VAASAN YLIOPISTO
Talousmatematiikka
Ilkka Virtanen / Irma Luhta

DYNAAMISET SYSTEEMIT 1998

1. harjoitus, viikko 3

1. Määritä seuraavien differentiaaliyhtälöiden tyyppi (kertaluku, lineaarinen – ei-lineaarinen, jos lineaarinen, niin vakiokertoiminen – ei-vakiokertoiminen):

   a) $y'' + y - x^2 = 0$
   b) $y' + xy + 2x = 0$
   c) $y''' + \cos y = 0$
   d) $x^2 y'' + xy' + x^2 - 1 = 0$
   e) $y'' + x (y')^2 + y - 7 = 0$
   f) $y' = (\sin x)\, y + e^x$
   g) $y' = 0$
   h) $(y' - x)^2 = (y')^2 - 2xy' + x^2$

2. Osoita, että funktio $y = C e^{x^3} + \frac{1}{x}$, missä C on mielivaltainen vakio, on differentiaaliyhtälön $y' - 3x^2 y = -\frac{1}{x^2} - 3x$ ratkaisu.

3. Määritä, mitkä seuraavista differentiaaliyhtälöistä ovat separoituvia ja ratkaise ne:
   a) $y' = x / y$
   b) $y' = x / y + 1$
   c) $\sin x\, dx + y^2\, dy = 0$
   d) $(1 + xy)\, dx + y\, dy = 0$
   e) $x y^2\, dx - x^2 y^2\, dy = 0$

4. Määritä seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut sekä annetut alkuehdot toteuttavat yksityisratkaisut:
   a) $e^{-x^2} y' = -x$; $y(1) = 0$
   b) $y' + 5 x^4 y^2 = 0$; $y(0) = 1$

5. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt:

   a) $x^2 y' - y = 0$
   b) $y' - \dfrac{x^2 + 1}{y^2 + y} = 0$
   c) $x y' - y = x$
   d) $2xyy' = 3 y^2 - x^2$

VAASAN YLIOPISTO
Talousmatematiikka
Ilkka Virtanen / Irma Luhta

DYNAAMISET SYSTEEMIT 1998

2. harjoitus, viikko 4

6. Ratkaise seuraavat 1. kertaluvun lineaariset vakiokertoimiset differentiaaliyhtälöt:
   a) $y' - 2y = 4$
   b) $y' + 3y = x$
   c) $y' + y = e^{-x}$

7. Määritä differentiaaliyhtälön $y' + 3y = 2$ se ratkaisu, jonka kuvaaja kulkee pisteen (0,1) kautta.

8. Osoita, että funktio $y = -x^4 - 4$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $y' - x^3 y = x^7$. Mikä on tämän yhtälön yleinen ratkaisu?

9. Kaupungin väkiluku vuoden 1995 lopussa oli 32 000. Kaupungin väkiluvun $N(t)$ ennustamiseen käytetään matemaattista mallia $N'(t) = 0{,}016\, N(t) + 150$. Malli perustuu oletukseen, että väkiluvun kasvu muodostuu kahdesta tekijästä: luontaisesta kasvusta, joka on suoraan verrannollinen väestön suuruuteen (verrannollisuuskertoimena kasvuintensiteetti 0,016), ja eksogeenisestä kasvusta (vuotuinen muuttovoitto 150 henkeä).

   a) Etsi mallin (ratkaistu) matemaattinen muoto.
   b) Suuriko on luontainen kasvu vuodessa prosentteina ilmaistuna?
   c) Ennusta mallin avulla kaupungin väkiluku vuoden 2010 lopussa.

10. Mm. videopelejä maahan tuova ja niitä pelihalleihin, ravintoloihin, baareihin ja kerhotiloihin markkinoiva yritys arvioi, että uuden sukupolven pelille olisi Suomessa elintilaa 4000 kappaleelle. Ensimmäisessä vaiheessa markkinoille tuli 720 peliä. Neljän kuukauden kuluttua käytössä oli jo 1500 peliä. Yritys arvioi, että pelien lisämyynti hidastuu, kun lähestytään arvioitua enimmäismäärää. Myynnin kehityksen arvioimiseksi käytetään mallia, jonka mukaan pelimyynnin kasvunopeus on suoraan verrannollinen saturaatiorajan 4000 ja jo käytössä olevien pelien lukumäärän erotukseen.

    a) Muodosta tämän oletuksen mukainen (jatkuva) malli pelien lukumää–rälle t kuukauden kuluttua toiminnan aloituksesta.
    b) Suureksiko käytössä olevien pelien lukumäärä voidaan mallin perusteella arvioida b1) 1 vuoden, b2) kahden vuoden kuluttua uutuuspelin markkinoille tulon jälkeen?

11. Määritellään

$R(t)$ = auton kumulatiiviset käyttökustannukset hetkellä t; $R(0) = 0$,
$S(t)$ = auton jälleenmyyntiarvo hetkellä t; $S(0) = S_0$ (ostohinta).

Oletetaan, että käyttökustannusten ja jälleenmyyntiarvon kehitykset noudattavat lakeja

$$\frac{dR}{dt} = \frac{a}{S(t)}, \qquad a \text{ on vakio ja } > 0,$$

$$\frac{dS}{dt} = -b\,S(t), \qquad b \text{ on vakio ja } > 0.$$

a) Perustele mallia (yksinkertaisuudestaan huolimatta laadullisesti järkevä).
b) Ratkaise $S(t)$ jälkimmäisestä yhtälöstä.
c) Kun $S(t)$ on tunnettu, voidaan myös $R(t)$ ratkaista ensimmäisestä yhtälöstä.

VAASAN YLIOPISTO
Talousmatematiikka
Ilkka Virtanen / Irma Luhta

DYNAAMISET SYSTEEMIT 1998

3. harjoitus, viikko 5

12. Ratkaise seuraavat 2. kertaluvun lineaariset vakiokertoimiset differentiaaliyhtälöt:

 a) $y'' + y' - 2y = 8$
 b) $y'' + y' - 2y = -\sin x$
 c) $y'' + 2y' + y = e^x$
 d) $y'' + 4y' + 5y = 20\,x^2$

13. Muotoa $x^2\,y'' + a\,x\,y' + b\,y = 0$, missä a ja b ovat vakioita, olevaa 2. kertaluvun differenssiyhtälöä kutsutaan Cauchyn differentiaaliyhtälöksi. Yhtälö voidaan palauttaa sijoituksella $x = e^z$ eli $z = \ln x$ (jolloin saadaan 1. derivaatalle y' lauseke $y' = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{1}{x}$ ja 2. derivaatalle y'' lauseke vastaavasti) vakiokertoimiseksi differentiaaliyhtälöksi. Muunnoksen jälkeen ratkaistaan siis ensin $y = y(z)$ ja lopuksi palautetaan x takaisin riippumattomaksi muuttujaksi. Ratkaise näin Cauchyn DY $x^2\,y'' - 3\,x\,y' + 4\,y = 0$.

14. Etsi differentiaaliyhtälön $y'' + 2\,y' - 3\,y = x$ se ratkaisukäyrä, joka kulkee pisteen (0,4) kautta ja jonka derivaatta tässä pisteessä = 0.

15. Määritä yhtälölle $y'' - 4\,y = 10 - 0.1{\cdot}x$ ratkaisu, joka kulkee pisteen (0,5) kautta ja joka lähestyy trendiä x:n kasvaessa rajatta (mikä tämä trendi on)?

16. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $y'' + a\,y' + y = 10$.

 a) Millä a:n arvoilla yleinen ratkaisu konvergoi värähdellen ja mitä arvoa kohti se tällöin suppenee?
 b) Olkoon $a = -2$. Onko tällöin olemassa yksityisratkaisua, joka konvergoi?

VAASAN YLIOPISTO
Talousmatematiikka
Ilkka Virtanen / Irma Luhta

DYNAAMISET SYSTEEMIT 1998

4. harjoitus, viikko 6

17. Ratkaise “eliminointimenetelmällä” differentiaaliyhtälöpari

$$\dot{x} = 4x - 5y - 12$$
$$\dot{y} = x - 2y.$$

18. Ratkaise edellinen tehtävä myös kerroinmatriisin ominaisarvojen avulla. Vertaa kahta eri karakteristista yhtälöä (eliminointimenetelmällä syntyvän toisen kl. DY:n karakteristinen yhtälö, yhtälöparin ominaisarvotehtävän karakteristinen yhtälö) toisiinsa. Onko DY-parin ratkaisu stabiili?

19. Ratkaise seuraava differentiaaliyhtälöpari

$$\dot{x} = -3x + y$$
$$\dot{y} = -x - y.$$

Etsi yhtälöparille myös se yksityisratkaisu, jolle $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$. Onko yhtälöryhmän (yleinen) ratkaisu stabiili?

20. Oletetaan, että tietyillä hyödykemarkkinoilla tietyn tarkasteltavan tuotteen kysyntä (kulutus) C riippuu hinnasta P lain

$$C = a - b \cdot P \qquad (b > 0)$$

mukaisesti. Tuotteen valmistajat reagoivat myös nopeasti hintamuutoksiin, niin että tarjonta (valmistus) S on hinnan P funktio:

$$S = c + d \cdot P \qquad (d > 0).$$

Tuotteen varastoissa olevan määrän Q muutosnopeus $\dot{Q}$ määräytyy valmistuksen ja kulutuksen erotuksena, ts.

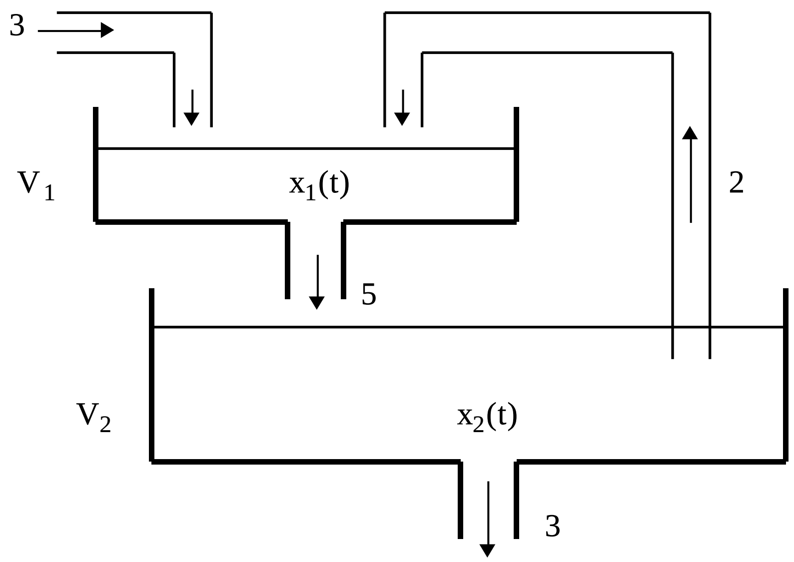
$$\dot{Q} = S - C.$$

Hinnan P muutosnopeuden $\dot{P}$ oletetaan olevan suoraan verrannollinen siihen määrään, jolla teollisuuden varastot ylittävät tietyn tavoitetason Q_e, ts.

$$\dot{P} = -k(Q - Q_e) \qquad (k > 0).$$

Tutki, miten P, S, C ja Q käyttäytyvät ajan funktioina (ohje: lähde liikkeelle viimeisestä yhtälöstä derivoimalla se ajan suhteen ja eliminoimalla ensin $\dot{Q}$ ja sitten S ja C; päädyt lopulta 2. kertaluvun yhtälöön P:lle).

21. Tarkastellaan kahden säiliön ja niiden kautta virtaavan nesteen muodostamaa järjestelmää. Ylemmässä säiliössä on 100 gallonaa suolaliuosta siten, että



suolaa siinä on liuenneena 25 lb (naulaa). Alemmassa säiliössä on 200 gallonaa puhdasta vettä. Systeemiin (= ylempään säiliöön) aletaan pumpata suolaliuosta, jossa on suolaa 1 naula gallonassa liuosta, nopeudella 3 gall./min. Yläsäiliöstä virtaa liuosta alasäiliöön nopeudella 5 gall./min. Alasäiliöstä pumpataan puolestaan siellä olevaa liuosta nopeudella 2 gall./min. yläsäiliöön ja ulos systeemistä liuosta virtaa nopeudella 3 gall./min. Säiliöissä olevia liuoksia sekoitetaan hyvin, joten niitä voidaan joka hetki pitää tasalaatuisina (= suolapitoisuus sama koko säiliössä). Olkoot V_1 (t) ja V_2 (t) säiliöissä olevat liuosmäärät hetkellä t sekä x_1 (t) ja x_2 (t) säiliöiden suolamäärät. Laadi differentiaaliyhtälöpareihin perustuvat mallit säiliöiden liuosmäärien ja suolamäärien kehitykselle ja ratkaise mallit. Mitkä ovat säiliöissä olevat suolamäärät pitkän ajan kuluttua?

VAASAN YLIOPISTO
Talousmatematiikka
Ilkka Virtanen / Irma Luhta

DYNAAMISET SYSTEEMIT 1998

5. ja 6. harjoitus, viikot 7 ja 8

22. Määritä “kaikkien kertalukujen” differenssit funktiolle $f_t = 2t^3 - t^2 + 3t - 5$.

23. Ratkaise differenssiyhtälö $2\,\Delta y_t + 3\,y_t = 6$. Onko ratkaisu stabiili?

24. Olkoon S_n n:n ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun neliöiden summa. Muodosta differenssiyhtälö S_n :lle ja etsi tämän ratkaisuna S_n :n yleinen lauseke.

25. Ratkaise differentiaaliyhtälö $8\,y_{t+2} - 2\,y_{t+1} - y_t = 2t + 3$.

26. Etsi differentiaaliyhtälölle $2\,y_{t+2} + 3\,y_{t+1} - 2\,y_t = 0$ jokin stabiili yksityisratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y_0 = 10$. Onko ratkaisu yksikäsitteinen?

27. a) Etsi differentiaaliyhtälön $y_{t+1} - y_t = t + 2$ yleinen ratkaisu sekä alkuehdon $y_0 = 1$ toteuttava yksityisratkaisu.
    b) Osoita, että a)-kohdan yksityisratkaisu on myös yhtälön $y_{t+2} - 2\,y_{t+1} + y_t = 1$ eräs ratkaisu.
    c) Etsi b) -kohdan tehtävän yleinen ratkaisu.

28. Tarkastellaan kerran vuodessa kuoletettavaa tasakuoletuslainaa. Määritä lainan takaisinmaksuun liittyvät vuotuiset korkomaksut, kuoletukset, kokonaisvuosimaksut ja lainajäännökset. Suureksiko muodostuu maksettavaksi tulevien korkomaksujen kokonaismäärä?

29. Ratkaise kansantulomalli

$$\begin{cases} Y_t = C_t + I_t + G \\ C_t = c_0 + (1 - s)Y_{t-1} \\ I_t = I \end{cases}$$

missä Y_t = kansantulo vuonna t (~ palkkakertymä), C_t = kulutus, I_t = investoinnit (oletetaan nyt siis vakioksi I), s = säästämisaste, c_0 = minimkulutus (vakio) ja G = julkinen kulutus (vakio). Tutki myös ratkaisun luonnetta.

30. Oletetaan, että tietyillä hyödykemarkkinoilla tietyn tarkasteltavan tuotteen kysyntä (kulutus) kaudella t (= C_t) riippuu hinnasta P_t lain

$$C_t = a - b \cdot P_t \quad (b > 0)$$

mukaisesti. Tuotteen valmistajat reagoivat hintamuutoksiin niin, että tarjonta (valmistus) S_t on edellisen kauden hinnan P_{t-1} funktio:

$$S_t = c + d \cdot P_{t-1} \qquad (d > 0).$$

Tuotteen varastoissa olevan määrän Q muutos ΔQ_t määräytyy valmistuksen ja kulutuksen erotuksena, ts.

$$\Delta Q_t = S_t - C_t.$$

Hinnan P muutoksen ΔP_t oletetaan olevan suoraan verrannollinen siihen määrään, jolla teollisuuden varastot ylittävät tietyn tavoitetason Q_e, ts.

$$\Delta P_t = - k (Q_t - Q_e) \qquad (k > 0).$$

Tutki, miten P, S, C ja Q käyttäytyvät ajan funktioina. Huomaa, että malli on diskreetti versio tehtävän 20 jatkuvasta mallista (lisäksi erona on tarjonnan viivästetty riippuvuus hinnasta).

31. Muodosta auton jälleenmyyntiarvolle erilaisia differenssiyhtälömalleja ja tutki niiden ratkaisujen ominaisuuksia:

a) Oletetaan, että vuotuinen hinnanalennus säilyy suhteellisesti vakiona (“menojäännöspoistomalli”).

b) Oletetaan, että auton hinta koostuu vakiona pysyvästä romuarvosta ja käyttöarvosta, joka muuttuu a) -kohdan mukaisesti.

c) Oletetaan, että vuotuinen hintamuutos koostuu kahdesta komponentista, a) -kohdan mukaisesta “kulumasta” ja huolto- ja korjaustöiden tuomasta kulumaa hidastavasta lisäarvosta (oletetaan vakioksi).