VAASAN YLIOPISTO
Optimoinnin jatkokurssi
Prof. Ilkka Virtanen

Tentti, 2. uusinta 4.11.2003

1. Taidelasia valmistava yritys suunnittelee työpöydällä koristeenakin pidettävää paperipainoa. Paino koostuu kirkkaasta lasista valmistetusta pallosta, jonka sisällä on värillistä lasia oleva suora ympyräpohjainen kartio. Kartion mittasuhteet valitaan toteutukseen visuaalisin perustein, mutta kalliin värilasin kulutuksen arvioimiseksi halutaan selvittää sen tarpeen yläraja. Mitkä ovat kartion mittasuhteet (pohjaympyrän säde ja korkeus pallon säteen avulla lausuttuna) silloin, kun kartio on tilavuudeltaan mahdollisimman suuri? Suuriko on värilasin tarve suhteessa koko pallon tilavuuteen tällöin?

2. Funktiolla f : R → R

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 120x + 24$$

on minimikohta positiivisen x-akselin alueella.

a) Ratkaisematta minimikohdan arvoa osoita analyyttisesti, että yllä esitetty väite pitää paikkansa.
b) Etsi edellä tarkoitetun minimikohdan kolmidesimaalinen likiarvo jollakin numeerisen analyysin menetelmällä.

3. Tarkastellaan funktiota f : R^2 → R

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 2x^2 + 4y^2 + 6.$$

a) Etsi funktion ns. kriittiset pisteet (= mahdolliset ääriarvokohdat).
b) Selvitä kriittisten pisteiden laatu analyyttisesti (tutki ääriarvon olemassaolo ja myönteisessä tapauksessa selvitä sen tyyppi).
c) Onko jokin ääriarvokohdista funktion globaali minimi- tai maksimikohta?

4. Origossa sijaitseva voimakas pistemäinen lämmönlähde synnyttää ympärilleen epäsymmetrisen lämpökentän T, joka xy –tasossa noudattaa lakia (pituusyksikkönä metri, lämpötilan yksikkönä Celsius-aste) T : R^2 → R

$$T(x, y) = 500 - x^2 - 4y^2 + xy + x.$$

a) Mihin suuntaan pisteestä (3,5) tulisi siirtyä, jotta lämpötila (suuriko se tässä lähtöpisteessä on?) laskisi mahdollisimman nopeasti?
b) Paljonko lämpötila laskee, jos siirrytään 1 m edellä tarkoitettuun suuntaan?
c) Mihin suuntaan/suuntiin siirryttäessä lämpötila ei muutu?

5. Funktiolla f : R^3 → R

$$f(x, y, z) = 2x + y + z^2$$

ei ole R^3:ssa lokaalista ääriarvoa eikä myöskään globaalia minimi- tai maksimiarvoa. Osoita tämä analyyttisesti. Kun sen sijaan rajoitutaan johonkin R^3:n osajoukkoon, (sidottuja) ääriarvokohtia ja lokaaleja minimi- ja maksimiarvoja saattaa löytyä. Suljetussa ja rajoitetussa joukossa näin on aina asianlaita. Etsi nyt suurin ja pienin arvo, jotka edellä määritelty funktio *f* saavuttaa pallon

$$x^2 + y^2 + z^2 = 10$$

pinnalla.