

DYNAAMISET SYSTEEMIT 2000

Tentti 31.8.2000

1. Funktio $x(t) = C_1 e^t + C_2 t$ voidaan tulkita erään differentiaaliyhtälön ratkaisuksi (C_1 ja C_2 ovat ratkaisuun liittyviä mielivaltaisia integroimisvakioita). Määritä se toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisu yllä oleva funktio on. Yhtälön löydettyäsi totea, että ko. funktio todella on tuon differentiaaliyhtälön ratkaisu.
Ohje: Annetun funktion lisäksi muodosta sen ensimmäisen ja toisen kertaluvun derivaatat, joista eliminoit integroimisvakiot.
2. Tarkastellaan yrityksen hetkellä $t=0$ tekemään investointiin liittyvää (netto)tulovirtaa. Investoinnin pitoaika on T vuotta ja sen tuottama tulovirta oletetaan vakioksi ($= k$ mk/v) investoinnin koko eliniän ajan. Korkokanta on i (yksikkönä $1/v$).
 - a) Oletetaan tulovirta jatkuvaksi. Korkoa (korolle) lasketaan niin ikään jatkuvasti. Laadi **differentiaaliyhtälömalli**, joka kuvaa tulovirran kumulatiivisen pääoma-arvon kehitystä ajan mukana. Ratkaise yhtälö saadaksesi selville ko. pääoma-arvon suuruuden pitoajan lopussa (hetkellä T).
 - b) Oletetaan toiseksi, että tulot kertyvät (ainakin kirjataan) diskreetisti aina kunkin vuoden lopussa. Korko liitetään kertyneeseen pääomaan niin ikään kerran vuodessa, vuoden lopussa. Laadi pääoman kertymistä kuvaava **differenssiyhtälömalli** ja ratkaise se a) –kohdan tapaan.
3. Kesätaapahtumassa hyttysten määrä oli tilaisuuden alussa 200 ja kolme tuntia myöhemmin 700. Hyttysten määrän kasvunopeus hetkellä t oli suoraan verrannollinen hyttysten määrään sillä hetkellä. Muodosta hyttysten määrää kuvaava differentiaaliyhtälömalli ja sen ratkaisuna määritä hyttysten määrä mielivaltaisena ajanhetkenä t . Mikä oli hyttysten määrä viiden tunnin kuluttua tilaisuuden alkamisesta? (Kevään 2000 ylioppilaskirjoitusten matematiikan pitkän oppimäärän koetehtävä).
4. Etsi differentiaaliyhtälön $x'' + x' = 3 e^{-t}$ yleinen ratkaisu sekä alkuehdot $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ toteuttava yksitysratkaisu.

5. Tutkimuslaitoksessa työskentelevä ekonomisti lähetti työryhmälleen kommentoitavaksi laatimansa mikrotaloudellisen kysyntä-tarjonta -mallin. Lähetykseen käytetyn faksin huonon laadun takia mallin merkit tulostuivat osittain epäselvinä. Kolme eri henkilöä tulkitsivat tulostusjälkeä ja esittivät tulkintoinaan seuraavat kolme eri mallia. Mallin muuttujat ovat: P_t = tuotteen hinta kaudella t , D_t = tuotteen kysyntä ja S_t = tuotteen tarjonta.

$$\begin{array}{lll}
 P_{t+1} = P_t + 0.2(S_t - D_t) & P_{t+1} = P_t - 0.2(S_t - D_t) & P_{t+1} = P_t - 0.2(S_t - D_t) \\
 S_t = -30 + 0.3P_t & S_t = -30 + 0.3P_t & S_t = 30 + 0.3P_t \\
 D_t = 120 - 0.5P_t & D_t = 120 - 0.5P_t & D_t = 120 - 0.5P_t
 \end{array}$$

Mikä malleista on mielestäsi oikein tai ainakin paras? Perustele valintaasi mallin kunkin kertoimen/parametrin arvon merkillä. Ratkaise oikeana pitämäsi malli (hinnan, kysynnän ja tarjonnan aikaurat) ja määritä näille tasapainoarvot, mikäli ne ovat olemassa.