VAASAN YLIOPISTO
Talousmatematiikka
Prof. Ilkka Virtanen

DYNAAMISET SYSTEEMIT ORMS.2010

Tentti 28.2.2008

1. Osoita, että funktio $y = -t^4 - 4$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $y' - t^3 y = t^7$. Mikä on tämän differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu? <u>Ohje:</u> Muistathan, että (1. kertaluvun) differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu saadaan vastaavan homogeeniyhtälön yleisen ratkaisun ja täydellisen yhtälön (jonkin) yksityisratkaisun summana.

2. Etsi differentiaaliyhtälön $y'' + 2y' - 3y = t$ se ratkaisukäyrä, joka leikkaa y-akselin kohtisuoraan kohdassa $y = 4$. <u>Ohje:</u> Alkuehtojen määrittämiseksi mieti, mitä tuo ratkaisukäyrältä edellytetty ominaisuus merkitsee käyrän määrittävän funktion ja tämän derivaatan arvoille kohdassa $t = 0$.

3. Kesätapahtumassa hyttysten määrän arvioitiin olevan tilaisuuden alussa 2000 inisijää ja kolme tuntia myöhemmin määrä oli kasvanut 7000:een. Hyttysten määrän kasvunopeus hetkellä $t \geq 0$ mallinnettiin olettamuksella, että se oli suoraan verrannollinen hyttysten määrään kyseisellä hetkellä. Muodosta hyttysten määrää kuvaava differentiaaliyhtälömalli ja sen ratkaisuna määritä hyttysten määrä mielivaltaisena ajanhetkenä $t \geq 0$. Mikä oli mallin mukainen ennuste hyttysten määrälle viiden tunnin kuluttua tilaisuuden alkamisesta?

4. a) Etsi differenssiyhtälön $y_{t+1} - y_t = t + 2$ yleinen ratkaisu sekä alkuehdon $y_0 = 1$ toteuttava yksityisratkaisu.
   b) Osoita, että edellisessä kohdassa tarkoitettu yksityisratkaisu on myös differenssiyhtälön $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 1$ eräs ratkaisu.
   c) Etsi edellisen kohdan toisen kertaluvun differenssiyhtälön yleinen ratkaisu.

5. Oletetaan, että tietyillä hyödykemarkkinoilla tietyn tarkasteltavan tuotteen kysyntä (kulutus) C_t kaudella t riippuu saman kauden hinnasta P_t lain

$$C_t = a - bP_t, \text{ missä } b > 0,$$

mukaisesti. Tuotteen valmistajat reagoivat hintamuutoksiin niin, että tarjonta (valmistus) S_t on edellisen kauden hinnan P_{t-1} funktio:

$$S_t = c + dP_{t-1}, \text{ missä } d > 0.$$

Tuotteen varastoissa olevan määrän Q_t muutos ΔQ_t määräytyy valmistuksen ja kulutuksen erotuksena, ts.

$$Q_t - Q_{t-1} = S_t - C_t$$

Hinnan P_t muutoksen ΔP_t oletetaan olevan suoraan verrannollinen siihen määrään, jolla teollisuuden varastot ylittävät tietyn tavoitetason Q_e, ts.

$$P_t - P_{t-1} = -k(Q_t - Q_e), \text{ missä } k > 0.$$

Tutki, miten P, S, C ja Q käyttäytyvät ajan funktioina (suureilla alkuarvot P_0, S_0, C_0 ja Q_0). <u>Ohje:</u> Muodosta ensin (2. kertaluvun) differenssiyhtälö P:lle eliminointien avulla.

DYNAAMISET SYSTEEMIT

Tentti 28.2.2008

1. $y_0 = -t^4 - 4$ DY: $y' - t^3 y = t^7$

$y_0' = -4t^3$

$y_0' - t^3 y_0$

$= -4t^3 - t^3(-t^4 - 4)$

$= -4t^3 + t^7 + 4t^3 = t^7$

y_0 toteuttaa DY:n eli on sen eräs ratkaisu

DY:n yleinen ratkaisu:

Homogeeniyhtälö:

$$y' - t^3 y = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = t^3 y$$

$$\frac{dy}{y} = t^3 dt$$

$$\ln y = \frac{1}{4}t^4 + \ln C$$

$$\ln \frac{y}{C} = \frac{1}{4}t^4$$

$$y_H = Ce^{\frac{1}{4}t^4}$$

Yl. ratk.

$$\underline{\underline{y = y_H + y_0 = Ce^{\frac{1}{4}t^4} - t^4 - 4}}$$

2. $y'' + 2y' - 3y = t$

Homog. yht.

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

Kar. yht.

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -3 \end{cases}$$

$$y_H = C_1 e^{t} + C_2 e^{-3t}$$

Yksit. ratk.

$$y_0 = At + B$$
$$y_0' = A$$
$$y_0'' = 0$$

$$0 + 2A - 3(At + B) = t$$

$$-3At + 2A - 3B = t$$

$$-3A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$$

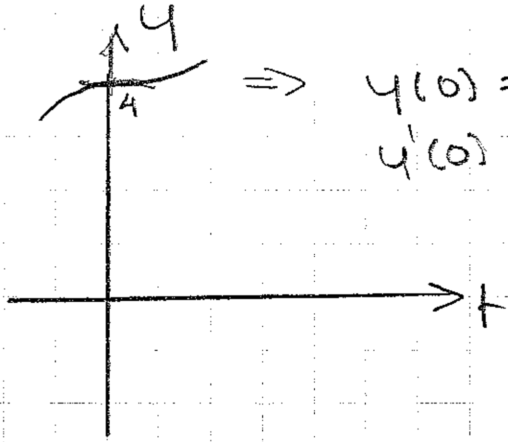
$$2A - 3B = 0 \Rightarrow B = -\frac{2}{9}$$

$$y_0 = -\frac{1}{9}(3t + 2)$$

Yl. ratk. $y = y_H + y_0$

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-3t} - \frac{1}{9}(3t + 2)}}$$

Alkuehdot:



$\Rightarrow \quad y(0) = 4$

$\qquad y'(0) = 0$

$$y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-3t} - \frac{1}{9}(3t+2)$$

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{2}{9}$$

$$y' = C_1 e^{t} - 3C_2 e^{-3t} - \frac{1}{3}$$

$$y'(0) = C_1 - 3C_2 - \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} y(0): & C_1 + C_2 = 4\frac{2}{9} \\ y'(0) = & C_1 - 3C_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \; - \qquad 4\frac{2}{9} = \frac{38}{9}, \quad \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

$$4C_2 = \frac{35}{9}$$

$$C_2 = \frac{35}{36}$$

$$C_1 = \frac{38}{9} - \frac{35}{36} = \frac{152 - 35}{36} = \frac{117}{36}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{36}\left(117 e^{t} + 35 e^{-3t} - 12t - 8\right)}}$$

Haettu ratkaisukäyrä

3. Hyttysten määrä $n(t)$

$n(0) = 2000$

$n(3) = 7000$

$n'(t) = k\,n(t)$

$\underline{n' - kn = 0}$ DY - malli

$n(t) = C e^{kt}$

$C = ?$ $n(0) = C e^{k \cdot 0} = C = 2000$

$\Rightarrow C = 2000$

$n(t) = 2000 e^{kt}$

$k = ?$ $n(3) = 2000 e^{3k} = 7000$

$e^{3k} = \frac{7000}{2000} = 3.5$

$k = \frac{1}{3} \ln 3.5 = 0{,}418$

$\underline{n(t) = 2000 e^{0{,}418t}}$ mallin ratk.

$\underline{n(5) = 2000 e^{2{,}09} = 16170}$ ennuste

4. a) $y_{t+1} - y_t = t + 2$

Hom. $y_{t+1} - y_t = 0$

Kar.yht. $r - 1 = 0 \quad \Rightarrow r = 1$

$$y_t = C 1^t = C \qquad \text{(vakio!)}$$

Yl. ratk.

yrite $\quad y_t^\circ = At + B$

$$y_{t+1}^\circ = A(t+1) + B = At + A + B$$

$$y_{t+1}^\circ - y_t^\circ = At + A + B - At - B$$

$$= A = t + 2 \quad \lightning$$

uusi yrite:

$$y_t^\circ = At^2 + Bt$$ (vakiota ei tarvita, koska sis. hom.yht.ratk.

$$y_{t+1}^\circ = A(t+1)^2 + B(t+1)$$

$$= At^2 + 2At + A + Bt + B$$

$$y_{t+1}^\circ - y_t^\circ = At^2 + (2A+B)t + A + B - At^2 - Bt$$

$$= 2At + A + B = t + 2$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{3}{2}$$

$$y_t = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + C$$

$y_0 = 1 \quad \Rightarrow C = 1 \quad \Rightarrow y_t = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 1$

b)
$$y_t = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 1$$

$$y_{t+1} = \frac{1}{2}(t+1)^2 + \frac{3}{2}(t+1) + 1$$
$$= \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t + \frac{3}{2} + 1$$
$$= \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{2}t + 3$$

$$y_{t+2} = \frac{1}{2}(t+2)^2 + \frac{3}{2}(t+2) + 1$$
$$= \frac{1}{2}t^2 + 2t + 2 + \frac{3}{2}t + 3 + 1$$
$$= \frac{1}{2}t^2 + \frac{7}{2}t + 6$$

$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$$
$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{=0}t^2 + \underbrace{\left(\frac{3}{2} - 2\cdot\frac{5}{2} + \frac{7}{2}\right)}_{=0}t$$
$$+ \underbrace{(1 - 2\cdot 3 + 6)}_{=1} = 1$$ DY toteutuu!

c)
$$y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 1$$

Hom. yht. $\quad y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 0$

Kar. yht. $\quad r^2 - 2r + 1 = 0$

$$(r-1)^2 = 0$$
$$r_{1,2} = 1$$
$$y_t^H = C_1 1^t + C_2 t \cdot 1^t$$
$$= C_1 + C_2 t$$

Yl. ratk. $\quad y_t = y_t^H - y_t^o \quad$ (y_t^o b-kohdasta)
$$= C_1 + C_2 t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 1$$
$$= \frac{1}{2}t^2 + \left(C_2 + \frac{3}{2}\right)t + 1 + C_1 = \frac{1}{2}t^2 + D_1 t + D_2$$

5. $C_t = a - bP_t \qquad b>0$

$S_t = c + dP_{t-1} \qquad d>0$

$\Delta Q_t = Q_t - Q_{t-1} = S_t - C_t$

$\Delta P_t = P_t - P_{t-1} = -k(Q_t - Q_e), \quad k>0$

Q annettu

$$P_t - P_{t-1} = -k(Q_t - Q_e)$$
$$P_{t-1} - P_{t-2} = -k(Q_{t-1} - Q_e) \qquad -$$

$$P_t - 2P_{t-1} + P_{t-2} = -k(Q_t - Q_{t-1})$$
$$= -k(S_t - C_t)$$
$$= -k(c + dP_{t-1} - a + bP_t)$$

$$P_t - 2P_{t-1} + P_{t-2} = -kc - kdP_{t-1} + ka - kbP_t$$

$$(1+kb)P_t + (kd-2)P_{t-1} + P_{t-2} = k(a-c)$$

$$P_t + \frac{kd-2}{1+kb}P_{t-1} + \frac{1}{1+kb}P_{t-2} = \frac{k(a-c)}{1+kb}$$

Hom. yht.

$$r^2 + \frac{kd-2}{1+kb}r + \frac{1}{1+kb} = 0$$

$$r_{1,2} = -\frac{kd-2}{2(1+kb)} \pm \sqrt{\frac{(kd-2)^2 - 4}{4(1+kb)^2}}$$

$$= -\frac{(kd-2) \pm \sqrt{kd(kd-4)}}{2(1+kb)}$$

Ratkaisun luonne riippuu nyt siitä, onko $kd>4$, $kd=4$ vai $kd<4$ $\quad (kd>0)$

yksit. ratk.

$$P_t = A$$

$$A + \frac{kd-2}{1+kb}A + \frac{1}{1+kb}A = \frac{k(a-c)}{1+kb}$$

$$(1+kb)A + (kd-2)A + A = k(a-c)$$

$$(1+kb+kd-2+1)A = k(a-c)$$

$$A = \frac{k(a-c)}{k(b+d)} = \frac{a-c}{b+d}$$

Tämän jälkeen

$$C_t = a - bP_{t-1}$$

$$S_t = c + dP_{t-1}$$

$$Q_t = -\frac{1}{k}(P_t - P_{t-1}) + Q_e$$

Tehtävä oli hankalampi kuin oli tarkoitus.

Differenssiyhtälön muodostaminen hinnalle P_t riittää vastaukseksi.