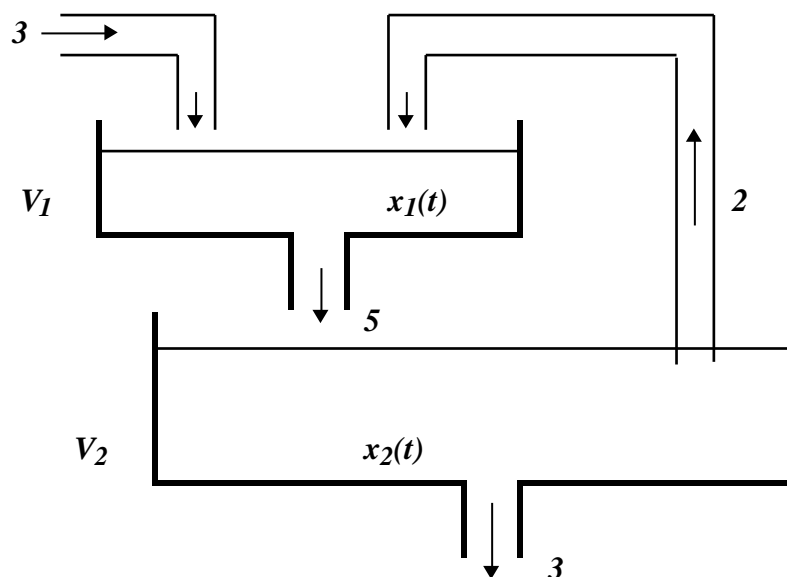


DYNAAMISET SYSTEEMIT 2000

Tentti 17.3.2000

1. Tarkastellaan yrityksen hetkellä $t=0$ tekemää investointia ja siihen liittyvää (netto)tulovirtaa. Investointimenon suuruus olkoon N_0 . Korkokanta olkoon i (yksikkönä $1/v$).
 - (a) Oletetaan tulovirta jatkuvaksi. Merkitään tulovirtaa symbolilla $n(t)$. Korkoa lasketaan niin ikään jatkuvasti. Laadi investoinnin nykyarvolle $N(t)$ (= tulovirtaa on kertynyt hetkeen t saakka) **differentiaaliyhtälömalli** ja ratkaise tästä differentiaaliyhtälöstä nykyarvon lauseke. Minkä muodon lauseke saa, kun tulovirta on vakio (= n)? Investoinnin jäännösarvoa ei oteta tarkasteluissa huomioon.
 - (b) Oletetaan toiseksi, että tulot kertyvät (ainakin kirjataan) diskreetisti aina kunkin vuoden lopussa. Korkojakso on niin ikään vuosi. Laadi nykyarvon kehitystä kuvaava **differenssiyhtälömalli** ja ratkaise se vakiona pysyvän tulosarjan tapauksessa.
2. Ratkaise differentiaaliyhtälö $x' = x(2-x)$. Määritä yhtälön yleisestä ratkaisusta jokin yksityisratkaisu (ilmoita myös käyttämäsi alkuehdon geometrinen tulkinta). Onko yhtälöllä (yleiseen ratkaisuun sisällyttömiä) erikoisratkaisuja?
3. Kaupungin väkiluku $x(t)$ vuoden 1999 lopussa oli 55 000 henkeä. Väkiluvun kasvunopeuden $x'(t)$ on estimoitu olevan 1.2% vuodessa, ts. oletetaan $x'(t) = 0.012 x(t)$.
 - (a) Laske Eulerin menetelmää käyttäen arvio kaupungin vuoden 2005 lopun väkiluvulle (askelvälinä 1 vuosi).
 - (b) Laske asukasluku myös differentiaaliyhtälön tarkkaa (analyttistä) ratkaisua hyväksi käyttäen. Miten Eulerin menetelmä toimii tässä yksittäistapauksessa?
4. (a) Etsi differentiaaliyhtälön $x_{t+1} - x_t = t + 2$ yleinen ratkaisu sekä alkuehdon $x_0 = 1$ toteuttava yksityisratkaisu.
 - (b) Osoita, että (a)-kohdan yksityisratkaisu on myös yhtälön $x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t = 1$ eräs ratkaisu.
 - (c) Etsi (b) -kohdan tehtävän yleinen ratkaisu.
5. Tarkastellaan seuraavalla sivulla kuvattua kahden säiliön ja niiden kautta virtaavan nesteen muodostamaa järjestelmää. Ylemmässä säiliössä on 100 gallonia suolaliuosta siten, että suolaa



siinä on liuenneena 25 lb (naulaa). Alemmassa säiliössä on 200 galloniaa puhdasta vettä. Systemiin (= ylempään säiliöön) aletaan pumpata suolaliuosta, jossa on suolaa 1 naula gallonnassa liuosta, nopeudella 3 gall./min. Yläsäiliöstä virtaa liuosta alasäiliöön nopeudella 5 gall./min. Alasäiliöstä pumpataan puolestaan siellä olevaa liuosta nopeudella 2 gall./min. yläsäiliöön ja ulos systeemistä liuosta virtaa nopeudella 3 gall./min. Säiliöissä olevia liuoksia sekoitetaan hyvin, joten niitä voidaan joka hetki pitää tasalaatuisina (suolapitoisuus sama koko säiliössä). Olkoot $V_1(t)$ ja $V_2(t)$ säiliöissä olevat liuosmäärät hetkellä t sekä $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ säiliöiden suolamäärät. Laadi differentiaaliyhtälöpareihin perustuvat mallit säiliöiden liuosmäärien ja suolamäärien kehitykselle ja ratkaise mallit. Mitkä ovat säiliöissä olevat suolamäärät pitkän ajan kuuttua?