VAASAN YLIOPISTO
Optimoinnin jatkokurssi
Prof. Ilkka Virtanen

Tentti, 1. uusinta 29.9.2003

1. Pallon (säde = r) sisällä on tilavuudeltaan mahdollisimman suuri suora ympyräpohjainen lieriö.

   a) Määritä lieriön korkeus ja pohjaympyrän säde pallon säteen funktiona.
   b) Määritä myös lieriön ja pallon tilavuuksien suhde.

2. Tarkastellaan funktiota $f : R^2 \to R$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 2x^2 + 4y^2 + 6.$$

   a) Etsi funktion ns. kriittiset pisteet (= mahdolliset ääriarvokohdat).
   b) Selvitä kriittisten pisteiden laatu analyyttisesti (tutki ääriarvon olemassaolo ja myönteisessä tapauksessa selvitä sen tyyppi).
   c) Onko jokin ääriarvokohdista funktion globaali minimi- tai maksimikohta?

3. Origossa sijaitseva voimakas pistemäinen lämmönlähde synnyttää ympärilleen epäsymmetrisen lämpökentän T, joka xy –tasossa noudattaa lakia (pituusyksikkönä metri, lämpötilan yksikkönä Celsius-aste) $T : R^2 \to R$

$$T(x, y) = 500 - x^2 - 4y^2 + xy + x.$$

   a) Suuriko lämpötila vallitsee pisteessä (3,5)?
   b) Mihin suuntaan pisteestä (3,5) tulisi siirtyä, jotta lämpötila laskisi mahdollisimman nopeasti?
   c) Paljonko lämpötila laskee, jos siirrytään 1 m edellä tarkoitettuun suuntaan?
   d) Mihin suuntaan/suuntiin siirryttäessä lämpötila ei muutu?

4. Tarkastellaan rajoittamatonta epälineaarista optimointitehtävää

$$\text{Min} \qquad f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 6y.$$

   Lähtien liikkeelle pisteestä (1,1) osoita, miten numeerisella menetelmällä, joka on yhdistelmä jyrkimmän suunnan menetelmää ja viivahakua (peräkkäiset askeleet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan) lähestytään funktion lokaalia (samalla myös globaalia) minimikohtaa. Esitä ratkaisu kolmen ensimmäisen iteraation osalta. Havainnollista ratkaisun etenemistä myös graafisesti. Huom.! Analyyttisesti on helposti ratkaistavissa, että funktion minimikohta on pisteessä (1/3,4/3). Iteraatioissa ei kuitenkaan millään tavalla käytetä hyväksi sitä, että minimikohta nyt poikkeuksellisesti tunnetaan. Funktio *f(x,y)* on tarkoituksella yksinkertainen ja tehtävänä on tarkastella nimenomaan mainitun numeerisen menetelmän toimintaperiaatetta ja toimintaa käytännössä.

5. Tarkastellaan rajoitettua kvadraattista optimointiongelmaa

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 48x - 40y \\
\text{ehdoin} & x + y \le 8 \\
& x \le 6 \\
& x + 3y \le 18 \\
& x \ge 0 \\
& y \ge 0
\end{array}
$$

a) Ratkaise optimointitehtävä esim. Langrangen funktiota hyödyntäen tai muuten analyyttisesti.

b) Tarkista tulos ja samalla havainnollista ratkaisu graafisesti (pelkkä graafinen ratkaisu ei kuitenkaan riitä tehtävän ratkaisuksi, vrt. kohta a).