

DYNAAMISET SYSTEEMIT 2001

Tentti 5.4.2002

1. Funktio $x = x(t)$ on määritelty välillä $t = 0$ ja se on koko tällä välillä derivoituva. Funktio toteuttaa lisäksi yhtälön

$$(1) \quad \int_0^t x(u) du = x(t) + 2$$

jokaiselle $t = 0$.

- a) Minkä differentiaaliyhtälön funktio $x(t)$ toteuttaa?
- b) Etsi tämän differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu.
- c) Toteuttaako jokainen tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu myös yhtälön (1) välillä $t = 0$? Myönteisen vastauksen tapauksessa perustele vastauksesi. Mikäli vastauksesi taas on kielteinen, etsi yhtälön (1) toteuttava(t) ratkaisu(t).
2. Tarkastellaan hetkellä $t=0$ otettua tasakuoletuslainaa (lainasumma kuoletetaan keskenään yhtä suurina erinä laina-ajan kuluessa). Lainasumma olkoon K_0 . Korkokanta olkoon i ($= 100i$ % vuodessa) ja laina-aika n vuotta. Lainaa kuoletetaan kerran vuodessa.
- a) Laadi differenssiyhtälömalli, joka kuvaa kulloinkin jäljellä olevan lainasumman K_t kehitystä ajan funktiona.
- b) Ratkaise differenssiyhtälö vuoden t ($t = 1, 2, \dots, n$) lopussa vielä jäljellä olevan lainasumman määrittämiseksi. Totea, että ratkaisu toteuttaa reunaehdon $K_n = 0$.
- c) Määritä lainajäännöstä kuvaavan lausekkeen K_t perusteella vuoden $t+1$ korkomaksun k_{t+1} suuruus sekä ko. vuoden lainanhoitokulut kokonaisuudessaan (kuloetus L_{t+1} plus korko k_{t+1}).
3. Määritä yhtälölle $x'' - 4x = 10 - 0,1 \cdot t$ ratkaisu, joka kulkee pisteen $(0,5)$ kautta ja joka lähestyy trendiä t :n kasvaessa rajatta (määritä myös tämä trendi).
4. Kun kuution muotoinen jääpala, jonka lämpötila on 0 °C, tuodaan lämpimään, se alkaa heti sulaa. Jos ympäristön lämpötila ja ilmanpaine pysyvät vakioina ja on tyyni, jääpalan sulamisnopeus hetkellä t on likimain suoraan verrannollinen sen pinnan alaan tuolla hetkellä. Viiden tunnin aikana jääpalan tilavuus pieneni $10,0 \text{ dm}^3$:stä $8,0 \text{ dm}^3$:iin. Missä ajassa kuution koko on puolittunut alkuperäisestä? Entä milloin jääpala on sulanut kokonaan?

5. Oletetaan, että tietyillä hyödykemarkkinoilla tietyn tarkasteltavan tuotteen kysyntä (kulutus) kaudella t ($= C_t$) riippuu hinnasta P_t lain

$$C_t = a - b \cdot P_t \quad (b > 0)$$

mukaisesti. Tuotteen valmistajat reagoivat hintamuutoksiin niin, että tarjonta (valmistus) S_t on edellisen kauden hinnan P_{t-1} funktio:

$$S_t = c + d \cdot P_{t-1} \quad (d > 0).$$

Tuotteen varastoissa olevan määrän Q_t muutos ΔQ_t määräytyy valmistuksen ja kulutuksen erotuksena, ts.

$$\Delta Q_t = S_t - C_t.$$

Hinnan P_t muutoksen ΔP_t oletetaan olevan suoraan verrannollinen siihen määrään, jolla teollisuuden varastot ylittävät tietyn tavoitetason Q_e , ts.

$$\Delta P_t = -k (Q_t - Q_e) \quad (k > 0).$$

Tutki, miten P , S , C ja Q käyttäytyvät ajan funktioina.