30 + 0,3P_t & S_t = -30 + 0,3P_t \\ D_t = 120 - 0,5P_t & D_t = 120 - 0,5P_t \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P_{t+1} = P_t + 0,2(S_t - D_t) \\ S_t = -30 + 0,3P_t \\ D_t = 120 - 0,5P_t \end{array}$$

Onko joku malleista mielestäsi oikein? Perustele jokaisen termin merkki. Määritä oikeasta mallista hinta P_t ja tasa-arvonhintaa, jota hinta lähestyy.

DYNAAMISET SYSTEEMIT kevät 2000

7. harjoitukset, viikko 8

1. Määritä seuraavat differenssit

$$\Delta(4t^2 + t)$$

$$\Delta^2(4t^2 + t)$$

$$\Delta^3(4t^2 + t).$$

2. Ratkaise kansantulomalli

$$Y_t = C_t + I_t + G$$

$$C_t = c_0 + (1 - s)Y_{t-1}$$

$$I_t = I$$

missä Y_t = kansantulo vuonna t (\sim palkkakertymä), C_t = kulutus, I_t = investoinnit (oletetaan nyt siis vakioksi I), s = säästämistä, c_0 = minimikulutus (vakio) ja G = julkinen kulutus (vakio). Tutki myös ratkaisun luonnetta.

3. Oletetaan, että tuotteen kysyntä (kulutus) C_t riippuu hinnasta P_t lain

$$C_t = 100 - 0,3 P_t$$

mukaisesti. Tuotteen valmistajat reagoivat myös nopeasti hintamuutoksiin, niin että tarjonta (valmistus) S_t on saman kauden hinnan P_t funktio:

$$S_t = 50 + 0,2 P_t.$$

Valmistajien varastoissa olevan tuotteen määrän Q_t muutos ΔQ_t määräytyy valmistuksen ja kulutuksen erotuksena, ts.

$$\Delta Q_t = S_t - C_t.$$

Hinnan P_t muutoksen ΔP_t oletetaan olevan suoraan verrannollinen yritysten varastojen muutokseen:

$$\Delta P_t = -0,2 \Delta Q_t.$$

Tutki, miten P_t , S_t , C_t ja Q_t käyttäytyvät ajan funktioina. Mitä arvoja P_t , S_t , C_t ja Q_t lähestyvät pitkän ajan kuluessa? Onko mallin ratkaisu stabiili?

4. Kakkutaikina, jonka lämpötila on 21°C , pannaan paistumaan uuniin, joka pysyy vakio- lämpötilassa 225°C . Kypsyvän kakun lämpötilan muutos aikayksikössä on suoraan verrannollinen uunin lämpötilan ja kakun lämpötilan erotukseen. Kymmenen minuutin kuluttua kakun lämpötila on 67°C . Määritä kakun lämpötila T ajan t funktiona. Määritä funktion $T(t)$ avulla kakun lämpötila 40 minuutin kuluttua sen uuniin panemisesta. Milloin uuniin unohtuneen kakun lämpötila saavuttaa mallin mukaan uunin lämpötilan?

5. Muodosta auton jälleenmyyntiarvolle erilaisia differenssiyhtälömalleja ja tutki niiden ratkaisujen ominaisuuksia:

- a) Oletetaan, että vuotuinen hinnanalennus säilyy suhteellisesti vakiona (”menojäännös-poistomalli”).
- b) Oletetaan, että auton hinta koostuu vakiona pysyvästä romuarvosta ja käyttöarvosta, joka muuttuu a) -kohdan mukaisesti.
- c) Oletetaan, että vuotuinen hintamuutos koostuu kahdesta komponentista, a) -kohdan mukaisesta ”kulumasta” ja huolto- ja korjaustöiden tuomasta kulun hidastavasta lisäarvosta (oletetaan vakioksi).