

# DYNAAMISET SYSTEEMIT 2001

Tentti 19.12.2001

1. Funktio  $x(t) = C_1 (1/t) + C_2 t$  voidaan tulkita erään differentiaaliyhtälön ratkaisuksi ( $C_1$  ja  $C_2$  ovat ratkaisuun liittyvät toisistaan riippumattomat integroimisvakiot).
  - a) Mitä voit päätellä differentiaaliyhtälön ominaisuuksista (kertaluku ym.)?
  - b) Määritä se differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisu yllä oleva funktio on.
  - c) Onko differentiaaliyhtälöllä (yksityis)ratkaisua, joka on stabiili? Etsi jokin tällainen ratkaisu (tai jos olet sitä mieltä, että stabiilia ratkaisua ei ole, perustele kantasi).
2. Tarkastellaan yrityksen hetkellä  $t=0$  tekemää investointia ja siihen liittyvää (netto)tulovirtaa. Investointimenon suuruus olkoon  $I_0$ . Korkokanta olkoon  $i$  (yksikkönä  $1/v$ ). Oletetaan tulovirta  $k(t)$  jatkuvaksi. Korkoa (korolle) lasketaan niin ikään jatkuvasti.
  - a) Laadi differentiaaliyhtälömalli, joka kuvaa investoinnin nykyarvon kehitystä ajan mukana.
  - b) Ratkaise differentiaaliyhtälö vakiona pysyvän tulovirran tapauksessa (ts. kun  $k(t) = k$ ) saadaksesi selville nykyarvon lausekkeen ajan  $t$  funktiona.
  - c) Määritä nykyarvon lausekkeen perusteella lauseke investoinnin korolliselle takaisinmaksuajalle, ts. ajalle, jonka kuluttua investoinnin nykyarvo saavuttaa tason 0 (ratkaisuna saatavan korollisen takaisinmaksuajan lausekkeesta mm. nähdään, että tämä arvo on äärellisenä olemassa vain, mikäli tulovirta  $k$  ylittää investointimenolle laskettavan korkovirran suuruuden).
3. Lohenkasvatusaltaaseen, jossa oli 1100 kalaa, levisi kalojen kuolemaan johtava kalatauti. Taudin vaikutuksesta kalakanta alkoi vähetä differentiaaliyhtälön

$$P'(t) = -4\sqrt{P(t)}$$

mukaisesti (taudin etenemistä kuvataan tässä siis jatkuvalla mallilla). Funktio  $P(t)$  kuvaa kalamäärää hetkellä  $t$  siten, että aika  $t$  on mitattu viikkoina. Osoita, että differentiaaliyhtälön kuvaama prosessi johtaa koko kalakannan tuhoutumiseen. Monenko viikon kuluttua näin tapahtuu?

4. Differentiaaliyhtälö  $x'' + 2x' - 3x = t$  kuvaa erästä ajassa ( $t \geq 0$ ) etenevää dynaamista prosessia. Mikä tuon prosessin määrittävä yhtälö  $x = x(t)$  on, kun tiedetään, että prosessi alkuhetkellä  $t = 0$  saa arvon 4 ja prosessin kasvuvauhti tuolla alkuhetkellä on  $= 0$ ?
5. a) Etsi differenssiyhtälön  $x_{t+1} - x_t = t + 2$  yleinen ratkaisu sekä alkuehdon  $x_0 = 1$  toteuttava yksityisratkaisu.  
b) Osoita, että a)-kohdan yksityisratkaisu on myös yhtälön  $x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t = 1$  eräs ratkaisu.  
c) Etsi b) -kohdan tehtävän yleinen ratkaisu.