VAASAN YLIOPISTO
Talousmatematiikka
Prof. Ilkka Virtanen

DYNAAMISET SYSTEEMIT 1998

Perioditentti 9.3.1998

1. Tarkastellaan yrityksen hetkellä $t=0$ tekemään investointiin liittyvää (netto)-tulovirtaa. Investoinnin pitoaika on T vuotta ja sen tuottama tulovirta oletetaan vakioksi (= k mk/v) investoinnin koko eliniän ajan. Korkokanta on i (yksikkönä 1/v).

a) Oletetaan tulovirta jatkuvaksi. Korkoa (korolle) lasketaan niin ikään jatkuvasti. Laadi differentiaaliyhtälömalli, joka kuvaa tulovirran kumulatiivisen pääoma-arvon kehitystä ajan mukana. Ratkaise yhtälö saadaksesi selville ko. pääoma-arvon suuruuden pitoajan lopussa (hetkellä T).

b) Oletetaan toiseksi, että tulot kertyvät (ainakin kirjataan) diskreetisti aina kunkin vuoden lopussa. Korko liitetään kertyneeseen pääomaan niin ikään kerran vuodessa, vuoden lopussa. Laadi pääoman kertymistä kuvaava differenssiyhtälömalli ja ratkaise se a) –kohdan tapaan.

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö $(x\text{-}1)y^2 + (x\text{-}1)^2\, yy' = 0.$ Määritä yhtälön yleisestä ratkaisusta jokin yksityisratkaisu ja hahmottele sen kuvaaja. Mitähän funktiotyyppiä käyrä edustaa? Onko yhtälöllä (yleiseen ratkaisuun sisältymättömiä) erikoisratkaisuja?

3. Ratkaise täydellisesti differentiaaliyhtälö $y'' + 3\,y' + 2\,y = 10 \sin x.$

4. Kaupungin väkiluku $y(t)$ vuoden 1997 lopussa oli 52 000 henkeä. Väkiluvun kasvunopeuden $y'(t)$ on estimoitu olevan suoraan verrannollinen väkilukuun siten, että $y'(t) = 0.012\, y(t).$ Tässä aika t on ilmoitettu vuosina.

(a) Laske Eulerin menetelmää käyttäen arvio kaupungin vuoden 2002 lopun väkiluvulle (askelvälinä 1 vuosi).

(b) Laske asukasluku myös differentiaaliyhtälön tarkkaa (analyyttistä) ratkaisua hyväksi käyttäen. Miten Eulerin menetelmä toimii tässä yksittäistapauksessa?

5. Oletetaan, että tuotteen kysyntä (kulutus) C_t riippuu hinnasta P_t lain

$$C_t = 100 - 0.3\, P_t$$

mukaisesti. Tuotteen valmistajat reagoivat myös nopeasti hintamuutoksiin, niin että tarjonta (valmistus) S_t on saman kauden hinnan P_t funktio:

$$S_t = 50 + 0.2\, P_t.$$

Valmistajien varastoissa olevan tuotteen määrän Q_t muutos ΔQ_t määräytyy valmistuksen ja kulutuksen erotuksena, ts.

$$\Delta Q_t = S_t - C_t.$$

Hinnan P_t muutoksen ΔP_t oletetaan olevan suoraan verrannollinen yritysten varastojen muutokseen:

$$\Delta P_t = -\,0.2\, \Delta Q_t.$$

Tutki, miten P_t, S_t, C_t ja Q_t käyttäytyvät ajan funktioina. Mitä arvoja P_t, S_t, C_t ja Q_t lähestyvät pitkän ajan kuluessa? Onko mallin ratkaisu stabiili?