

VAASAN YLIOPISTO
TALOUSMATEMATIIKKA
Päätöksenteko epävarmuuden vallitessa
Prof. Ilkka Virtanen

TENTTI 29.1.1999

Tehtävä 1.

Kahdessa ulkonäöltään identtisessä läpinäkymättömässä materiaalista valmistetussa urnassa on 8 samankokoista palloa kumassakin. Uurnan I palloista puolet on valkoisia ja puolet mustia. Uurnan II palloista 2 on valkoista ja 6 mustaa. Umpimähkään valitusta urnasta nostetaan täysin satunnaisesti kaksi palloa, joiden värit todetaan (molemmat pallot siis nostetaan samasta urnasta).

- Millä todennäköisyydellä nostetut pallot ovat keskenään samanväriset?
- Kuinka suuri osa sellaisista nostoista, jotka johtavat kahteen samanväriseen palloon, antaa tulokseksi kaksi valkoista palloa?
- Eräällä koekerralla saatiin tulokseksi kaksi valkoista palloa. Millä todennäköisyydellä pallot ovat peräisin urnasta I?

Tehtävä 2.

Tarkastellaan luennoillakin esillä ollutta öljynporausongelmaa. Öljy-yhtiöllä on voimassaoleva valtaus tiettyyn maa-alueeseen, josta öljy-yhtiö muiden vastaavien alueiden empiiristen historiatietojen perusteella on päätellyt seuraavaa:

Öljyesiintymän luonne	Esiintymän todennäköisyys	Esiintymän tuoton nykyarvo
Kuiva (1)	0.50	\$ 0
Märkä (2)	0.30	\$ 120 000
Lähde (3)	0.20	\$ 270 000

Esiintymän luonteen selvittämiseksi tarvittavien porausten aiheuttamat kustannukset (\$ 70 000) eivät sisälly yllä oleviin nykyarvoihin.

Maaperän luonteesta on mahdollista hankkia lisäinformaatiota seismisellä mittauksella, jonka kustannukset ovat \$ 10 000 kohdetta kohti. Seismisen mittauksen tulos on joko ei rakennetta (ER), avoin rakenne (AR) tai suljettu rakenne (SR).

Mittauksen tulos on todettu suuntaa antavaksi seuraavan empiirisen aineiston mukaisesti:

- kun mittausta on sovellettu maaperään, joka myöhemmin porattaessa on osoittautunut kuivaksi, seismisen mittauksen tulokset ovat jakaantuneet ei-rakenteeseen, avoimeen rakenteeseen ja suljettuun rakenteeseen suhteessa 6:3:1
- määrän esiintymän tapauksessa mittauksen tulokset ER, AR ja SR ovat suhtautuneet 3:4:3
- lähteen tapauksessa em. tulokset ovat esiintyneet suhteessa 1:4:5

Seismisen mittauksen käyttöä harkittaessa oletetaan, että todennäköisyysarviot voidaan perustaa näihin historiatietoihin.

- a) Jos seismistä mittausta päätetään käyttää, niin mitkä ovat todennäköisyydet eri tulomahdollisuuksille ER, AR, SR tässä mittauksessa?
- b) Kuinka monessa prosentissa tapauksista seisminen mittaus antaa "oikean kuvan" esiintymän luonteesta (oikealla kuvalla tarkoitetaan tässä sitä, että kuivassa tapauksessa saadaan tulos ER, määrässä AR ja lähteen tapauksessa SR)?
- c) Oletetaan, että seismisen mittauksen tulos on ollut suljettu rakenne SR. Mitkä ovat todennäköisyydet tapahtumille, että todellinen maailmantila (porauksessa selviävä esiintymän luonne) on kuiva, märkä, lähde? Vertaa tätä maailmantilan ex post todennäköisyysjakaumaa ex ante jakaumaan, so. jakaumaan ennen seismistä mittausta. Miten tulos SR on muuttanut käsitystä öljyesiintymän luonteesta?

Tehtävä 3.

Botnia Charter on uusi, tilauslentotoiminnan aloittamista suunnitteleva yritys. Yrittäjä uskoo, että tilauslentoista on olemassa kysyntää yritysten lisääntyneiden kansainvälisten yhteyksien johdosta. Oman koneen hankkimiseen monellakaan yrityksellä ei ole edellytyksiä, mutta toistuvaa vuokrauskäyttöä liikenneyrittäjä uskoo kuitenkin riittävästi esiintyvän.

Yrittäjä uskoo ensimmäisen vuoden kysynnän nousevan tasolle, jota hän luonnehtii määritteellä "korkea", todennäköisyydellä 0.6. Todennäköisyydellä 0.4 kysyntä jäisi tasolle "alhainen". Jos ensimmäisen vuoden kysyntä on "korkea", yrittäjä arvioi kysynnän pysyvän myöhemminkin "korkeana" todennäköisyydellä 0.8 (ja muuttuvan "alhaiseksi" todennäköisyydellä 0.2). "Alhaisen" alkukysynnän tapauksessa taas todennäköisyydet myöhemmille kysyntätasolle ovat 0.6 ("alhainen") ja 0.4 ("korkea").

Yrittäjällä on perustamisvaiheessa kaksi eri vaihtoehtoa konehankinnalle. Uusi suihkukone maksaisi 22.0 Mmk ja pystyisi hoitamaan kaikki tilaukset myös “korkean” kysynnän tapauksessa. Käytetty potkuriturpiinikone maksaisi vain 10.0 Mmk, mutta pystyisi hoitamaan kokonaan vain “alhaisen” kysynnän, “korkean” kysynnän tapauksessa osa tilauksista menetettäisiin. Käytetyn koneen myyntitarjoukseen sisältyy optio, jonka mukaan yrittäjällä olisi vuoden kuluttua mahdollisuus ostaa lisäksi toinen käytetty potkuriturpiinikone hintaan 6.0 Mmk. Tämän ostamista harkittaisiin, mikäli ensimmäisen vuoden kysyntä ylittäisi ensiksi hankitun potkuriturpiinikoneen kapasiteetin.

Yrittäjällä on siis nyt kaksi peruspäätösvaihtoehtoa, a_1 : hankitaan suihkukone ja katsotaan, millaiseksi kysyntä muodostuu ensimmäisenä vuotena ja sitä seuraavina vuosina; a_2 : hankitaan aluksi käytetty potkuriturpiinikone ja jatketaan toimintaa sillä, mikäli ensimmäisen vuoden kysyntä on “alhainen”, “korkean” alkukysynnän tapauksessa taas tehdään vuoden toiminnan jälkeen päätös toisen käytetyn koneen ostamisesta (laajennusinvestointioptio voidaan tällöin siis joko lunastaa tai olla lunastamatta).

Toiminnan nettotuotot (nykyarvoina lausuttuina) ovat eri vaihtoehdoissa seuraavat. Suihkukoneen tuotot ovat ensimmäisenä vuotena 6.0 Mmk (“korkea” kysyntä) tai 1.0 Mmk (“alhainen” kysyntä). Seuraavien vuosien yhteenlasketut nettotuotot (nykyarvoina) ovat 38.0 Mmk (“korkea” kysyntä) tai 9.0 Mmk (“alhainen” kysyntä), mikäli ensimmäisen vuoden kysyntä oli ollut “korkea”, ja 37.0 Mmk (“korkea” kysyntä) tai 6.0 Mmk (“alhainen” kysyntä), mikäli alkukysyntä oli ollut “alhainen”. Potkuriturpiinikoneen tapauksessa ensimmäisen vuoden tuottoarviot ovat 4.0 Mmk (“korkea” kysyntä) tai 2.0 Mmk (“alhainen” kysyntä). “Alhaisen” lähtökysynnän vuotta seuraavina vuosina kokonaistuotot ovat 9.0 Mmk (“korkea” kysyntä) tai 4.0 Mmk (“alhainen” kysyntä). “Korkean” lähtökysynnän tapauksessa taas myöhempien vuosien tuottoarviot ovat 32.0 Mmk (“korkea” kysyntä) tai 4.0 Mmk (“alhainen” kysyntä), mikäli lisäkone on hankittu, mutta 16.0 Mmk (“korkea” kysyntä) tai 7.0 Mmk (“alhainen” kysyntä), mikäli laajennusinvestointia ei toteutettu.

Ratkaise Botnia Charter -yrityksen päätösongelma parhaan toimintatavan valinnasta päätöspuumenetelmää käyttäen. Nettotuottojen nykyarvon miinus koneiden hankintahinnan odotusarvo toimii päätöksenteon optiminkriteerinä.

Tehtävä 4.

Arpajaisissa on palkintoina kahdenlaisia riski-instrumentteja: todennäköisyydellä 0.20 voi voittaa arvan, jonka BRLT-arvo on 0.9 ja todennäköisyydellä 0.80 arvan, jonka BRLT-arvo on 0.4. BRLT-arvon realisointiin liittyvät voitto- ja tappiosummat ovat $W = 100\,000$ mk ja $L = -50\,000$ mk.

- a) Esitä arpajaiset BRLT -riski-instrumentin määritelmään perustuvana kaksivaiheisena uurna-arpajaisena.
- b) Korvaa tämä kaksivaiheinen BRLT-arpajainen sen kanssa (palkinnon saavuttamisen suhteen) ekvivalentilla BRLT-arvalla. Esitä uusi arpa yksivaiheisena uurna-arpajaisena. Mikä käytännön merkitys tällä muunnoksella on?
- c) Päätöksentekijän -indifferenssifunktio on alempana olevan kuvion mukainen (rahayksikkönä 1000 mk). Mikä on edellä kuvatun BRLT-arvan rahallinen arvo kuvion esittämän -indifferenssifunktion omaavalle päätöksentekijälle? Suuriko on päätöksentekijä ko. riski-instrumenttiin liittämä riskipreemio?

Tehtävä 5.

Sijoittaja haluaa investoida 1 milj. mk vuodeksi. Sijoitusvaihtoehdot ovat

- a_1 : pankkitalletus kiinteällä korolla (6%)
 a_2 : tarjotun maa-alueen osto.

Maan arvo vuoden kuluttua riippuu siitä, tuleeko suunniteltu tie läheltä maa-
aluetta. Tien linjaus ratkaistaan lopullisesti vuoden kuluessa. Päätösongelman
maailmantilat ovat siten

- ω_1 : tietä ei tule
 ω_2 : tie tulee.

Arvioidut tuotot sijoitusmuodon ja maailmantilan funktiona ovat seuraavat
(verotuksen vaikutus jätetään tarkasteluissa huomiotta):

$$V(a_1 | \omega_1) = 6\% \times 1 \text{ milj. mk} = 60\,000 \text{ mk}$$

$$V(a_1 | \omega_2) = 6\% \times 1 \text{ milj. mk} = 60\,000 \text{ mk}$$

$$V(a_2 | \omega_1) = -5\% \times 1 \text{ milj. mk} = -50\,000 \text{ mk}$$

$$V(a_2 | \omega_2) = 20\% \times 1 \text{ milj. mk} = 200\,000 \text{ mk}$$

a) Ratkaise sijoittajan päätösongelma strategiamatriisitekniikkaa ja odotusarvo-
kriteeriä hyväksi käyttäen; esitä ratkaisun riippuvuus (tuntemattomasta) tien
tulemisen todennäköisyydestä.

b) Suuriko on tähän ongelmaan liittyvä täydellisen informaation arvo (EVPI), jos

- $P(\omega_2) = 0$
- $P(\omega_2) = 0.4$
- $P(\omega_2) = 0.8?$