VAASAN YLIOPISTO
Talousmatematiikka
Prof. Ilkka Virtanen

DYNAAMISET SYSTEEMIT 2000

Tentti 19.5.2000

1. Funktio $x(t) = C_1 e^t + C_2 t$ voidaan tulkita erään differentiaaliyhtälön ratkaisuksi (C_1 ja C_2 ovat ratkaisuun liittyviä mielivaltaisia integroimisvakioita). Määritä se toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisu yllä oleva funktio on. Yhtälön löydettyäsi totea, että ko. funktio todella on tuon differentiaaliyhtälön ratkaisu.
Ohje: Annetun funktion lisäksi muodosta sen ensimmäisen ja toisen kertaluvun derivaatat, joista eliminoit integroimisvakiot.

2. Tarkastellaan yrityksen hetkellä $t=0$ tekemään investointiin liittyvää (netto)tulovirtaa. Investoinnin pitoaika on T vuotta ja sen tuottama tulovirta oletetaan vakioksi (= k mk/v) investoinnin koko eliniän ajan. Korkokanta on i (yksikkönä 1/v).

a) Oletetaan tulovirta jatkuvaksi. Korkoa (korolle) lasketaan niin ikään jatkuvasti. Laadi **differentiaaliyhtälömalli**, joka kuvaa tulovirran kumulatiivisen pääoma-arvon kehitystä ajan mukana. Ratkaise yhtälö saadaksesi selville ko. pääoma-arvon suuruuden pitoajan lopussa (hetkellä T).

b) Oletetaan toiseksi, että tulot kertyvät (ainakin kirjataan) diskreetisti aina kunkin vuoden lopussa. Korko liitetään kertyneeseen pääomaan niin ikään kerran vuodessa, vuoden lopussa. Laadi pääoman kertymistä kuvaava **differenssiyhtälömalli** ja ratkaise se a) –kohdan tapaan.

3. Kesätapahtumassa hyttysten määrä oli tilaisuuden alussa 200 ja kolme tuntia myöhemmin 700. Hyttysten määrän kasvunopeus hetkellä t oli suoraan verrannollinen hyttysten määrään sillä hetkellä. Muodosta hyttysten määrää kuvaava differentiaaliyhtälömalli ja sen ratkaisuna määritä hyttysten määrä mielivaltaisena ajanhetkenä t. Mikä oli hyttysten määrä viiden tunnin kuluttua tilaisuuden alkamisesta? (Kevään 2000 ylioppilaskirjoitusten matematiikan pitkän oppimäärän koetehtävä).

4. Etsi differentiaaliyhtälön $x'' + x' = 3e^{-t}$ yleinen ratkaisu sekä alkuehdot $x(0) = 0, x'(0) = 0$ toteuttava yksitysratkaisu.

5. Oletetaan, että tuotteen kysyntä (kulutus) kaudella t (= C_t) riippuu saman kauden hinnasta P_t lain

$$C_t = 100 - 0.3\, P_t$$

mukaisesti. Tuotteen valmistajat reagoivat myös nopeasti hintamuutoksiin, niin että tarjonta (valmistus) S_t on niin ikään saman kauden hinnan P_t funktio:

$$S_t = 50 + 0.2\, P_t.$$

Valmistajien varastoissa olevan tuotteen määrän Q_t muutos ΔQ_t määräytyy valmistuksen ja kulutuksen erotuksena, ts.

$$\Delta Q_t = S_t - C_t.$$

Hinnan P_t muutoksen ΔP_t oletetaan olevan suoraan verrannollinen yritysten varastojen muutokseen:

$$\Delta P_t = -\,0.2\, \Delta Q_t.$$

Tutki, miten P_t, S_t, C_t ja Q_t käyttäytyvät ajan funktioina. Mitä arvoja P_t, S_t, C_t ja Q_t lähestyvät pitkän ajan kuluessa? Onko mallin ratkaisu stabiili?