VAASAN YLIOPISTO
Talousmatematiikka
Prof. Ilkka Virtanen

DYNAAMISET SYSTEEMIT 2001

Tentti 15.02.2002

1. Funktio $x(t) = C_1 e^t + C_2 t$ voidaan tulkita erään differentiaaliyhtälön ratkaisuksi (C_1 ja C_2 ovat ratkaisuun liittyviä mielivaltaisia integroimisvakioita). Määritä se toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö (mistä voit päätellä, että kyseessä täytyy olla nimenomaan toisen kertaluvun yhtälö?), jonka ratkaisu yllä oleva funktio on. Yhtälön löydettyäsi totea, että annettu funktio todella on tuon differentiaaliyhtälön ratkaisu.

2. Tarkastellaan hetkellä $t=0$ otettua tasakuoletuslainaa (lainasumma kuoletetaan keskenään yhtä suurina erinä laina-ajan kuluessa). Lainasumma olkoon K_0. Korkokanta olkoon i (= 100i % vuodessa) ja laina-aika n vuotta. Lainaa kuoletetaan kerran vuodessa.

a) Laadi differenssiyhtälömalli, joka kuvaa kulloinkin jäljellä olevan lainasumman K_t kehitystä ajan funktiona.

b) Ratkaise differenssiyhtälö vuoden t ($t = 1,2,\ldots,n$) lopussa vielä jäljellä olevan lainasumman määrittämiseksi. Totea, että ratkaisu toteuttaa reunaehdon $K_n = 0$.

c) Määritä lainajäännöstä kuvaavan lausekkeen K_t perusteella vuoden t korkomaksun k_t suuruus sekä ko. vuoden lainanhoitokulut kokonaisuudessaan (kuoletus L_t + korko k_t).

3. Lohenkasvatusaltaaseen, jossa oli 1100 kalaa, levisi kalojen kuolemaan johtava kalatauti. Taudin vaikutuksesta kalakanta alkoi vähetä differentiaaliyhtälön

$$P'(t) = -4\sqrt{P(t)}$$

mukaisesti (taudin etenemistä kuvataan tässä siis jatkuvalla mallilla). Funktio $P(t)$ kuvaa kalamäärää hetkellä t siten, että aika t on mitattu viikkoina. Osoita, että differentiaaliyhtälön kuvaama prosessi johtaa koko kalakannan tuhoutumiseen. Monenko viikon kuluttua näin tapahtuu?

4. Määritellään

$R(t)$ = auton kumulatiiviset käyttökustannukset hetkellä t; $R(0) = 0$,
$S(t)$ = auton jälleenmyyntiarvo hetkellä t; $S(0) = S_0$ (ostohinta).

Oletetaan, että käyttökustannusten ja jälleenmyyntiarvon kehitykset noudattavat lakeja

$$\frac{dR}{dt} = \frac{a}{S(t)}, \qquad a \text{ on vakio ja } > 0,$$

$$\frac{dS}{dt} = -b\, S(t), \qquad b \text{ on vakio ja } > 0.$$

a) Perustele mallia (yksinkertaisuudestaan huolimatta laadullisesti järkevä).
b) Ratkaise *S(t)* jälkimmäisestä yhtälöstä.
c) Kun *S(t)* on tunnettu, voidaan myös *R(t)* ratkaista ensimmäisestä yhtälöstä. Etsi *R(t)*:n lauseke.

5. a) Etsi differenssiyhtälön $x_{t+1} - x_t = t + 2$ yleinen ratkaisu sekä alkuehdon $x_0 = 1$ toteuttava yksityisratkaisu.
b) Osoita, että a) –kohdan yksityisratkaisu on myös yhtälön $x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t = 1$ eräs ratkaisu.
c) Etsi b) -kohdan tehtävän yleinen ratkaisu.